ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ МЕТАНИЛЬПОТЕНТНОСТИ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

В. С. Монахов

Через $|x|$ обозначим порядок элемента x в группе. Примарным называют элемент группы, порядок которого есть целая неотрицательная степень некоторого простого числа. Если a и b — примарные элементы взаимно простых порядков группы, то коммутатор $a^{-1}b^{-1}ab$ называется $\star$-коммутатором. Пересечение всех нормальных подгрупп группы, фактор-группы по которым нильпотентны, называется нильпотентным корадикалом группы. Устанавливается, что нильпотентный корадикал конечной группы порождается коммутаторами примарных элементов взаимно простых порядков. Доказывается, что нильпотентный корадикал конечной разрешимой группы нильпотентен тогда и только тогда, когда $|ab| \geq |a||b|$ для любых $\star$-коммутаторов a и b взаимно простых порядков.

Ключевые слова: конечная группа, формация, корадикал, нильпотентная группа, коммутатор.

V. S. Monakhov. A metanilpotency criterion for a finite solvable group.

Denote by $|x|$ the order of an element x of a group. An element of a group is called primary if its order is a nonnegative integer power of a prime. If a and b are primary elements of coprime orders of a group, then the commutator $a^{-1}b^{-1}ab$ is called a $\star$-commutator. The intersection of all normal subgroups of a group such that the quotient groups by them are nilpotent is called the nilpotent residual of the group. It is established that the nilpotent residual of a finite group is generated by commutators of primary elements of coprime orders. It is proved that the nilpotent residual of a finite solvable group is nilpotent if and only if $|ab| \geq |a||b|$ for any $\star$-commutators of a and b of coprime orders.

Keywords: finite group, formation, residual, nilpotent group, commutator.

MSC: 20D15, 20F12, 20F17

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-253-256

Введение

Используемая терминология и обозначения стандартны и соответствуют [1]. Группа G называется метанильпотентной, если в ней имеется нильпотентная нормальная подгруппа K такая, что фактор-группа G/K нильпотентна. Через $|x|$ обозначается порядок элемента x в группе. Примарным называют элемент, порядок которого есть целая неотрицательная степень некоторого простого числа.

Развивая результат Бастоса и Шумяцкого [2], автор в [3, Theorem 2.2] получил следующий критерий нильпотетности коммутанта конечной группы: *коммутант конечной группы G тогда и только тогда является нильпотентной группой, когда $|ab| \geq |a||b|$ для любых примарных коммутаторов a и b взаимно простых порядков группы G.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — конечная группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Из свойств коммутанта следует, что он является $\mathfrak{A}$-корадикалом группы, где $\mathfrak{A}$ — формация всех абелевых групп. Для формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ называют нильпотентным корадикалом группы G. Для его характеризации введем следующее определение.

Если a и b — примарные элементы взаимно простых порядков группы, то коммутатор $[a, b]$ назовем $\star$-*коммутатором.*

В настоящей статье доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Нильпотентный корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ конечной группы G порождается всеми $\star$-коммутаторами группы G.*

Теорема 2. *Конечная разрешимая группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда $|ab| \geq |a||b|$ для любых $\star$-коммутаторов a и b группы G взаимно простых порядков.*

1. Используемые определения и результаты

Запись $X \leq Y$ означает, что X является подгруппой группы Y; если X нормальна в Y, то пишем $X \trianglelefteq Y$. Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A записывается через $A \rtimes B$. Символ $\square$ означает окончание доказательства.

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [4]. Обзор результатов о группах Шмидта и перспективы их приложений в теории групп содержится в [5].

Лемма. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $S = P \rtimes \langle y \rangle$, *где P — нормальная силовская p-подгруппа, а $\langle y \rangle$ — ненормальная силовская q-подгруппа в S, $y^q \in Z(S)$, p и q — различные простые числа*;

(2) $P/\Phi(P)$ — *минимальная нормальная в $G/\Phi(P)$ подгруппа, $\Phi(P) = P' \leq Z(G)$*;

