ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 512.562, 515.124.4

СОХРАНЕНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ ПРИ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПАРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Т. Н. Фоменко

В топологии известны результаты о сохранении в процессе гомотопии свойства отображения некоторых пространств в себя иметь неподвижную точку, если число Лефшеца исходного отображения отлично от нуля. Для класса сжимающих отображений метрических пространств и некоторых их обобщений известны результаты М. Фригон о сохранении при гомотопиях некоторого специального типа свойства сжимаемости отображения и, следовательно, свойства иметь неподвижную точку. В 1984 г. Дж. Уолкер предложил дискретный аналог гомотопии отображений упорядоченного множества — порядковую изотонную гомотопию. Р. Стонг показал естественность такого понятия и связь его с обычной непрерывной гомотопией. Недавно автор и Д. А. Подоприхин обобщили понятие порядковой изотонной гомотопии Уолкера и нашли достаточные условия для сохранения в процессе такой дискретной гомотопии (пары гомотопий) свойства отображения (пары отображений) упорядоченных множеств иметь неподвижную точку (точку совпадения). Данная статья содержит метрические аналоги этих результатов и некоторые их следствия. Используется метод упорядочения метрического пространства, предложенный в 1974 г. А. Брондстедом.

Ключевые слова: неподвижная точка, точка совпадения, порядок Брондстеда, порядковая гомотопия, дискретный аналог гомотопии.

T. N. Fomenko. Preservation of the existence of coincidence points under some discrete transformations of a pair of mappings of metric spaces.

In topology there are known results on the preservation under homotopy of the fixed point property of self-mappings in some spaces if the Lefschetz number of the initial mapping is nonzero. For the class of contracting mappings of metric spaces and for some of their generalizations, there are M. Frigon's known results on the preservation of the contraction property and hence of the fixed point property under homotopies of some special type. In 1984 J. W. Walker introduced a discrete counterpart of homotopy for mappings in an ordered set, which he called an order isotone homotopy. R. E. Stong showed the naturalness of this notion and its relation to the usual continuous homotopy. Recently, the author and D. A. Podoprikhin have generalized Walker's notion of order isotone homotopy and suggested sufficient conditions for the preservation under such discrete homotopy (a pair of homotopies) of the property of a mapping (a pair of mappings) of ordered sets to have a fixed point (a coincidence point). This paper contains metric counterparts of the obtained results and some corollaries. The method of ordering a metric space proposed by A. Brøndsted in 1974 is used.

Keywords: fixed point, coincidence point, Brøndsted's order, order homotopy, discrete counterpart of homotopy.

MSC: 06A06, 54H25, 54E40

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-292-300

Посвящается 70-летнему юбилею
выдающегося математика
и замечательного человека
академика РАН
Сергея Владимировича Матвеева

Введение

Для некоторых классов топологических пространств и их непрерывных отображений известны результаты о сохранении в процессе гомотопий свойства отображения иметь неподвижную точку. Например, известны результаты о сохранении таких свойств при любой гомотопии отображения компактного полиэдра с ненулевым числом Лефшеца. Известны также результаты о сохранении при гомотопиях специального типа свойства сжимающих отображений и некоторых их обобщений иметь неподвижную точку (см., например, [1]).

В данной статье исследуется вопрос о возможности сохранения свойства пары отображений метрических пространств иметь точку совпадения при некоторых дискретных преобразованиях этой пары отображений. Более точно, пусть $(X, d), (Y, \rho)$ — метрические пространства. В качестве дискретного аналога гомотопии между заданными отображениями $f, \tilde{f} : X \to Y$ рассматривается конечный упорядоченный набор $h_i : X \to Y$ отображений $\{h_i\}_{0 \le i \le n}$, $h_0 = f, h_n = \tilde{f}$, естественным образом связанных друг с другом и имеющих определенный набор свойств. Если заданы две пары (f, g) и $(\tilde{f}, \tilde{g})$ отображений и две таких дискретных гомотопии $\{h_i\}, \{\tilde{h}_i\}$, связывающих f с $\tilde{f}$ и g с $\tilde{g}$ соответственно, то возникает вопрос: как должны быть связаны между собой отображения h_i и $\tilde{h}_i$, чтобы из факта существования точки совпадения у исходной пары отображений (f, g) следовало существование точки совпадения у каждой из пар отображений $(h_i, \tilde{h}_i), i = 1, \ldots, n$, и, в частности, у пары $(\tilde{f}, \tilde{g})$? Основными результатами работы являются теоремы, в которых указаны достаточные условия, обеспечивающие наличие соответствующих точек совпадения. Предлагается два варианта таких достаточных условий. Отдельно рассматривается частный случай пары отображений $f, Id : X \to X$ и вопрос о сохранении свойства отображения иметь неподвижную точку при описанном выше дискретном аналоге гомотопии отображения. Доказательства основаны на результатах, полученных недавно автором совместно с Д. А. Подоприхиным [2] для отображений упорядоченных множеств. Переход от метрических пространств к упорядоченным множествам осуществляется по методу А. Брондстеда, предложенному в работе [3].

1. Гомотопия в упорядоченном множестве

В [4] было введено следующее понятие гомотопии изотонных отображений между упорядоченными множествами. Напомним, что отображение $f : X \to Y$ упорядоченных множеств $(X, \preceq_X), (Y, \preceq_Y)$ называется *изотонным*, если $(x \preceq_X y) \Longrightarrow (f(x) \preceq_Y f(y)), \forall x, y \in X$.

