ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С КУСОЧНО МОНОТОННОЙ ДИНАМИКОЙ[1]

Н. Н. Субботина[2], Н. Г. Новоселова

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для детерминированной нелинейной системы с кусочно монотонной динамикой. Рассматриваемая математическая модель появляется при описании процесса химиотерапии злокачественной опухоли. Данные исследования позволяют изучить влияние характера немонотонности на структуру оптимального управления. В работе исследуется случай, когда функция терапии, описывающая влияние лекарства на скорость роста клеток, имеет два максимума. Приводятся сравнения с результатами для изученного ранее случая одного максимума у функции терапии в данной модели. Работа посвящена построению функции цены для рассматриваемой задачи оптимального управления. Как известно, функция цены является основой для построения оптимального синтеза, т. е. оптимальной позиционной стратегии терапии. Конструкция функции цены использует то, что она является единственным минимаксным (вязкостным) решением задачи Коши для основного уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ). С помощью непрерывной склейки конечного числа гладких функций, построенных с помощью метода характеристик Коши для вспомогательных уравнений ГЯБ, конструируется непрерывная функция φ. Новым элементом конструкции является линия негладкой склейки с помощью условий Ранкина — Гюгонио. Эта линия играет ключевую роль для оптимальной стратегии управления, так как определяет линию ее разрыва. В работе приводится обоснование совпадения построенной функции φ с минимаксным решением задачи Коши для основного уравнения ГЯБ.

Ключевые слова: оптимальное управление, линия Ранкина — Гюгонио, уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, метод характеристик Коши.

N. N. Subbotina, N. G. Novoselova. Optimal result in a control problem with piecewise monotone dynamics.

We consider an optimal control problem for a deterministic nonlinear system with piecewise monotone dynamics. The mathematical model under consideration describes the process of a chemotherapy treatment of a malignant tumor. The research makes it possible to analyze the influence of the type of nonmonotonicity on the structure of the optimal control. We consider the case when the therapy function, which describes the effect of the drug on the cell growth rate, has two maxima. Comparisons are made with the results for the previously studied case of a single maximum of the therapy function in this model. This paper is devoted to the construction of the value function for the optimal control problem under consideration. As is known, the value function is the basis for constructing an optimal synthesis, i.e., an optimal feedback strategy in the therapy. We use the fact that the value function is the unique minimax (viscosity) solution of the Cauchy problem for the basic Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equation. By means of the continuous gluing of a finite number of smooth functions obtained by the Cauchy method of characteristics for auxiliary HJB equations, a continuous function φ is constructed. A new element of the construction is the line of nonsmooth gluing with the use of the Rankin–Hugoniot conditions. This line plays a key role for the optimal feedback strategy, because it determines its discontinuity line. We prove that the constructed function φ coincides with the minimax solution of the Cauchy problem for the basic HJB equation.

Keywords: optimal control, Rankine–Hugoniot line, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, Cauchy method of characteristics.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-265-280

[1]Работа подготовлена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00074) и программы Президиума РАН № 01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (проект PRAS-18-01).

[2]*25 лет назад* вышла первая в нашем журнале статья Нины Николаевны:

Субботина Н. Н. Унифицированные условия оптимальности в задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 147–159.

Введение

Данная работа посвящена построению функции цены в задаче оптимального управления для математической модели с нелинейностью, которая имеет вид кусочно монотонной функции. Мотивацией к изучению этой модели послужило исследование описанной в работах [1; 2] математической модели химиотерапии злокачественной опухоли для немонотонной функции терапии, показывающей степень эффективности воздействия химиотерапевтического средства на клетки. Математическая модель имеет вид системы из двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [1; 2] построена оптимальная позиционная стратегия лечения в случае немонотонной функции терапии, имеющей один максимум, который определяет критический порог для содержащегося в клетке лекарства. Цель настоящей работы состоит в исследовании данной математической модели для немонотонной функции терапии, имеющей два глобальных максимума.

В задачах оптимального управления основой конструкции позиционной оптимальной стратегии (оптимального синтеза) является функция цены, которая каждой исходной позиции (начальному моменту времени и начальному фазовому состоянию системы) ставит в соответствие оптимальный результат (оптимальное значение функционала качества управляемого процесса) [3–5]. Как известно [6], непрерывная негладкая функция цены совпадает с единственным минимаксным или вязкостным [7] решением задачи Коши для соответствующего основного уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ).

В данной работе приводится конструкция функции цены в задаче оптимальной терапии в математической модели с кусочно монотонной динамикой, определяемой функцией терапии, имеющей два глобальных максимума. С помощью склейки конечного числа гладких функций, построенных на основе метода характеристик Коши для соответствующих вспомогательных уравнений ГЯБ, конструируется непрерывная функция φ. Новым элементом конструкции является построение линии негладкой склейки с помощью условий Ранкина — Гюгонио [8; 9]. Приводится обоснование совпадения построенной функции φ с минимаксным решением задачи Коши для основного уравнения ГЯБ, а следовательно, и с функцией цены V рассматриваемой задачи оптимального управления.

1. Математическая модель

Пусть

m — число злокачественных клеток;

h — количество химиотерапевтического средства, способного убивать клетки опухоли;

$f(h)$ — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли;

$u(t)$ — количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени (управление).

Процесс взаимодействия клеток опухоли и химиотерапевтического средства описывается следующей известной моделью [1; 2], где время изменяется в пределах $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = -mf(h), \quad m(t_0) = m_0, \\ \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), \quad h(t_0) = h_0, \quad \alpha - \mathrm{const} > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где T — фиксированный конечный момент времени,

$$t_0 \in [0, T], \quad 0 < m_0 < M, \quad 0 \le h_0 \le L.$$

Здесь M — максимальное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью; L — максимальное допустимое количество химиотерапевтического средства в организме.