(3) $G' = G^{\mathfrak{N}} = P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения (1) и (2) получены в [4]. Равенство $G' = P$ установил С. А. Чунихин [6]. Поскольку $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$, то $G^{\mathfrak{N}} \subseteq G' \subseteq P$. Предположим, что $G^{\mathfrak{N}} < P$. Тогда

$$G^{\mathfrak{N}}\Phi(P)/\Phi(P) < P/\Phi(P), \quad G^{\mathfrak{N}}\Phi(P)/\Phi(P) \lhd G/\Phi(P).$$

Из утверждения (2) следует, что $G^{\mathfrak{N}} \leq \Phi(P) \leq Z(G)$. Так как $G/G^{\mathfrak{N}}$ нильпотентна, то G нильпотентна, противоречие. Поэтому предположение неверно и $G^{\mathfrak{N}} = P$. $\square$

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственные формации, то их произведение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{\, G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\}$$

согласно [7, с. 337] является наследственной формацией. Здесь $\mathfrak{E}$ — класс всех конечных групп. Класс всех метанильпотентных групп совпадает с произведением $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^2$.

Совокупность всех примарных элементов группы G обозначим через $A(G)$. Для подгрупп A и B группы G положим $\big[A, B\big] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B\rangle$. Подгруппу $\big[A, B\big]$ называют *взаимным коммутантом подгрупп* A и B.

2. Доказательство теоремы 1

Фактически надо доказать равенство

$$G^{\mathfrak{N}} = \langle [x, y] \mid x, y \in A(G),\ (|x|, |y|) = 1\rangle.$$

Пусть $W = \langle [x, y] \mid x, y \in A(G),\ (|x|, |y|) = 1\rangle$. Ясно, что подгруппа W нормальна в G. Так как $G/G^{\mathfrak{N}}$ нильпотентна, то для любых $x, y \in A(G)$ таких, что $(|x|, |y|) = 1$, получаем

$$1 = [xG^{\mathfrak{N}}, yG^{\mathfrak{N}}] = [x, y]G^{\mathfrak{N}},\ [x, y] \in G^{\mathfrak{N}},$$

поэтому $W \leq G^{\mathfrak{N}}$. Проверим обратное включение. Пусть P и Q — силовские p- и q-подгруппы группы G, $p \neq q$. Тогда PW/W и QW/W — силовские p- и q-подгруппы фактор-группы G/W соответственно, $[P, Q] \leq W$ и $[P, Q] \trianglelefteq \langle P \cup Q\rangle$ по [1, IV.1.6]. Если $x \in P$, $y \in Q$, $w \in W$, то

$$(xy)w = yx[x, y]w \in QPW,\ PQW \leq QPW.$$

Аналогично, $QPW \leq PQW$, поэтому PQW — подгруппа группы G. Так как $[P, Q] \leq W$, то PQW/W — нильпотентная подгруппа группы G/W. Поскольку P и Q — произвольные силовские подгруппы, то G/W нильпотентна и $G^{\mathfrak{N}} \leq W$. Следовательно, $G^{\mathfrak{N}} = W$. $\square$

3. Доказательство теоремы 2

Пусть конечная группа G метанильпотентна, a и b — $\star$-коммутаторы группы G взаимно простых порядков. Согласно теореме 1 элементы a и b принадлежат $G^{\mathfrak{N}}$. Так как $G^{\mathfrak{N}}$ нильпотентна и элементы a и b имеют взаимно простые порядки, то $ab = ba$, поэтому $|ab| = |a||b|$.

Обратно, пусть в конечной разрешимой группе G для любых $\star$-коммутаторов a и b взаимно простых порядков выполняется неравенство $|ab| \geq |a||b|$. Докажем, что подгруппа $G^{\mathfrak{N}}$ нильпотентна. Предположим противное и пусть G — контрпример наименьшего порядка. По индукции все собственные подгруппы группы G имеют нильпотентный $\mathfrak{N}$-корадикал, поэтому G — разрешимая минимальная не $\mathfrak{N}^2$-группа. Согласно [8, Proposition 1] $G^{\mathfrak{N}^2} := Q$ есть q-группа класса не выше 2 для простого числа q, и G/Q есть группа Шмидта. Пусть L — минимальное добавление к подгруппе Q в G. Тогда $Q \cap L \leq \Phi(L)$ по [7, A.9.2] и $G^{\mathfrak{N}}Q = L^{\mathfrak{N}}Q$ по [7, IV.1.17]. Фактор-группа $\overline{G} = G/Q = \overline{P} \rtimes \langle \overline{y} \rangle$ является группой Шмидта, где $\overline{P}$ — силовская p-подгруппа в $\overline{G}$, $p \neq q$, а $\langle \overline{y} \rangle$ — циклическая r-подгруппа для простых чисел p и r, $r \neq p \neq q$, см. п. (1) леммы. Здесь случай $r = q$ не исключается. Из п. (3) леммы следует, что $\overline{G}^{\mathfrak{N}} = \overline{P}$. По [7, IV.1.17]