Определение 1 [4]. Пусть $(X, \preceq_X)$ и $(Y, \preceq_Y)$ — упорядоченные множества. Будем говорить, что задана *изотонная порядковая гомотопия* между изотонными отображениями $f, g : X \to Y$, если задан конечный набор изотонных отображений $h_0, h_1, \ldots, h_n : X \to Y$ таких, что $f = h_0 \preceq h_1 \succeq h_2 \preceq \cdots \succeq h_n = g$, где $h_i \preceq h_j \Longleftrightarrow h_i(x) \preceq_Y h_j(x), \forall x \in X$.

По поводу актуальности такого понятия можно сказать следующее.

В работе [5] показано, что упорядоченная изотонная гомотопия является частным случаем топологической непрерывной гомотопии для конечных упорядоченных множеств. В самом деле, пусть $(X, \preceq_X), (Y, \preceq_Y)$ — упорядоченные множества. Для любого $x \in X$ обозначим $T_X(x) := \{y \in X \mid y \preceq_X x\}, T^*_X(x) := \{y \in X \mid y \succeq_X x\}$. Аналогично определяются множества $T_Y(z)$ и $T^*_Y(z)$ для любого $z \in Y$. Зададим в X (аналогично в Y) топологию, полагая открытыми множествами идеалы данного порядка (т. е. такие (непустые) подмножества $I \subseteq X$, что $x \in I \Longrightarrow T_X(x) \subseteq I$). Тогда все изотонные отображения становятся непрерывными. Если множество X конечно и отображения $f, g : X \to Y$ изотонны, то f и g упорядоченно изотонно гомотопны в точности тогда, когда они топологически гомотопны.

2. Порядок Брондстеда и метрические аналоги теорем о совпадениях отображений упорядоченных множеств

Определение 2. *Порядком Брондстеда* [3] (см. также [6, гл. 18]) в метрическом пространстве (X, d) с заданным функционалом $\varphi : X \to \mathbb{R}$ назовем бинарное отношение $\preceq_\varphi$, определяемое правилом: $\forall x, y \in X, (x \preceq_\varphi y) \Longleftrightarrow (d(x, y) \le \varphi(y) - \varphi(x))$.

Легко видеть, что $\preceq_\varphi$ есть частичный порядок. Отметим, что элементы $x, y \in X$ *сравнимы (не сравнимы) относительно порядка* $\preceq_\varphi$ тогда и только тогда, когда $d(x,y) \le |\varphi(y) - \varphi(x)|$ $(d(x,y) > |\varphi(y) - \varphi(x)|)$. *Минимальность элемента a в подмножестве* $B \subseteq X$ относительно порядка $\preceq_\varphi$ означает, что для любого элемента $b \in B$ верно

$$\left[\begin{array}{ll} d(a,b) > \varphi(a) - \varphi(b), & \varphi(a) > \varphi(b); \\ d(a,b) \le \varphi(b) - \varphi(a), & \varphi(a) \le \varphi(b). \end{array}\right. \tag{1}$$

Максимальность элемента u в подмножестве $B \subseteq X$ относительно порядка $\preceq_\varphi$ означает, что для любого элемента $b \in B$ верно

$$\left[\begin{array}{ll} d(u,b) \le \varphi(u) - \varphi(b), & \varphi(u) > \varphi(b); \\ d(a,b) > \varphi(b) - \varphi(u), & \varphi(u) \le \varphi(b). \end{array}\right. \tag{2}$$

Отметим, что минимальность элемента относительно порядка $\preceq_\varphi$ означает его максимальность относительно двойственного порядка $\preceq_\varphi^*$, определяемого по правилу

$$(x \preceq_\varphi^* y) \Longleftrightarrow (x \succeq_\varphi y) \Longleftrightarrow (d(x,y) \le \varphi(x) - \varphi(y)), \quad \forall x, y \in X.$$

Пусть $(X,d), (Y,\rho)$ — метрические пространства и $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\psi : Y \to \mathbb{R}$ — заданные функционалы. Введем частичные порядки Брондстеда $\preceq_\varphi, \preceq_\psi$ в множествах X, Y, определяемые метриками d, ρ и функционалами φ, ψ соответственно.

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $f : X \to Y$ будем называть (φ,ψ)-*накрывающим отображение* $g : X \to Y$ *на множестве* $D \subseteq X$, если для любого $x \in D$ такого, что $\rho(g(x), f(x)) \le \psi(f(x)) - \psi(g(x))$, найдется $x' \in D, d(x,x') \le \varphi(x) - \varphi(x')$, для которого $f(x') = g(x)$. Если $D = X$, то выражение "на множестве D" в этом определении будем опускать.

О п р е д е л е н и е 4. Отображение $f : X \to Y$ будем называть (φ,ψ)-*изотонным*, если для любых $x, x' \in X$, для которых $d(x,x') \le \varphi(x) - \varphi(x')$, верно, что $\rho(f(x), f(x')) \le \psi(f(x)) - \psi(f(x'))$.

О п р е д е л е н и е 5. Множество Z в метрическом пространстве (X,d) с заданным функционалом $\varphi : X \to \mathbb{R}$ будем называть (φ,d)-*цепью*, если для любых $x, y \in Z$ верно, что $d(x,y) \le |\varphi(x) - \varphi(y)|$.