Обозначим через Q — максимальное количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени. Предполагается, что количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени, ограниченно:

$$0 \leq u(t) \leq Q. \tag{1.2}$$

1.1. Функция терапии

Рассмотрим кусочно монотонную, непрерывно дифференцируемую функцию терапии $f(h)$ со следующими свойствами:

*A*1. $f(h) > 0,\ 0 < h < L$, и ее производная $f'(h) = \dfrac{df(h)}{dh}$ имеет три различных действительных корня

$$0 < \hat{h}_1 < \hat{h}_2 < \hat{h}_3 < L, \quad f'(\hat{h}_i) = 0.$$

*A*2. Если $h < \hat{h}_1$, то $f'(h) > 0$, и если $h > \hat{h}_3$, то $f'(h) < 0$.

*A*3. $0 < \alpha\hat{h}_i < Q, \quad i = 1, 2, 3.$

*A*4. $f(\hat{h}_1) = f(\hat{h}_3)$.

Рассмотрим в качестве допустимых управлений кусочно постоянные функции

$$u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto [0, Q].$$

Нетрудно увидеть, что при сделанных предположениях решения системы (1.1) продолжимы до момента времени T.

1.2. Постановка задачи об оптимальной терапии

Задача оптимального управления состоит в построении допустимого управления, минимизирующего терминальную функцию платы:

$$\sigma(m(T)) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u()) \to \inf_{u(\cdot)}, \tag{1.3}$$

$m(t) = m(t; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)),\ t \in [t_0, T]$ — решение системы (1.1) с начальными условиями (t_0, m_0, h_0), выработанное под воздействием допустимого управления $u(t)$.

В дальнейших работах будет показано, что в данной задаче существует допустимое оптимальное управление $u^0(\cdot)$ в классе кусочно постоянных функций, на котором этот inf достигается.

1.3. Частные случаи

Отметим, что случай немонотонной функции терапии, для которой $f'(h) = h - \hat{h}_1$, т. е. функци $f'(h)$ имеет ровно один корень, разобран в работах [1; 2], где $f(h) = h(h - 2)$ и оптимальная позиционная стратегия лечения имеет вид

$$u^0(h) = \begin{cases} Q, & h < \hat{h}_1 = 1, \\ 0, & h > \hat{h}_1 = 1, \\ \alpha\hat{h}_1, & h = \hat{h}_1 = 1. \end{cases}$$

Здесь $\hat{h}_1 = 1$ является критическим порогом для стратегии терапии.

Если $f'(h)$ имеет два корня и выполняются условия *A*1–*A*4, то возможны случаи, когда $f'(h) > 0$ на $h \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ или $f'(h) < 0$ на $h \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$. В первом случае критическим порогом является корень $\hat{h}_2$, во втором случае — $\hat{h}_1$. Любой из этих двух случаев сводится к ситуации с одним критическим порогом.

В данной работе исследуется влияние немонотонности функции терапии на структуру оптимального синтеза в случае, когда $f'(h)$ меняет знак на интервале $(\hat{h}_1, \hat{h}_3)$.

Пусть в рассматриваемой задаче (1.1)–(1.3) выполняются условия $A1$–$A4$. Далее исследуем ситуацию, когда

$$\{f'(h) < 0, h \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)\} \cup \{f'(h) > 0, h \in (\hat{h}_2, \hat{h}_3)\}. \tag{1.4}$$

Из условия (1.4) и $A2$ следует, что корни $\hat{h}_1$ и $\hat{h}_3$ — точки максимума, а корень $\hat{h}_2$ — точка минимума для функции терапии $f(h)$.

2. Функция цены

Как известно, основой построения оптимального синтеза является функция цены, которая каждому начальному состоянию системы $(t_0, h_0, m_0) \in [0, T] \times [0, L] \times [0, M]$ ставит в соответствие оптимальный результат $Val(t_0, h_0)$ согласно (1.3).

Из уравнений динамики (1.1) получаем, что

$$\sigma(m(T)) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u()) = m_0^2 e^{-2\int\limits_{t_0}^{T} f(h(\tau))d\tau},$$

где $h(t) = h(t; t_0, h_0, u(\cdot))$ — решение второго уравнения системы (1.1). Таким образом, нахождение оптимального результата в задаче (1.1)–(1.3) можно редуцировать к следующей задаче:

$$\frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), \quad h(t_0) = h_0, \tag{2.1}$$

$$J_{t_0,h_0}(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} f(h(t; t_0, h_0, u^0(\cdot)))dt \to \sup. \tag{2.2}$$

(Авторы благодарят за идею редукции задачи (1.1)–(1.3) к виду (2.1), (2.2) анонимного рецензента своей предыдущей неопубликованной статьи.)

Как известно [6, гл. II, п. 6; 7], в задаче (2.1), (2.2) функция цены

$$V(t_0, h_0) = \sup J_{t_0,h_0}(u(\cdot)) \ \ \forall (t_0, h_0)$$

является обобщенным (минимаксным, вязкостным) решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(t,h)}{\partial t} - \alpha h \dfrac{\partial V(t,h)}{\partial h} + f(h) + \max\limits_{u \in [0,Q]} u \dfrac{\partial V(t,h)}{\partial h} = 0, \\ V(T, h) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

В точках, где $V(t, h)$ дифференцируема, функция цены удовлетворяет этому основному уравнению ГЯБ. В тех точках, где $V(t, h)$ не дифференцируема, ее субдифференциал непуст, $D^- V(t, h) \neq \varnothing$ [6; 9] и выполняется следующее условие:

$$\forall (s_t, s_h) \in D^- V(t, h) \Rightarrow s_t - \alpha h s_h + f(h) + \max_{u \in [0,Q]} u s_h \leq 0. \tag{2.4}$$

3. Построение функции цены

Построим на множестве $\Pi_T = \{[0, T] \times [0, L]\}, (t, h) \in \Pi_T$ непрерывную функцию $\varphi(t, h)$ и покажем, что она является функцией цены $V(t, h)$.