$$\overline{P} = \overline{G}^{\mathfrak{N}} = (G/Q)^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}Q/Q = L^{\mathfrak{N}}Q/Q,$$

поэтому порядок $L^{\mathfrak{N}}$ делится на порядок силовской p-подгруппы группы G. Поскольку L — p-замкнутая подгруппа по [7, A.9.2], то $L^{\mathfrak{N}} = P$ для некоторой силовской p-подгруппы P из группы G. Теперь по теореме 1 подгруппа P порождается $\star$-коммутаторами группы L.

Пусть $x \in P$, x — $\star$-коммутатор, y — произвольный элемент из Q. Так как $[x, y] \in Q$, то $[x, y]$ является $\star$-коммутатором и порядок $[x, y]$ взаимно прост с порядком x. По условию $|x[x, y]| \geq |x||[x, y]|$. Поскольку $x[x, y] = y^{-1}xy$, то $|x[x, y]| = |x|$. Теперь $[x, y] = 1$ и $x \in C_G(H)$. Это верно для любого $\star$-коммутатора из P, значит, $QP = Q \times P$ и группа G метанильпотентна. □

В связи с теоремой 2 вполне естественно возникает следующий вопрос: *будет ли разрешимой конечная группа G, если $|ab| \geq |a||b|$ для любых $\star$-коммутаторов a и b группы G взаимно простых порядков?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin etc.: Springer, 1967. 793 s.
2. **Бастон Р., Шумяцкий П.** Достаточное условие нильпотентности коммутанта // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 978–980.
3. **Monakhov V.S.** The nilpotency criterion for the derived subgroup of a finite group // Проблемы физики, математики и техники. 2017, № 3(32). P. 58–60.
4. **Шмидт О. Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. P. 366–372.
5. **Монахов В. С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса. Секция 1. 2001. Киев: Изд-во Института математики, 2002. P. 81–90.
6. **Чунихин С. А.** О специальных группах // Мат. сб. 1929. Т. 4, № 3. P. 512–530.
7. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin, N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8 .
8. **Beidleman J., Heineken H.** Minimal non-$\mathfrak{F}$-groups // Ricerche Mat. 2009. Vol. 58. P. 33–41.

Монахов Виктор Степанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры алгебры и геометрии
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Поступила 30.08.2017

REFERENCES

1. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin etc.: Springer, 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
2. Bastos R., Shumyatsky P. A sufficient condition for nilpotency of the commutator subgroup. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 762–763. doi: 10.1134/S0037446616050037 .
3. Monakhov V.S. The nilpotency criterion for the derived subgroup of a finite group [e-resource]. 2017. Preprint available at https://arxiv.org/abs/1704.01746 .
4. Schmidt O.Yu. Groups whose all subgroups are special. *Mat.Sb.*, 1924, vol. 31, pp. 366–372.
5. Monakhov V.S. *Podgruppy Shmidta, ikh sushchestvovanie i nekotorye prilozheniya* [The Schmidt subgroups, its existence, and some of their applications]. Tr. Ukrain. Mat. Congr., Kiev, 2002, Section 1, pp. 81–90.
6. Tschunichin S. Über spezielle Gruppen. *Mat. Sb.*, 1929, vol. 36, no. 2, pp. 135–137 (in Russian).
7. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin, N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8 .
8. Beidleman J., Heineken H. Minimal non-$\mathfrak{F}$-groups. *Ricerche Mat.*, 2009, vol. 58, no. 1, pp. 33-41. doi: 10.1007/s11587-009-0044-2 .

The paper was received by the Editorial Office on August 30, 2017.

Viktor Stepanovich Monakhov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: victor.monakhov@gmail.com .