Если фиксирован элемент $x_0 \in X$, то будем обозначать

$$T_\varphi(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) \le \varphi(x_0) - \varphi(x)\}, \quad T_\varphi^*(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) \le \varphi(x) - \varphi(x_0)\}.$$

О п р е д е л е н и е 6. Пусть, как выше, $(X,d), (Y,\rho)$ — метрические пространства, $\varphi, \psi :$ $X \to \mathbb{R}$ — функционалы, $f, g : X \to Y$ — отображения. Пусть Z — некоторая (φ,d)-цепь. Будем называть ее (f,g,ψ)-*специальной*, если для любого $x \in Z$ выполнено неравенство $\rho(f(x), g(x)) \le \psi(f(x)) - \psi(g(x))$ и для любых $x, x' \in Z$ верно следствие

$$(0 < d(x,x') \le \varphi(x) - \varphi(x')) \Longrightarrow (\rho(f(x'), g(x)) \le \psi(g(x)) - \psi(f(x')).$$

Обозначим множество всех (f,g,ψ)-специальных (φ,d)-цепей через $\mathcal{S}(f,g,\varphi,\psi)$. Если зафиксирован элемент $x_0 \in X$, то обозначим

$$\mathcal{S}(x_0, f, g, \varphi, \psi) := \{Z \in \mathcal{S}(f,g,\varphi,\psi) \mid Z \subseteq T_\varphi(x_0)\}.$$

Аналогично определим множество $\mathcal{S}^*(f,g,\varphi,\psi)$ как множество таких (φ,d)-цепей $Z \subseteq X$, что для любого $x \in Z$ выполнено неравенство $\rho(f(x), g(x)) \le \psi(g(x)) - \psi(f(x))$ и для любых $x, x' \in Z$ верно следствие

$$(0 < d(x,x') \le \varphi(x') - \varphi(x)) \Longrightarrow (\rho(f(x'), g(x)) \le \psi(f(x')) - \psi(g(x)).$$

Если зафиксирован элемент $x_0 \in X$, то обозначим $\mathcal{S}^*(x_0, f, g, \varphi, \psi) := \{Z \in \mathcal{S}^*(f,g,\varphi,\psi) \mid Z \subseteq T_\varphi^*(x_0)\}$.

Ниже нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть заданы метрические пространства* $(X,d),(Y,\rho)$, *отображения* $f, g : X \to Y$ *и функционалы* $\varphi : X \to \mathbb{R}, \psi : Y \to \mathbb{R}$. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *для некоторой точки* $x_0 \in X$ *верно неравенство* $\rho(g(x_0), f(x_0)) \le \psi(f(x_0)) - \psi(g(x_0)$;

2) *отображение* f *является* (φ,ψ)-*накрывающим отображение* g *на множестве* $T_\varphi(x_0)$;

3) *отображение* g *является* (φ,ψ)-*изотонным*;

4) *для любой цепи* $Z \in \mathcal{S}(x_0, f, g, \varphi, \psi)$ *существует такой элемент* $w \in T_\varphi(x_0)$, *что* $\rho(g(w), f(w)) \le \psi(f(w)) - \psi(g(w))$, *и для любого* $x \in Z$ *верны неравенства*: $d(w,x) \le \varphi(x) - \varphi(w)$, $\rho(f(w), f(x)) \le \psi(f(x)) - \psi(f(w))$, $\rho(g(w), g(x)) \le \psi(g(x)) - \psi(g(w))$.

Тогда множество $T_\varphi(x_0) \cap \mathrm{Coin}(f,g)$ *непусто* ($\mathrm{Coin}(f,g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$), *и в нем есть такой элемент* a, *что для* a *и любого* $x \in T_\varphi(x_0) \cap \mathrm{Coin}(f,g)$ *выполнено условие* (1).

Доказательство. Если переформулировать эту теорему в терминах порядков Брондстеда $\preceq_\varphi, \preceq_\psi$, то получается следующее утверждение, которое является следствием [7, теоремы 3 и 4; 8, теоремы 3 и 4] при $n = 2$ для двух однозначных отображений.

Предложение 1. *Пусть заданы упорядоченные множества* $(X, \preceq_\varphi), (Y, \preceq_\psi)$, *отображения* $f, g : X \to Y$, *и выполнены следующие условия*:

1) *для некоторой точки* $x_0 \in X$ $g(x_0) \preceq_\psi f(x_0)$;

2) *отображение* f *накрывает отображение* g *на множестве* $T_\varphi(x_0)$, *т. е. для любого* $x \in T_\varphi(x_0)$, *для которого* $g(x) \preceq_\psi f(x)$, *найдется такой* $x' \in T_\varphi(x_0), x' \preceq_\varphi x$, *что* $g(x) = f(x')$;

3) *отображение* g *изотонно*;

4) *любая цепь* $Z \in \mathcal{S}(x_0, f, g, \varphi, \psi)$ *имеет такую нижнюю границу* $w \in T_\varphi(x_0)$, *что* $g(w) \preceq_\psi f(w)$, *и значения* $f(w), g(w)$ *есть нижние границы множеств* $f(Z), g(Z)$ *соответственно. Тогда множество* $T_\varphi(x_0) \cap \mathrm{Coin}(f,g)$ *непусто, и в нем имеется минимальный элемент.*