3.1. Функция $\varphi_1(\cdot)$

Определим функцию $\varphi_1(\cdot)$ на множестве $G_1 = \{(t,h) : t \in [0,T], h = \hat{h}_1\}$.

Как было отмечено выше, $\hat{h}_1$ — точка максимума функции терапии. Тогда для любого начального состояния $(t_0, \hat{h}_1) \in G_1$ оптимальным поведением будет $h(t) = h(t; t_0, \hat{h}_1, u^0(\cdot)) \equiv \hat{h}_1$, которое можно обеспечить с помощью управления $u^0(t) \equiv \alpha\hat{h}_1$, удовлетворяющего условию $A3$. Оптимальный результат задачи (2.1), (2.2) в точке $(t_0, \hat{h}_1) \in G_1$ определяется как

$$V(t_0, h_0) = J(u^0(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} f(h(t; t_0, h_0, u^0(\cdot))dt = f(\hat{h}_1)(T - t_0). \tag{3.1}$$

Решим следующую систему с краевыми условиями

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h + \alpha\hat{h}_1, \\ \dfrac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(\hat{h}_1), \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(\hat{h}_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} h(T) = \hat{h}_1, \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Для любых точек $(t_0, \hat{h}_1) \in G_1$ получим решение

$$\begin{cases} h(t_0) = \hat{h}_1, \\ s_h(t_0) = 0, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_1)(T - t_0) \end{cases}$$

и определим функции $\varphi_1(t_0, \hat{h}_1)$ и $s_h(t_0)$ для всех $t_0 \in [0,T]$ как

$$\varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = z(t_0) \equiv f(\hat{h}_1)(T - t_0), \quad s_h(t_0) = 0. \tag{3.2}$$

Согласно (3.1) и (3.2) получаем, что $\varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = V(t_0, \hat{h}_1)$ и $s_h(t_0) = 0$ на множестве G_1.

3.2. Функция $\varphi_2(\cdot)$

Определим функцию $\varphi_2(\cdot)$ на множестве $G_2 = \{(t,h) : t \in [0,T], h = \hat{h}_3\}$.

Как было отмечено выше, $\hat{h}_3$ — точка максимума функции терапии. Тогда для любой точки $(t_0, \hat{h}_3) \in G_2$ оптимальным поведением будет $h(t) = h(t; t_0, \hat{h}_3, u^0(\cdot)) \equiv \hat{h}_3$, которое можно обеспечить с помощью управления $u^0(t) \equiv \alpha\hat{h}_3$, удовлетворяющего условию $A3$. Оптимальный результат задачи (2.1),(2.2) в точке $(t_0, \hat{h}_3) \in G_2$ определяется как

$$V(t_0, h_0) = J(u^0(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} f(h(t; t_0, h_0, u^0(\cdot))dt = f(\hat{h}_3)(T - t_0). \tag{3.3}$$

Решим следующую систему с краевыми условиями

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h + \alpha\hat{h}_3, \\ \dfrac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(\hat{h}_3), \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(\hat{h}_3), \end{cases} \qquad \begin{cases} h(T) = \hat{h}_3, \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Для любых точек $(t_0, \hat{h}_3) \in G_2$ получим решение

$$\begin{cases} h(t_0) = \hat{h}_3, \\ s_h(t_0) = 0, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_3)(T - t_0) \end{cases}$$

и определим функции $\varphi_2(t_0, \hat{h}_3)$ и $s_h(t_0)$ для всех $t_0 \in [0, T]$ как

$$\varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = z(t_0) \equiv f(\hat{h}_3)(T - t_0), \quad s_h(t_0) = 0. \tag{3.4}$$

Согласно (3.3) и (3.4) получаем, что $\varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = V(t_0, \hat{h}_3)$ и $s_h(t_0) = 0$ на множестве G_2.

3.3. Функция $\varphi_3(\cdot)$

Определим функцию $\varphi_3(\cdot)$ в области $\Pi_1 = [0, T] \times [0, \hat{h}_1]$. Введенное ранее множество G_1 является частью границы этой области Π_1. Полагаем, что на множестве G_1 справедливо:

$$\varphi_3(t_0, \hat{h}_1) = \varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = V(t_0, \hat{h}_1), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial h}(t_0, \hat{h}_1) = 0. \tag{3.5}$$

Рассмотрим множество $G_3 = \{(t, h) : t = T, h \in [0, \hat{h}_1]\}$, которое является другой частью границы области Π_1, где полагаем

$$\varphi_3(T, h) = V(T, h) = J(u(\cdot)) = \int\limits_T^T f(h(t; T, h, u(\cdot))dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial h}(T, h) = 0. \tag{3.6}$$

Построим в области Π_1 классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + \mathbb{H}^Q\left(h, \frac{\partial \varphi_3}{\partial h}\right) := \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_3}{\partial h} + f(h) + Q\frac{\partial \varphi_3}{\partial h} = 0 \tag{3.7}$$

с краевым условием, определенным формулой (3.5) на множестве G_1 и формулой (3.6) на множестве G_3. Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h + Q, \\ \dfrac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(h), \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда $(t_1, h(t_1) = \hat{h}_1) \in G_1$

$$\begin{cases} h(t_1) = \hat{h}_1, \\ s_h(t_1) = 0, \\ z(t_1) = f(\hat{h}_1)(T - t_1), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда $(T, h(T)) \in G_3$

$$\begin{cases} h(T) = \gamma_1, \quad \gamma_1 \in [0, \hat{h}_1], \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек $(t_0, h_0) \in \Pi_1$, через которые проходят характеристики с краевыми условиями для множества G_1, имеет вид

$$\begin{cases} h(t_0) = (\hat{h}_1 - \frac{Q}{\alpha})e^{\alpha(t_1 - t_0)} + \dfrac{Q}{\alpha}, \\ s_h(t_0) = \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{\alpha(\tau - t_1)} f'(h(\tau))d\tau, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_1)(T - t_1) + \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} f(h(\tau))d\tau, \end{cases}$$