Справедливость этого утверждения завершает доказательство теоремы 1. □

В силу [7, замечание 1] (см. также [8]), предложение 1 является некоторым уточнением [9, теорема 1; 10, теорема 1]. Поясним это замечание более подробно. В самом деле, в отличие от условия 2) предложения 1, в теореме 1 из работы [9] (совпадающей с теоремой 1 из работы [10]) формулируется более сильное условие. А именно: отображение f упорядоченно накрывает множество $g(T_X(x_0))$. Согласно определению, данному в [9; 10], это означает, что для любого $x \in X$ и любого $y \preceq f(x)$, $y \in g(T_X(x_0))$, т. е. $y = g(x_1)$ для некоторого $x_1 \in X, x_1 \preceq x_0$, существует такая точка $x' \in T_X(x)$, что $y = g(x_1) = f(x')$. Отметим, что здесь не требуется, чтобы $x_1 = x$, как в условии 2) предложения 1. В этом смысле предложение 1 является уточнением теоремы 1 из [9; 10].

Отметим также, что в случае, когда $X = Y$ и отображение f тождественно, предложение 1 есть частный случай теоремы 2.3 из работы [11].

Следующие две теоремы представляют достаточные условия, при которых существование точки совпадения у исходной пары отображений метрических пространств обеспечивает существование точки совпадения у другой пары отображений, связанной с исходной определенными условиями.

Теорема 2. *Пусть заданы метрические пространства* $(X,d),(Y,\rho)$, *отображения* $f, g : X \to Y$, *функционалы* $\varphi : X \to \mathbb{R}, \psi : Y \to \mathbb{R}$ *и* $x_0 \in \mathrm{Coin}(f,g)$. *Пусть также заданы отображения* $f_1, g_1 : X \to Y$, *причем* $f \preceq_\psi f_1, g_1 \preceq_\psi g$ *на* $T_\varphi(x_0)$, *т. е. неравенства*

$$\rho(f_1(x), f(x)) \le \psi(f_1(x)) - \psi(f(x)), \quad \rho(g_1(x), g(x)) \le \psi(g(x)) - \psi(g_1(x))$$

верны для любого $x \in T_\varphi(x_0)$. *Предположим также, что отображение* f_1 (φ,ψ)-*накрывает отображение* g_1 *на* $T_\varphi(x_0)$, *отображение* g_1 *является* (φ,ψ)-*изотонным, для любой* (φ,d)-*цепи* $Z \in \mathcal{S}(x_0, f_1, g_1, \varphi, \psi)$ *существует элемент* $w \in T_\varphi(x_0)$, *для которого* $\rho(g_1(w), f_1(w)) \le \psi(f_1(w)) - \psi(g_1(w))$, *и для любого* $x \in Z$ *выполнены неравенства* $d(w,x) \le \varphi(x) - \varphi(w)$,

$\rho(f_1(w), f_1(x)) \leq \psi(f_1(x)) - \psi(f_1(w))$, $\rho(g_1(w), g_1(x)) \leq \psi(g_1(x)) - \psi(g_1(w))$. *Тогда множество* $T_\varphi(x_0) \cap \mathrm{Coin}(f_1, g_1)$ *непусто и в нем есть такой элемент* a_1*, что для* a_1 *и любого* $x \in T_\varphi(x_0) \cap \mathrm{Coin}(f_1, g_1)$ *выполнены условия* (1).

Доказательство. Из условия $f(x_0) = g(x_0)$ и неравенств

$$\rho(f_1(x), f(x)) \leq \psi(f_1(x)) - \psi(f(x)), \quad \rho(g_1(x), g(x)) \leq \psi(g(x)) - \psi(g_1(x))$$

следует, что

$$\rho(f_1(x_0), g_1(x_0)) \leq \rho(f_1(x_0), f(x_0)) + \rho(g_1(x_0), g(x_0))$$
$$\leq \psi(f_1(x_0)) - \psi(f(x_0)) + \psi(g(x_0)) - \psi(g_1(x_0)) = \psi(f_1(x_0)) - \psi(g_1(x_0)).$$

Полученное неравенство в совокупности с остальными условиями теоремы 2 обеспечивает для отображений f_1, g_1 выполнение всех условий теоремы 1, из которой следует доказываемое утверждение. □

Теорема 3. *Пусть заданы метрические пространства* $(X, d), (Y, \rho)$*, отображения* f, $g : X \to Y$ *и функционалы* $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\psi : Y \to \mathbb{R}$*, и для некоторой точки* $x_0 \in X$ *верно, что* $f(x_0) = g(x_0)$*. Пусть также заданы отображения* $f_2, g_2 : X \to Y$*, причем*

$$\rho(f_2(x), f(x)) \leq \psi(f(x)) - \psi(f_2(x)), \quad \rho(g_2(x), g(x)) \leq \psi(g_2(x)) - \psi(g(x)) \quad \forall x \in T_\varphi(x_0).$$

Предположим также, что отображение g_2 (φ, ψ)*-накрывает отображение* f_2 *на* $T_\varphi(x_0)$*, отображение* f_2 (φ, ψ)*-изотонно и для любой* (φ, d)*-цепи* $Z \in \mathcal{S}(x_0, g_2, f_2, \varphi, \psi)$ *существует такой элемент* $w \in T_\varphi(x_0)$*, что* $\rho(g_2(w), f_2(w)) \leq \psi(g_2(w)) - \psi(f_2(w))$*. Кроме того, пусть для любого* $x \in Z$ *верно, что* $d(w, x) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$ *и* $\rho(g_2(w), g_2(x)) \leq \psi(g_2(x)) - \psi(g_2(w))$, $\rho(f_2(w), f_2(x)) \leq \psi(f_2(x)) - \psi(f_2(w))$*. Тогда множество* $T_\varphi(x_0) \cap \mathrm{Coin}(f_2, g_2)$ *непусто, и в нем имеется такой элемент* a_2*, что для* a_2 *и любого* $x \in T_\varphi(x_0) \cap \mathrm{Coin}(f_2, g_2)$ *выполнены условия* (1).

Доказательство проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2. □

3. Дискретный аналог гомотопии отображений метрических пространств

Введем теперь следующее понятие дискретного аналога гомотопии между двумя отображениями метрических пространств.

Определение 7. Пусть, как и выше, $(X, d), (Y, \rho)$ — метрические пространства, f, $\tilde{f} : X \to Y$, $\varphi : X \to \mathbb{R}, \psi : Y \to \mathbb{R}$ — заданные отображения и функционалы. Будем говорить, что задана *дискретная* ψ*-гомотопия* (ниже — ψ*-гомотопия*) между отображениями f и $\tilde{f}$, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ задан набор $H = \{h_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$ отображений $h_j : X \to Y, j = 0, 1, \ldots, n$, для которого выполнены условия $f = h_0 \preceq_\psi h_1 \succeq_\psi h_2 \preceq_\psi \ldots \succeq_\psi h_n = \tilde{f}$, где соотношение $h_j \preceq_\psi h_{j+1}$ ($h_j \succeq_\psi h_{j+1}$) означает, что

$$\rho(h_j(x), h_{j+1}(x)) \leq \psi(h_{j+1}(x)) - \psi(h_j(x)) \quad (\rho(h_j(x), h_{j+1}(x)) \leq \psi(h_j(x)) - \psi(h_{j+1}(x)) \ \ \forall x \in X.$$

Отметим, что это определение представляет собой метрический аналог определения дискретной гомотопии отображений упорядоченных множеств, введенного недавно автором и Д. А. Подоприхиным [2] и обобщающего понятие изотонной гомотопии, предложенное в 1984 г. Уолкером [4].

Легко видеть, что введенное понятие ψ-гомотопии между отображениями метрических пространств является отношением эквивалентности.

Сформулируем теперь общее утверждение о сохранении свойства пары отображений метрических пространств иметь точку совпадения, основанное на теоремах 2 и 3.

Теорема 4. *Пусть* $(X,d),(Y,\rho)$ *— метрические пространства,* $\varphi : X \to \mathbb{R}$*,* $\psi : Y \to \mathbb{R}$ *— заданные функционалы. Пусть заданы отображения* $f,g,\tilde{f},\tilde{g} \;:\; X \;\to\; Y$ *и дискретные* ψ*-гомотопии* $H = \{h_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$ *и* $Q = \{q_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$*, соединяющие отображение* f *с* $\tilde{f}$ *и* g *с* $\tilde{g}$ *соответственно. Более точно,* $f = h_0 \preceq_\psi h_1 \succeq_\psi h_2 \preceq_\psi \ldots \succeq_\psi h_n = \tilde{f}$ *и* $g = q_0 \succeq_\psi q_1 \preceq_\psi q_2 \succeq_\psi \ldots \preceq_\psi q_n = \tilde{g}$*. Пусть также выполнены следующие условия*:

1) *существует* $x_0 \in \mathrm{Coin}(f,g)$*;*

2) *при нечетном* j*,* $1 \le j \le n$*, отображение* h_j (φ,ψ)*-накрывает отображение* q_j*, отображение* q_j *является* (φ,ψ)*-изотонным, и для любой* (φ,d)*-цепи* $Z \in \mathcal{S}(h_j,q_j,\varphi,\psi)$ *существует такой элемент* $w \in X$*, что* $\rho(h_j(w),q_j(w)) \le \psi(h_j(w)) - \psi(q_j(w))$ *и для любого* $x \in Z$ *верно, что* $d(w,x) \le \varphi(x) - \varphi(w)$ *и* $\rho(h_j(w),h_j(x)) \le \psi(h_j(x)) - \psi(h_j(w))$*,* $\rho(q_j(w),q_j(x)) \le \psi(q_j(x)) - \psi(q_j(w))$*;*

3) *при четном* j*,* $1 \le j \le n$*, отображение* q_j (φ,ψ)*-накрывает отображение* h_j*, отображение* h_j *является* (φ,ψ)*-изотонным, и для любой цепи* $Z \in \mathcal{S}(q_j,h_j,\varphi,\psi)$ *существует такой элемент* $w \in X$*, что* $\rho(q_j(w),h_j(w)) \le \psi(q_j(w)) - \psi(h_j(w))$ *и для любого* $x \in Z$ *верно, что* $d(w,x) \le \varphi(x) - \varphi(w)$ *и* $\rho(q_j(w),q_j(x)) \le \psi(q_j(x)) - \psi(q_j(w))$*,* $\rho(h_j(w),h_j(x)) \le \psi(h_j(x)) - \psi(h_j(w))$*.*