а для точек $(t_0, h_0) \in \Pi_1$, через которые проходят характеристики с краевыми условиями для множества G_3, можно представить как

$$\begin{cases} h(t_0) = (\gamma_1 - \frac{Q}{\alpha})e^{\alpha(T-t_0)} + \dfrac{Q}{\alpha}, \\ s_h(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha(\tau - T)} f'(h(\tau))d\tau, \\ z(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} f(h(\tau))d\tau. \end{cases}$$

В точках $(t_0, h_0) \in \Pi_1$, через которые проходят характеристики с краевыми условиями для G_1 и G_3, согласно методу Коши решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.7) в области Π_1 имеет вид

$$\varphi_3(t_0, h_0) = z(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

З а м е ч а н и е 1. Из условия $A2$, т. е. $f'(h) > 0$, $h \in [0, \hat{h}_1]$, вытекает, что

$$s_h(t_0) = \frac{\partial \varphi_3(t_0, h_0)}{\partial h} > 0$$

во внутренних точках области Π_1. Следовательно, функция $\varphi_3(t, h)$ в области Π_1 удовлетворяет основному уравнению ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial \varphi_3(t,h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_3(t,h)}{\partial h} + f(h) + Q\frac{\partial \varphi_3(t,h)}{\partial h} = \frac{\partial \varphi_3(t,h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_3(t,h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u\in[0,Q]} \frac{\partial \varphi_3(t,h)}{\partial h} = 0,$$

и $s_h(t_0) = \dfrac{\partial \varphi_3(t_0, h_0)}{\partial h} = 0$ при $(t_0, h_0) \in G_1 \cup G_3$.

3.4. Функция $\varphi_4(\cdot)$

Определим функцию $\varphi_4(\cdot)$ в области $\Pi_2 = [0, T] \times [\hat{h}_3, L]$. Введенное ранее множество G_2 является частью границы этой области Π_2. Полагаем, что на множестве G_2 справедливо

$$\varphi_4(t_0, \hat{h}_3) = \varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = V(t_0, \hat{h}_3), \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial h}(t_0, \hat{h}_3) = 0. \tag{3.8}$$

Рассмотрим множество $G_4 = \{(t, h) : t = T, h \in [\hat{h}_3, L]\}$, которое является другой частью границы области Π_2, где полагаем

$$\varphi_4(T, h) = V(T, h) = J(u(\cdot)) = \int\limits_{T}^{T} f(h(t; T, h, u(\cdot))dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial h}(T, h) = 0. \tag{3.9}$$

Построим в области Π_2 классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial t} + \mathbb{H}^0\Big(h, \frac{\partial \varphi_4}{\partial h}\Big) := \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_4}{\partial h} + f(h) + 0 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial h} = 0 \tag{3.10}$$

с краевым условием, определенным формулой (3.8) на множестве G_2 и формулой (3.9) на множестве G_4. Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h, \\ \dfrac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(h) \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда $(t_2, h(t_2) = \hat{h}_3) \in G_2$:

$$\begin{cases} h(t_2) = \hat{h}_3, \\ s_h(t_2) = 0, \\ z(t_2) = f(\hat{h}_3)(T - t_2), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда $(T, h(T)) \in G_4$:

$$\begin{cases} h(T) = \gamma_2, \quad \gamma_2 \in [\hat{h}_3, L], \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек $(t_0, h_0) \in \Pi_2$, через которые проходят характеристики с краевыми условиями для G_2, имеет вид

$$\begin{cases} h(t_0) = \hat{h}_3 e^{\alpha(t_2 - t_0)}, \\ s_h(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_2} e^{\alpha(\tau - t_2)} f'(h(\tau)) d\tau, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_3)(T - t_2) + \int\limits_{t_0}^{t_2} f(h(\tau)) d\tau, \end{cases}$$

а для точек $(t_0, h_0) \in \Pi_2$, через которые проходят характеристики с краевыми условиями для G_4, имеет вид:

$$\begin{cases} h(t_0) = \gamma_2 e^{\alpha(T - t_0)}, \\ s_h(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha(\tau - T)} f'(h(\tau)) d\tau, \\ z(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} f(h(\tau)) d\tau. \end{cases}$$

В точках $(t_0, h_0) \in \Pi_2$, через которые проходят характеристики с краевыми условиями для G_2 и G_4, согласно методу Коши, решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.10) в области Π_2 имеет вид

$$\varphi_4(t_0, h_0) = z(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

З а м е ч а н и е 2. Из условия $A2$, а именно $f'(h) < 0, \ h \in [\hat{h}_3, L]$, вытекает, что

$$s_h(t_0) = \frac{\partial \varphi_4(t_0, h_0)}{\partial h} < 0$$

во внутренних точках области Π_2. Следовательно, функция $\varphi_4(t, h)$ в области Π_2 удовлетворяет основному уравнению ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial \varphi_4(t,h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_4(t,h)}{\partial h} + f(h) + 0 \cdot \frac{\partial \varphi_4(t,h)}{\partial h} = \frac{\partial \varphi_4(t,h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_4(t,h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0,Q]} \frac{\partial \varphi_4(t,h)}{\partial h} = 0,$$

и $s_h(t_0) = \dfrac{\partial \varphi_4(t_0, h_0)}{\partial h} = 0$ при $(t_0, h_0) \in G_2 \cup \ G_4$.