Тогда $\mathrm{Coin}(h_j,q_j) \ne \varnothing, 1 \le j \le n$*. Кроме того, существует* (φ,d)*-цепь* $x_n \preceq_\varphi x_{n-1} \preceq_\varphi \cdots \preceq_\varphi x_1 \preceq_\varphi x_0$*, где* $x_j \in \mathrm{Coin}(q_j,h_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$*, и для* x_j *и для любого элемента* $y \in \mathrm{Coin}(q_j,h_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ *выполнены условия* (1)*,* $1 \le j \le n$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость этого утверждения доказывается с помощью последовательного применения к парам отображений h_j, q_j и точкам $x_{j-1} \in \mathrm{Coin}(h_{j-1},q_{j-1})$ теоремы 2 при нечетном j и теоремы 3 при четном j для всех $j, 1 \le j \le n$. □

Ниже (теорема 5) предлагается еще один вариант теоремы о сохранении свойства пары отображений иметь точку совпадения при дискретных ψ-гомотопиях. При этом одна из гомотопий будет (φ,ψ)-изотонной. Отметим, что это утверждение является метрическим аналогом соответствующей теоремы автора и Д. А. Подоприхина [2] для отображений упорядоченных множеств.

Нам понадобится следующее понятие.

О п р е д е л е н и е 8. Будем говорить, что отображение $f : X \to Y$ (φ,ψ)*-накрывает сверху отображение* $g : X \to Y$ *на множестве* $D \subseteq X$, если для любого $x \in D$ такого, что $\rho(g(x),f(x)) \le \psi(g(x)) - \psi(f(x))$, найдется такой элемент $x' \in D$, что $d(x,x') \le \varphi(x') - \varphi(x)$ и $f(x') = g(x)$. Если $D = X$, то будем называть отображение f (φ,ψ)*-накрывающим сверху отображение* g.

Теорема 5. *Пусть* $(X,d),(Y,\rho)$ *— метрические пространства,* $\varphi : X \to \mathbb{R}, \psi : Y \to \mathbb{R}$ *— заданные функционалы. Пусть* (f,g) *и* $(\tilde{f},\tilde{g})$ *— две пары отображений из* X *в* Y *и заданы дискретные* ψ*-гомотопии* $H = \{h_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$ *и* $Q = \{q_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$*, соединяющие отображение* f *с* $\tilde{f}$ *и* g *с* $\tilde{g}$ *соответственно. Более точно,* $f = h_0 \preceq_\psi h_1 \succeq_\psi h_2 \preceq_\psi \ldots \succeq_\psi h_n = \tilde{f}$*,* $\quad g = q_0 \succeq_\psi q_1 \preceq_\psi q_2 \succeq_\psi \ldots \preceq_\psi q_n = \tilde{g}$*. Пусть гомотопия* H *является* (φ,ψ)*-изотонной, т. е. отображения* h_j *являются* (φ,ψ)*-изотонными для всех* $j, 1 \le j \le n$*, существует* $x_0 \in \mathrm{Coin}(f,g)$*, и выполнены следующие условия на гомотопию* Q :

1) *для любого нечетного* $j, 1 \le j \le n$*, отображение* q_j *является* (φ,ψ)*-накрывающим сверху отображение* h_j*, и для любой* (φ,d)*-цепи* $Z \in \mathcal{S}^*(q_j,h_j,\varphi,\psi)$ *существует элемент* $\xi \in X$ *такой, что* $\rho(h_j(\xi),q_j(\xi)) \le \psi(h_j(\xi)) - \psi(q_j(\xi))$*, и для любого* $x \in Z$ *верно, что* $d(x,\xi) \le \varphi(\xi) - \varphi(x)$ *и* $\rho(q_j(x),q_j(\xi)) \le \psi(q_j(\xi)) - \psi(q_j(x))$*,* $\rho(h_j(x),h_j(\xi)) \le \psi(h_j(\xi)) - \psi(h_j(x))$*;*

2) *для любого четного* $j, 1 \le j \le n$*, отображение* q_j *является* (φ,ψ)*-накрывающим отображение* h_j*, и для каждой цепи* $Z \in \mathcal{S}(q_j,h_j,\varphi,\psi)$ *найдется элемент* $\xi \in X$ *такой, что* $\rho(h_j(\xi),q_j(\xi)) \le \psi(q_j(\xi)) - \psi(h_j(\xi))$*, и для любого* $x \in Z$ *верно, что* $d(\xi,x) \le \varphi(x) - \varphi(\xi)$ *и* $\rho(q_j(\xi),q_j(x)) \le \psi(q_j(x)) - \psi(q_j(\xi))$*,* $\rho(h_j(\xi),h_j(x)) \le \psi(h_j(x)) - \psi(h_j(\xi))$*.*

Тогда существует последовательность $\{x_j\}_{0 \le j \le n} \subseteq X$*, где* $x_0 \preceq_\varphi x_1 \succeq_\varphi x_2 \preceq_\varphi \cdots \preceq_\varphi x_{n-1} \succeq_\varphi x_n$*, и* $x_j \in \mathrm{Coin}(h_j,q_j)$*. Более точно, если* j *нечетно, то* $x_j \in \mathrm{Coin}(h_j,q_j) \cap T^*_\varphi(x_{j-1})$ *и* *для x_j и любого элемента $x \in \mathrm{Coin}(h_j, q_j) \cap T^*_\varphi(x_{j-1})$ выполнено условие* (2), *а если j четно, то $x_j \in \mathrm{Coin}(h_j, q_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ и для x_j и любого элемента $x \in \mathrm{Coin}(h_j, q_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ выполнено условие* (1).

Доказательство теоремы 5 вполне аналогично доказательству теоремы 4. Отличие состоит в том, что при нечетных значениях j для пары отображений (h_j, q_j) выполняются условия теоремы 1 относительно *двойственных порядков Брондстеда* $\preceq^*_\varphi, \preceq^*_\psi$ на X и Y соответственно. $\square$

4. Некоторые следствия

Естественно рассмотреть частный случай пары отображений метрического пространства в себя, когда одно из отображений тождественно, и применить к нему полученные выше результаты. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — заданный функционал.

Заметим, что для любого отображения $f : X \to X$ тождественное отображение $Id_X : X \to X$ является как (φ, φ)-накрывающим (ниже: φ-накрывающим), так и (φ, φ)-накрывающим сверху (ниже: φ-накрывающим сверху) отображение f. Кроме того, тождественное отображение, очевидно, является и (φ, φ)-изотонным (ниже: φ-изотонным).

Поэтому, применяя к описанной ситуации теорему 4, получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — заданный функционал. Пусть заданы отображения $f, \tilde{f} : X \to X$ и дискретная φ-гомотопия $F = \{f_j\}_{1 \le j \le n}$ между ними. Более точно, $f = f_0 \preceq_\varphi f_1 \succeq_\varphi f_2 \preceq_\varphi \ldots \succeq_\varphi f_n = \tilde{f}$. Пусть выполнены следующие условия*:

1) *существует $x_0 \in \mathrm{Fix}(f) := \{x \in X | x = f(x)$;*

2) *при нечетном j, $1 \le j \le n$, отображение f_j является φ-накрывающим тождественное отображение Id , т. е. для любого $x \in X$, где $d(x, f(x)) \le \varphi(f(x)) - \varphi(x)$, существует $x' \in T_\varphi(x)$ такой, что $f(x') = x$. Кроме того, для любой (φ, d)-цепи $Z \in \mathcal{S}(f_j, Id, \varphi, \varphi)$ существует такой элемент $w \in X$, что $d(f_j(w), w) \le \varphi(f_j(w)) - \varphi(w)$, и для любого $x \in Z$ верно, что $d(w, x) \le \varphi(x) - \varphi(w)$ и $d(f_j(w), f_j(x)) \le \varphi(f_j(x)) - \varphi(f_j(w))$;*

3) *при четном j, $1 \le j \le n$, отображение f_j является φ-изотонным, и для любой цепи $Z \in \mathcal{S}(Id, f_j, \varphi, \varphi)$ существует такой элемент $w \in X$, что $\rho(w, f_j(w)) \le \varphi(w) - \varphi(f_j(w))$, и для любого $x \in Z$ верно неравенство $d(w, f_j(x)) \le \varphi(f_j(x)) - \varphi(w)$.*

Тогда $\mathrm{Fix}(f_j) \ne \varnothing, 1 \le j \le n$. Кроме того, существует (φ, d)-цепь $x_n \preceq_\varphi x_{n-1} \preceq_\varphi \cdots \preceq_\varphi x_1 \preceq_\varphi x_0$, где $x_j \in \mathrm{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$, и для x_j и для любого элемента $y \in \mathrm{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ выполнены условия (1), *$1 \le j \le n$.*

Аналогично, применяя теорему 5 к описанной ситуации, получаем следующее утверждение, которое представляет собой метрический аналог результата Д. А. Подоприхина [12] о сохранении при порядковой гомотопии свойства отображения упорядоченного множества в себя иметь неподвижную точку.

Следствие 2. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — заданный функционал. Пусть $f, \tilde{f} : X \to X$ — два отображения, и задана дискретная φ-гомотопия $F = \{f_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$, соединяющая отображение f с $\tilde{f}$. Более точно, $f = f_0 \preceq_\varphi f_1 \succeq_\varphi f_2 \preceq_\varphi \ldots \succeq_\varphi f_n = \tilde{f}$. Пусть отображения f_j являются φ-изотонными для всех $j, 1 \le j \le n$, существует $x_0 \in \mathrm{Fix}(f)$ и выполнены следующие условия*:

1) *для любого нечетного $j, 1 \le j \le n$, и для любой (φ, d)-цепи $Z \in \mathcal{S}^*(Id, f_j, \varphi, \varphi)$ существует элемент $\xi \in X$ такой, что $d(f_j(\xi), \xi) \le \varphi(f_j(\xi)) - \varphi(\xi)$, и для любого $x \in Z$ верно неравенство $d(f_j(x), \xi) \le \varphi(\xi) - \varphi(f_j(x))$;*

2) *для любого четного $j, 1 \le j \le n$, и для каждой цепи $Z \in \mathcal{S}(Id, f_j, \varphi, \varphi)$ найдется элемент $\xi \in X$ такой, что $d(f_j(\xi), \xi) \le \varphi(\xi) - \varphi(f_j(\xi))$, и для любого $x \in Z$ верно неравенство $d(f_j(x), \xi) \le \varphi(f_j(x)) - \varphi(\xi)$.*