3.5. Функция $\varphi_5(\cdot)$

Определим функцию $\varphi_5(\cdot)$ в области $\Pi = [0,T] \times [\hat{h}_1, \hat{h}_3]$. Введенное ранее множество G_1 является частью границы этой области Π. Полагаем, что на множестве G_1 справедливо

$$\varphi_5(t_0, \hat{h}_1) = \varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = V(t_0, \hat{h}_1), \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial h}(t_0, \hat{h}_1) = 0. \tag{3.11}$$

Рассмотрим множество $G_5 = \{(t,h) : t = T, h \in [\hat{h}_1, \hat{h}_2]\}$, которое является частью границы области Π, где полагаем

$$\varphi_5(T,h) = V(T,h) = J(u(\cdot)) = \int\limits_T^T f(h(t;T,h,u(\cdot))dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial h}(T,h) = 0. \tag{3.12}$$

Построим в области Π классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial t} + \mathbb{H}^0\left(h, \frac{\partial \varphi_5}{\partial h}\right) := \frac{\partial \varphi_5}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_5}{\partial h} + f(h) + 0 \cdot \frac{\partial \varphi_5}{\partial h} = 0 \tag{3.13}$$

с краевым условием, определенным формулой (3.11) на множестве G_1 и формулой (3.12) на множестве G_5. Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h, \\ \dfrac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(h) \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда $(t_1, h(t_1) = \hat{h}_1) \in G_1$:

$$\begin{cases} h(t_1) = \hat{h}_1, \\ s_h(t_1) = 0, \\ z(t_1) = f(\hat{h}_1)(T - t_1), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда $(T, h(T)) \in G_5$:

$$\begin{cases} h(T) = \xi_1, \quad \xi_1 \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2), \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек $(t_0, h_0) \in \Pi$, лежащих на графиках фазовых характеристик $(t, h(t))$, с краевыми условиями на G_1, имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{h}(t_0) = \hat{h}_1 e^{\alpha(t_1 - t_0)}, \\ s_h^5(t_0) = \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{\alpha(\tau - t_1)} f'(\tilde{h}(\tau)) d\tau, \\ z^5(t_0) = f(\hat{h}_1)(T - t_1) + \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} f(\tilde{h}(\tau)) d\tau, \end{cases}$$

а для точек $(t_0, h_0) \in \Pi$, лежащих на графиках фазовых характеристик $(t, h(t))$, с краевыми условиями на G_5, может быть представлено как

$$\begin{cases} \tilde{h}(t_0) = \xi_1 e^{\alpha(T-t_0)}, \\ s_h^5(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{\alpha(\tau - t_1)} f'(\tilde{h}(\tau)) d\tau, \\ z^5(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} f(\tilde{h}(\tau)) d\tau. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 3. Согласно методу Коши решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.13) в подобласти области Π, покрытой графиками фазовых характеристик $(t, h(t))$ с краевыми условиями на $G_1 \cup\ G_5$, имеет вид

$$\varphi_5(t_0, h_0) = z^5(t_0), \quad \frac{\partial \varphi_5(t_0, h_0)}{\partial h} = s_h^5(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

Используя (1.4), получаем, что в точках области $(t, h) \in [0, T) \times (\hat{h}_1, \hat{h}_2]$, покрытой графиками фазовых характеристик $(t, h(t))$ с краевыми условиями на $G_1 \cup\ G_5$, справедливо $\dfrac{\partial \varphi_5(t, h)}{\partial h} = s_h^5(t) < 0$.

3.6. Функция $\varphi_6(\cdot)$

Определим функцию $\varphi_6(\cdot)$ в области $\Pi = [\hat{h}_1, \hat{h}_3] \times [0, T]$. Введенное ранее множество G_2 является частью границы этой области Π. Полагаем, что на множестве G_2 справедливо

$$\varphi_6(t_0, \hat{h}_3) = \varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = V(t_0, \hat{h}_3), \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial h}(t_0, \hat{h}_3) = 0. \tag{3.14}$$

Рассмотрим множество $G_6 = \{(t, h) : t = T, h \in [\hat{h}_2, \hat{h}_3]\}$, которое является частью границы области Π, где полагаем

$$\varphi_6(T, h) = V(T, h) = J(u(\cdot)) = \int\limits_{T}^{T} f(h(t; T, h, u(\cdot)) dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial h}(T, h) = 0. \tag{3.15}$$

Построим в области Π классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial t} + \mathbb{H}^Q\left(h, \frac{\partial \varphi_6}{\partial h}\right) := \frac{\partial \varphi_6}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_6}{\partial h} + f(h) + Q \frac{\partial \varphi_6}{\partial h} = 0 \tag{3.16}$$

с краевым условием, определенным формулой (3.14) на множестве G_2 и формулой (3.15) на множестве G_6. Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h + Q, \\ \dfrac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(h) \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда $(t_2, h(t_2) = \hat{h}_3) \in G_2$:

$$\begin{cases} h(t_2) = \hat{h}_3, \\ s_h(t_2) = 0, \\ z(t_2) = f(\hat{h}_3)(T - t_2), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда $(T, h(T)) \in G_6$:

$$\begin{cases} h(T) = \xi_2, \quad \xi_2 \in (\hat{h}_2, \hat{h}_3), \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек $(t_0, h_0) \in \Pi$, лежащих на графиках фазовых характеристик $(t, h(t))$ с краевыми условиями для G_2, может быть представлено как

$$\begin{cases} \bar{h}(t_0) = (\hat{h}_3 - \frac{Q}{\alpha})e^{\alpha(t_2 - t_0)} + \dfrac{Q}{\alpha}, \\ s_h^6(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_2} e^{\alpha(\tau - t_2)} f'(\bar{h}(\tau))d\tau, \\ z^6(t_0) = f(\hat{h}_3)(T - t_2) + \int\limits_{t_0}^{t_2} f(\bar{h}(\tau))d\tau, \end{cases}$$

а для точек $(t_0, h_0) \in \Pi$, лежащих на графиках фазовых характеристик $(t, h(t))$ с краевыми условиями для G_6, имеет вид

$$\begin{cases} \bar{h}(t_0) = (\xi_2 - \frac{Q}{\alpha})e^{\alpha(T - t_0)} + \dfrac{Q}{\alpha}, \\ s_h^6(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha(\tau - T)} f'(\bar{h}(\tau))d\tau, \\ z^6(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} f(\bar{h}(\tau))d\tau. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 4. Согласно методу Коши, решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.16) в подобласти области Π, покрытой графиками фазовых характеристик $(t, h(t))$ с краевыми условиями на $G_2 \cup G_6$, имеет вид

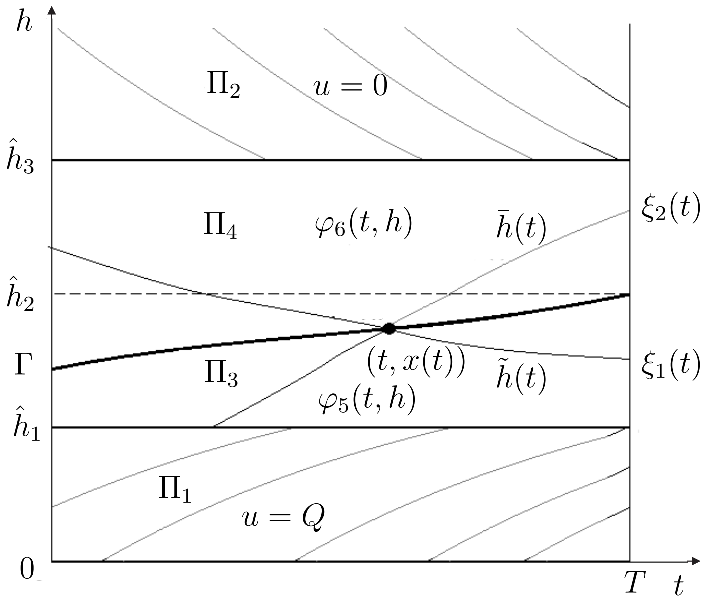
$$\varphi_6(t_0, h_0) = z^6(t_0), \quad \frac{\partial \varphi_6(t_0, h_0)}{\partial h} = s_h^6(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

Используя (1.4), получаем, что во всех точках области, где $(t, h) \in [0, T) \times [\hat{h}_2, \hat{h}_3)$, покрытой графиками фазовых характеристик $(t, h(t))$ с краевыми условиями на $G_2 \cup G_6$, справедливо $\dfrac{\partial \varphi_6(t, h)}{\partial h} = s_h^6(t) > 0$.

4. Построение функции $\varphi(\cdot)$ в области Π

Построенные функции φ_5 и φ_6 пересекаются в полосе Π. Точки, в которых значения функций совпадают, образуют линию $\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in [0, T], x(T) = \hat{h}_2\}$. Исходя из непрерывности склейки этих функций и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в работах [8, гл. 4; 9, гл. 6], мы можем утверждать, что уравнение линии склейки Γ удовлетворяет условию Ранкина — Гюгонио с краевым условием $x(T) = \hat{h}_2$ и имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mathbb{H}^Q(x, s_h^6) - \mathbb{H}^0(x, s_h^5)}{s_h^6 - s_h^5} = -\alpha x(t) + Q\frac{s_h^6}{s_h^6 - s_h^5}.$$



Рисунок

Введем на области Π функцию $\varphi(t,h)$:

$$\varphi(t,h) = \begin{cases} \varphi_5(t,h), \quad (t,h) \in \Pi_3 = [0,T) \times [\hat{h}_1, x(t)], \\ \varphi_6(t,h), \quad (t,h) \in \Pi_4 = [0,T) \times [x(t), \hat{h}_3], \\ 0, \quad t = T, h \in [\hat{h}_1, \hat{h}_3]. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для всех точек* $(t,h) \in \Pi$, *где одновременно определены* φ_5 *и* φ_6, *справедливо*

$$\varphi(t,h) = \max\{\varphi_5(t,h), \varphi_6(t,h)\}. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную точку $(t, x(t)) \in \Gamma, t < T$ (см. рисунок), где

$$\varphi_5(t, x(t)) = \varphi_6(t, x(t)), \quad x(t) = \tilde{h}(t, \xi_1(t)) = \bar{h}(t, \xi_2(t)),$$
$$\hat{h}_1 \leq \xi_1(t) < \hat{h}_2, \quad \hat{h}_2 < \xi_2(t) \leq \hat{h}_3.$$

Введем следующие функции:

$$\tilde{h}(\tau) = \tilde{h}(\tau, \xi_1(t)), \quad \omega(\tau) := \varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau)) - \varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau)), \quad \tau \in [\bar{t}, t], \quad \bar{t} = \begin{cases} t_* \geq 0, \quad \tilde{h}(t_*) = \hat{h}_3, \\ 0, \quad \tilde{h}(0) < \hat{h}_3. \end{cases}$$

Вычислим $\dfrac{d\omega(\tau)}{d(-\tau)}$, используя замечания 3,4 и формулы (3.13), (3.16):

$$\frac{d\omega(\tau)}{d(-\tau)} = -\Big[\frac{\partial\varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial\tau} - \frac{\partial\varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial\tau}\Big] - \frac{d\tilde{h}(\tau)}{d\tau}\Big[\frac{\partial\varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial h} - \frac{\partial\varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial h}\Big]$$

$$= \mathbb{H}^Q(\tilde{h}(\tau), s_h^6(\tau)) - \mathbb{H}^0(\tilde{h}(\tau), s_h^5(\tau)) - \frac{d\tilde{h}(\tau)}{d\tau}\big(s_h^6(\tau) - s_h^5(\tau)\big)$$

$$= -\alpha\tilde{h}(\tau)s_h^6(\tau) + Qs_h^6(\tau) + f(\tilde{h}(\tau)) + \alpha\tilde{h}(\tau)s_h^5(\tau) - f(\tilde{h}(\tau)) + \alpha\tilde{h}(\tau)\big(s_h^6(\tau) - s_h^5(\tau)\big) = Qs_h^6(\tau).$$

Если $x(t) \geq \hat{h}_2$, то $s_h^6(\tau) > 0$ согласно замечанию 4. Если $x(t) < \hat{h}_2$, то найдем момент времени $\tau_* < t$ такой, что $\tilde{h}(\tau_*) = \hat{h}_2$. Тогда, согласно замечанию 4 $s_h^6(\tau_*) > 0$. Для всех $\tau \in [\tau_*, t]$, $\tilde{h}(\tau) \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ справедливо $f'(\tilde{h}(\tau)) < 0$ и

$$\frac{ds_h^6(\tau)}{d\tau} = \alpha s_h^6(\tau) - f'(\tilde{h}(\tau)) > 0,$$

откуда вытекает, что $s_h^6(\tau) > 0, \tau \in [\tau_*, t]$. Таким образом, суммируя сказанное, $s_h^6(\tau) > 0$, $\tau \in [\bar{t}, t]$.

Из того, что $\omega(t) = 0$ и $\dfrac{d\omega(\tau)}{d(-\tau)} = Qs_h^6(\tau) > 0, \tau \le t$, получаем

$$\omega(\tau) = \varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau)) - \varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau)) > 0, \quad \tau \in [\bar{t}, t]. \tag{4.2}$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что для $\bar{h}(\tau) = \bar{h}(\tau, \xi_2(t))$

$$\omega(\tau) = \varphi_5(\tau, \bar{h}(\tau)) - \varphi_6(\tau, \bar{h}(\tau)) > 0, \quad \tau \in [\bar{\bar{t}}, t], \quad \bar{\bar{t}} = \begin{cases} t_* \ge 0, & \bar{h}(t_*) = \hat{h}_1, \\ 0, & \bar{h}(0) > \hat{h}_1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Подобными рассуждениями можно убедиться в справедливости неравенств (4.2) и (4.3) вдоль фазовых характеристик с краевыми условиями на G_1 и G_2 соответственно.

Таким образом, для всех точек $(\tau, h) \in \Pi$, где одновременно определены $\varphi_5(\tau, h)$ и $\varphi_6(\tau, h)$ и через которые проходит пара характеристик $\tilde{h}(\tau) = \bar{h}(\tau) = h$, справедлива формула (4.1). $\square$

Следствие 1. *Согласно лемме* 1

$$\frac{\partial\varphi(t,h)}{\partial h} = \frac{\partial\varphi_5(t,h)}{\partial h} = s_h^5(t,h) < 0, \quad (t,h) \in \Pi_3,$$

$$\frac{\partial\varphi(t,h)}{\partial h} = \frac{\partial\varphi_6(t,h)}{\partial h} = s_h^6(t,h) > 0, \quad (t,h) \in \Pi_4.$$

Следовательно в области $\Pi \backslash \Gamma$ *функция* $\varphi(t,h)$ *удовлетворяет основному уравнению* ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial\varphi(t,h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial\varphi(t,h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0,Q]} \Big(u \frac{\partial\varphi(t,h)}{\partial h} \Big) = 0,$$

а в точках кривой Γ *она субдифференцируема, причем ее субдифференциал имеет вид* [6]

$$D^-\varphi(t,h) = co \Big\{ \Big(\frac{\partial\varphi_5}{\partial t}, \frac{\partial\varphi_5}{\partial h} \Big); \Big(\frac{\partial\varphi_6}{\partial t}, \frac{\partial\varphi_6}{\partial h} \Big) \Big\}, \tag{4.4}$$

где символ со обознчает выпуклую оболочку.

Лемма 2. *Для любой точки* $(\tilde{t}, x(\tilde{t}))$ *на кривой* Γ *и для всех элементов* (s_t, s_h) *из супердифференциала* $D^-\varphi(t,h)$ *справедливо следующее неравенство:*

$$s_t - \alpha h s_h + f(h) + \max_{u \in [0,Q]} u s_h \le 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{t} \in [0, T]$. Напомним, что $\dfrac{\partial\varphi_5}{\partial h}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_h^5(\tilde{t})$ и $\dfrac{\partial\varphi_6}{\partial h}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_h^6(\tilde{t})$. Найдем $\dfrac{\partial\varphi_5}{\partial t}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_t^5(\tilde{t})$ и $\dfrac{\partial\varphi_6}{\partial t}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_t^6(\tilde{t})$ из уравнений ГЯБ (3.13), (3.16):

$$s_t^5(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t}) s_h^5(\tilde{t}) + f(x(\tilde{t})) = 0,$$

$$s_t^6(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t}) s_h^6(\tilde{t}) + f(x(\tilde{t})) + Q s_h^6(\tilde{t}) = 0.$$

Получим соответственно

$$s_t^5(\tilde{t}) = \alpha x(\tilde{t}) s_h^5(\tilde{t}) - f(x(\tilde{t})),$$

$$s_t^6(\tilde{t}) = \alpha x(\tilde{t}) s_h^6(\tilde{t}) - f(x(\tilde{t})) - Q s_h^6(\tilde{t}).$$

Согласно (4.4) для каждого элемента (s_t, s_h) из супердифференциала существует такое значение $\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1$, что справедливо

$$\lambda s_t^5(\tilde{t}) + (1-\lambda)s_t^6(\tilde{t}) = s_t, \quad \lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1-\lambda)s_h^6(\tilde{t}) = s_h.$$

Для этих элементов проверим неравенство (4.5)

$$\lambda s_t^5(\tilde{t}) + (1-\lambda)s_t^6(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t})(\lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1-\lambda)s_h^6(\tilde{t})) + f(x(\tilde{t})) + \max u(\lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1-\lambda)s_h^6(\tilde{t})). \quad (4.6)$$

Преобразуя (4.6), получим

$$-(1-\lambda)Qs_h^6 + \max_{u\in[0,Q]}(u(\lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1-\lambda)s_h^6(\tilde{t}))). \quad (4.7)$$

Учитывая, что $s_h^5(\tilde{t}) < 0$ и $s_h^6(\tilde{t}) > 0$, можно утверждать, что для всех $\lambda \in [0,1]$ выражение (4.7) будет неположительным. Значит, неравенство (4.5) выполняется. $\square$

5. Основной результат

Теорема. *Функция $\varphi(\cdot)$, имеющая вид*

$$\varphi(t,h) = \begin{cases} \varphi_1, & (t,h) \in G_1, \\ \varphi_2, & (t,h) \in G_2, \\ \varphi_3, & (t,h) \in \Pi_1, \\ \varphi_4, & (t,h) \in \Pi_2, \\ \varphi_5, & (t,h) \in \Pi_3, \\ \varphi_6, & (t,h) \in \Pi_4, \end{cases} \quad (5.1)$$

совпадает с функцией цены $V(t,h)$ в задаче (2.1), (2.2) *на всей области* Π_T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В точке $\hat{h}_1$ для любых $t \in [0,T]$ по построению справедливо

$$\varphi_3(t,\hat{h}_1) = \varphi_5(t,\hat{h}_1) = \varphi(t,\hat{h}_1), \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial h}(t,\hat{h}_1) = \frac{\partial\varphi_5}{\partial h}(t,\hat{h}_1) = 0.$$

Тогда из уравнений (3.7), (3.13) следует, что в точке $(t,\hat{h}_1)$ верно

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t,\hat{h}_1) = \frac{\partial\varphi_5}{\partial t}(t,\hat{h}_1) = 0.$$

Значит, функции $\varphi_3(\cdot), \varphi_5(\cdot)$ склеиваются гладко и для $\varphi(t,\hat{h}_1)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial\varphi(t,\hat{h}_1)}{\partial t} - \alpha h\frac{\partial\varphi(t,\hat{h}_1)}{\partial h} + f(h) + \max_{u\in[0,Q]}\left(u\frac{\partial\varphi(t,\hat{h}_1)}{\partial h}\right) = 0.$$

В точке $\hat{h}_3$ для любых $t \in [0,T]$ по построению справедливо

$$\varphi_4(t,\hat{h}_3) = \varphi_6(t,\hat{h}_3) = \varphi(t,\hat{h}_3), \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial h}(t,\hat{h}_3) = \frac{\partial\varphi_6}{\partial h}(t,\hat{h}_3) = 0.$$

Тогда из уравнений (3.10), (3.16) следует, что в точке $(t,\hat{h}_3)$ верно

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t}(t,\hat{h}_1) = \frac{\partial\varphi_6}{\partial t}(t,\hat{h}_3) = 0.$$

Значит, функции $\varphi_4(\cdot), \varphi_6(\cdot)$ склеиваются гладко и для $\varphi(t, \hat{h}_3)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_3)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_3)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0,Q]} \left(u \frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_3)}{\partial h} \right) = 0.$$

Функции $\varphi_5(t,h)$ и $\varphi_6(t,h)$ равны на Γ, но градиенты этих функций не совпадают на Γ, отсюда следует, что эти функции склеиваются не гладко на кривой Γ.

Из замечаний 1, 2 и следствия 1 вытекает, что функция $\varphi(t,h)$ вида (5.1) непрерывно дифференцируема в области $(t,h) \in \Pi_T \setminus \Gamma$ и удовлетворяет основному уравнению ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial \varphi(t,h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi(t,h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0,Q]} \left(u \frac{\partial \varphi(t,h)}{\partial h} \right) = 0, \tag{5.2}$$

а в точках $(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \in \Gamma$ согласно лемме 2 она субдифференцируема и все элементы из субдифференциала удовлетворяют неравенству (2.4)

$$s_t(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t}) s_h(\tilde{t}) + f(x(\tilde{t})) + \max_{u \in [0,Q]} u s_h(\tilde{t}) \leq 0.$$

Тогда согласно теории минимаксных решений [6;9] построенная функция $\varphi(t,h)$ является единственным минимаксным решением уравнения (5.2) с краевым условием $\varphi(T,h) = 0$ и совпадает с функцией цены $V(t,h)$ в задаче (2.1), (2.2), что и требовалось доказать. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чумерина Е.С.** Синтез оптимального управления в математических моделях химиотерапии опухоли, растущей по закону Гомперца и логистическому закону: дис. ... канд. физ.-мат. наук / МИИТ. Москва, 2009.
2. **Братусь А.С.,Чумерина Е.С.** Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, вып. 6. С. 946–966.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.:Наука, 1961. 392 с.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 336 p.
7. Crandall, M.G., Evans, L.C., Lions, P.-L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282., no 2. P. 487–502.
8. **Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.** Уравнения с частными производными первого порядка: уч. пос. Москва: Изд-во МГУ им. Ломоносова, 1999. 96 с.
9. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во РИО УрО РАН, 2013. 244 с.

Субботина Нина Николаевна
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
профессор
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: subb@uran.ru

Поступила 2.09.2017

Новоселова Наталья Геннадьевна
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
магистрант
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург,
e-mail: n.g.novoselova@gmail.com

REFERENCES

1. Chumerina E.S. *Synthesis of optimal control in mathematical models of chemotherapy of a tumor growing according to Gompertz law and logistic law.* Cand. Phys.-Math. Sci. Dissertation. Moscow, MIIT Publ., 2009 (in Russian).
2. Bratus' A.S., Chumerina E.S. Optimal control synthesis in therapy of solid tumor growth. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 6, pp. 892–911. doi: 10.1134/S096554250806002X .
3. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya Teoriya Optimal'nykh Protsessov*, Moscow, Nauka Publ., 1961, 392 p.
4. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer. 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective.* Basel, Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.
7. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
8. Goritsky A.Yu., Kruzhkov S.N., Chechkin G.A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka: Uchebnoe posobie* [Partial differential equations of the first order: Textbook]. Moscow, Moscow State University Publ., 1999. 96 p.
9. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniya Gamil'tona-Yakobi-Bellmana* [The method of characteristics for Hamilton-Jacobi-Bellman equations]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2013, 244 p.

The paper was received by the Editorial Office on September 2, 2017.

Nina Nikolaevna Subbotina, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: subb@uran.ru .

Natal'ja Gennad'evna Novoselova, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: n.g.novoselova@gmail.com .