Тогда существует последовательность $\{x_j\}_{0\le j\le n} \subseteq X$, *где* $x_0 \preceq_\varphi x_1 \succeq_\varphi x_2 \preceq_\varphi \cdots \preceq_\varphi x_{n-1} \succeq_\varphi x_n$, $x_j \in \mathrm{Fix}(f_j)$. *Более точно, если* j *нечетно, то* $x_j \in \mathrm{Fix}(f_j) \cap T^*_\varphi(x_{j-1})$ *и для* x_j *и любого* $x \in \mathrm{Fix}(f_j) \cap T^*_\varphi(x_{j-1})$ *выполнено условие* (2), *а если* j *четно, то* $x_j \in \mathrm{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ *и для* x_j *и любого* $x \in \mathrm{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ *выполнено условие* (1).

Приведенные результаты открывают новые возможности для решения вопроса о сохранении существования неподвижных точек (точек совпадения) отображений метрических пространств при некоторых их дискретных изменениях. Кроме того, с помощью неравенств устанавливаются связи между неподвижными точками (точками совпадения) промежуточных отображений (пар отображений). Представляет интерес разработка методов отыскания для конкретных метрических пространств наиболее эффективных функционалов, связанных с заданным отображением (парой отображений) и обеспечивающих выполнение условий приведенных теорем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Frigon M.** On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings // Recent Advances on Metric Fixed Point Theory. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996. P. 19–29.
2. **Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н.** Сохранение свойства неподвижной точки и свойства совпадения при гомотопии отображений упорядоченных множеств // Докл. АН. 2017. Т. 477, № 4. С. 402–405. doi: 10.7868/S0869565217340035.
3. **Brøndsted A.** On a lemma of Bishop and Phelps // Pacific J. Math. 1974. vol. 55, no. 2. P. 335–341.
4. **Walker J.W.** Isotone relations and the fixed point property for posets // Discr. Math. 1984. Vol. 48, no. 2–3. P. 275–288. doi: 10.1016/0012-365X(84)90188-2.
5. **Stong R.E.** Finite topological spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, no. 2. P. 325–340.
6. Handbook of metric fixed point theory / eds. W.A. Kirk, B. Sims. NY: Springer Science & Business Media, 2001. 704 p. doi: 10.1007/978-94-017-1748-9.
7. **Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н.** О совпадениях семейств отображений упорядоченных множеств // Докл. РАН. Математика. 2016. Т. 471, №1. С. 16–18. doi: 10.7868/S0869565216310054.
8. **Fomenko T.N., Podoprikhin D.** Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered set // Topology Appl. 2017. Vol. 221. P. 275–285. doi: 10.1016/j.topol.2016.07.024.
9. **Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.** О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 88, № 3. С. 710–713.
10. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., and Zhukovskiy S.E.** Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology Appl. 2015. Vol. 179. P. 13–33.
11. **Fomenko T.N., Podoprikhin D.A.** Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets // J. Fixed Point Theory Appl. 2016. Vol. 18, no. 4. P. 823–842. doi: 10.1007/s11784-016-0327-7.
12. **Podoprikhin D.A.** Fixed points of mappings on ordered sets // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no. 6. P. 1069–1074.

Фоменко Татьяна Николаевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
г. Москва
e-mail: tn-fomenko@yandex.ru

Поступила 15.06.2017

REFERENCES

1. Frigon M. On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings. *Recent Advances on Metric Fixed Point Theory*, Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996, pp. 19–29.
2. Podoprikhin D.A., Fomenko T.N. Preservation of the existence of fixed and coincidence points under homotopy of mappings of ordered sets. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 3, p. 1–3. doi: 10.1134/S1064562417060199.
3. Brøndsted A. On a lemma of Bishop and Phelps. *Pacific J. Math.*, 1974, vol. 55, no. 2, pp. 335–341.

4. Walker J.W. Isotone relations and the fixed point property for posets. *Discr. Math.*, 1984, vol. 48, no. 2–3, pp. 275–288. doi: 10.1016/0012-365X(84)90188-2 .
5. Stong R.E. Finite topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966, vol. 123, no. 2, pp. 325–340. doi: 10.1090/S0002-9947-1966-0195042-2 .
6. Kirk W.A., Sims B. (eds.) *Handbook of metric fixed point theory.* NY: Springer Science & Business Media, 2001. 704 p. doi: 10.1007/978-94-017-1748-9 .
7. Podoprikhin D.A., Fomenko T.N. On coincidences of families of mappings on ordered sets. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 3, pp. 620–622. doi: 10.1134/S106456241606003X .
8. Fomenko T.N., Podoprikhin D. Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered set. *Topology Appl.*, 2017, vol. 221, pp. 275–285. doi: 10.1016/j.topol.2016.07.024 .
9. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. On coincidence points of mappings in partially ordered spaces. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 710–713. doi: 10.1134/S1064562413060239 .
10. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology Appl.*, 2015, vol. 179, pp. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013 .
11. Fomenko T.N., Podoprikhin D.A. Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 823–842. doi: 10.1007/s11784-016-0327-7 .
12. Podoprikhin D.A. Fixed points of mappings on ordered sets. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 6, pp. 1069–1074.

The paper was received by the Editorial Office on June 15, 2017.

Tatiana Nikolaevna Fomenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru .