ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 519.177+517.545

О ТЕОРЕМАХ ОИКАВЫ И АРАКАВЫ ДЛЯ ГРАФОВ[1]

А. Д. Медных, И. А. Медных, Р. Неделя

Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию дискретной теории римановых поверхностей, начатой в начале века в работах М. Бейкера и С. Норина и их последователей. Аналогами римановых поверхностей в этой теории выступают конечные графы, а роль голоморфных отображений играют их разветвленные накрытия. Родом графа назовем ранг его фундаментальной группы. Главным объектом исследования статьи являются группы автоморфизмов графов, действующие без неподвижных точек на множестве полуребер графа. Они представляют из себя дискретные аналоги групп конформных автоморфизмов римановой поверхности. Знаменитая теорема Гурвица (1893) утверждает, что компактная риманова поверхность рода $g > 1$ не может иметь более чем $84(g-1)$ автоморфизмов. Полученные позже теоремы К. Оикавы и Т. Аракавы уточняют эту оценку для групп, оставляющих инвариантными несколько конечных подмножеств заданной мощности. Основное содержание этой публикации состоит в доказательстве дискретных версий указанных теорем. Получен также дискретный аналог теоремы Э. Бухансе и Г. Громадски, улучшающей один из результов Аракавы.

Ключевые слова: риманова поверхность, формула Римана — Гурвица, граф, группа автоморфизмов, гармоническое отображение.

A. D. Mednykh, I. A. Mednykh, R. Nedelya. On the Oikawa and Arakawa theorems for graphs.

The present paper is devoted to the further development of the discrete theory of Riemann surfaces, which was started in the papers by M. Baker and S. Norine at the beginning of the century. This theory considers finite graphs as analogs of compact Riemann surfaces and branched coverings of graphs as holomorphic maps. The genus of a graph is defined as the rank of its fundamental group. The main object of investigation in the paper is automorphism groups of a graph acting freely on the set of arcs. These groups are discrete analogs of groups of conformal automorphisms of a Riemann surface. The celebrated Hurwitz theorem (1893) states that the order of the group of conformal automorphisms of a compact Riemann surface of genus $g > 1$ does not exceed $84(g-1)$. Later, K. Oikawa and T. Arakawa refined this bound in the case of groups that fix several finite sets of prescribed cardinalities. This paper provides proofs of discrete versions of the mentioned theorems. In addition, a graph-theoretic version of the E. Bujalance and G. Gromadzki result improving the Arakawa theorem is obtained.

Keywords: Riemann surface, Riemann–Hurwitz formula, graph, automorphism group, harmonic map.

MSC: 05C10, 57M12

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-243-252

Посвящается 70-летию нашего друга
и коллеги академика С. В. Матвеева

Введение

В последнее десятилетие появилось значительное количество работ, посвященных дискретной теории римановых поверхностей. В качестве дискретных аналогов римановых поверхностей в этой теории выступают конечные графы, а роль голоморфных отображений играют их разветвленные накрытия. Для графов установлены различные версии формулы Римана —

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-07906 и 16-31-00138). Исследования Р. Недели частично поддержаны проектом L01506 Министерства Образования, Молодежи и Спорта Чешской Республики и проектом P202/12/G061 Чешского Научного Фонда (The research of R. Nedela was partially supported by the project L01506 of the Czech Ministry of Education, Youth and Sports and by the project P202/12/G061 of Czech Science Foundation).

Гурвица [1–4] и доказаны аналоги теоремы Римана — Роха [1]. Многие другие теоремы классической теории римановых поверхностей также были перенесены на дискретный случай. В частности, в работе [2] установлены оценки порядка группы, действующей гармонично (то есть без неподвижных полуребер) на графе заданного рода. Этот результат можно рассматривать как дискретный аналог известной теоремы Гурвица [5], дающей точную верхнюю оценку порядка группы автоморфизмов римановой поверхности через ее род. Напомним, что классическая оценка Гурвица имеет вид $|\mathrm{Aut(S_g)}| \leq 84(\mathrm{g}-1)$, где S_g — произвольная риманова поверхность рода $g > 1$, а $\mathrm{Aut(S_g)}$ — группа ее конформных автоморфизмов. В работах [6–9] установлены дискретные версии теорем Фаркаша и Акколы, описывающих свойства разветвленных накрытий с заданными симметриями. В работе [10] получена точная верхняя оценка порядка циклической группы, действующей гармонично на графе рода, большего единицы.

В данной работе изучаются порядки групп автоморфизмов, действующих гармонично на графе заданного рода. *Графом* называется связный конечный мультиграф без петель. *Родом* графа будем называть ранг его фундаментальной группы.

Цель настоящей работы — установить дискретные версии теорем К. Оикавы [11] и Т. Аракавы [12], уточняющих верхнюю оценку Гурвица для различных классов групп, действующих на римановой поверхности заданного рода. Также будет получена дискретная версия теоремы Э. Бухалансе и Г. Громадски [13], улучшающая одну из теорем Аракавы в ряде частных случаев. Часть результатов настоящей статьи была предварительно анонсирована в работе авторов [14].

1. Предварительные сведения

Обозначим через $V(X)$ и $E(X)$ множества вершин и ребер графа X соответственно. Пусть X' — барицентрическое подразбиение графа X. Рассмотрим X' как двудольный граф с белыми вершинами в серединах ребер графа X и черными в вершинах графа X. Для геометрической наглядности отождествим множество ребер $E(X')$ с множеством полуребер $D(X)$ графа X. Таким образом, полуребро графа X — это ребро графа X' (всякое ребро этого графа имеет одну белую и одну черную вершину). Существует естественное взаимнооднозначное соответствие между полуребрами и ориентироваными ребрами графа X. Отметим, что каждый автоморфизм графа X однозначно продолжается до автоморфизма графа X'.

Пусть X и Y — графы. Отображение $\phi : V(X) \cup E(X) \to V(Y) \cup E(Y)$ называется *морфизмом X в Y*, если $\phi(V(X)) \subseteq V(Y)$, а для любых $x \in V(X)$ и $e \in E(X)$ таких, что x инцидентна e, имеем: $\phi(x)$ инцидентна $\phi(e)$. Для краткости в этом случае будем писать $\phi : X \to Y$. Далее, биективный морфизм ϕ называется *изоморфизмом*, а изоморфизм $\phi : X \to X$ называется *автоморфизмом.*

Основным в данной работе является следующее определение. Морфизм $\phi : X \to Y$ называется *гармоническим отображением* (или *разветвленным накрытием*), если для всех $x \in V(X)$ и всех $y \in V(Y)$ таких, что $y = \phi(x)$, величина $|\{e \in E(X) : x \in e,\ \phi(e) = e'\}|$ одна и та же для всех ребер $e' \in E(Y)$, инцидентных y. Это определение с незначительными модификациями было введено ранее в [1].

Мы говорим, что группа автоморфизмов G графа X действует на нем *гармонично*, если она действует свободно (то есть всякий ее нееденичный элемент действует без неподвижных точек) на множестве его полуребер $D(X)$. Эквивалентно, G действует свободно на множестве ребер двудольного графа X', сохраняя окраску его вершин. Заметим, что в этом случае фактор-множество X'/G — корректно определенный двудольный граф. При этом каноническое отображение $X' \to X'/G$ переводит вершины и ребра графа X' соответственно в вершины и ребра графа X'/G и является гармоническим отображением в указанном выше смысле. Ребро $e = \{x, \bar{x}\}$, состоящее из полуребер x и $\bar{x}$, называется *обратимым*, если существует элемент группы G, переводящий x в $\bar{x}$, а $\bar{x}$ в x. Отметим,что образ обратимого ребра графа X в X'/G — это ребро с белой вершиной валентности один. Определим фактор-граф X/G как граф, полученный из X'/G удалением его белых двухвалентных вершин. При этом образами обратимых ребер будут ребра с белыми вершинами валентности один. Мы будем их называть полуребрами графа X/G. Детальное изложение теории графов с полуребрами приводится в [15].

Пусть G — конечная группа, действующая гармонично на графе X. Заменяя, если потребуется, граф X на его барицентрическое подразбиение X', в дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что G действует на X без обратимых ребер. Обозначим через φ каноническую проекцию графа X на фактор-граф X/G. Для вершины $\tilde{v} \in V(X)$ обозначим через $G_{\tilde{v}}$ стабилизатор вершины $\tilde{v}$ в группе G. Каждой вершине v фактор-графа X/G припишем величину $m_v = |G_{\tilde{v}}|$. Поскольку G действует транзитивно на каждом слое отображения φ, числа m_v определены корректно. Пусть $m_1, \dots m_r$, где $2 \le m_1 \le \dots \le m_r$, — все отличные от 1 элементы множества $\{m_v\}_{v \in V(X/G)}$. Обозначим через γ род фактор-графа X/G и назовем набор чисел $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$ *сигнатурой* фактор-графа X/G. В то же время пару $(\gamma; \{m_v\}_{v \in V(X/G)})$ будем называть *полной сигнатурой* фактор-графа X/G.

Нам потребуется следующая версия формулы Римана — Гурвица, доказательство которой можно найти в [1; 3; 4]:

Пусть G — конечная группа, действующая гармонично на графе X рода g. Тогда справедлива формула

$$g - 1 = |G|(\gamma - 1 + \sum_{v \in V(X/G)} (1 - 1/m_v)), \tag{1}$$

где $(\gamma; \{m_v\}_{v \in V(X/G)})$ — полная сигнатура фактор-графа X/G.

2. Основные результаты

2.1. Теорема Оикавы

В 1956 г. Котаро Оикава [11] предложил следующее уточнение верхней оценки Гурвица. Пусть G — группа конформных автоморфизмов римановой поверхности рода g, оставляющая инвариантным конечное множество A, состоящее из $|A| = k \ge 1$ элементов. Предположим, что выполнено неравенство $2g-2+k > 0$, тогда справедлива следующая оценка порядка группы G: $|G| \le 12(g-1) + 6k$. Оценка точная и достигается для бесконечного числа пар (g, k).

Основным результатом настоящего раздела является следующая теорема, представляющая дискретную версию теоремы Оикавы для графов. Она уточняет полученную ранее авторами теорему 3 из работы [14].

Теорема 1. *Пусть X — граф рода g, а G — группа его автоморфизмов, действующая на нем гармонично. Предположим, что G оставляет инвариантным подмножество A вершин графа X, состоящее из $s \ge 1$ элементов. Тогда $|G| \le 2(g-1) + 2s$.*

Полученная оценка точна и достигается для $s = 2$ и любого $g \ge 0$.

Доказательство. Нам потребуются следующий результат, установленный в [14, предложение 2]:

Пусть G — конечная группа, действующая гармонично на графе X рода g. Обозначим через A непустое G-инвариантное подмножество вершин графа X. Положим $s = |A|$ и $p = |A/G|$. Тогда справедлива формула

$$g - 1 + s = |G|\Big(\gamma - 1 + \sum_{v \in V(X/G) - A/G} \big(1 - \frac{1}{m_v}\big) + p\Big), \tag{2}$$

где $(\gamma; \{m_v\}_{v \in V(X/G)})$ — полная сигнатура фактор-графа X/G.

Рассмотрим все вершины $v \in V(X/G) - A/G$, для которых $m_v > 1$. Предположим, что имеется ровно $r \ge 0$ таких вершин. А именно, $v_1, v_2, \dots, v_r$. Положим $m_i = m_{v_i}$, $i = 1, \dots, r$.

Согласно (2) имеем
$$g-1+s=|G|\Big(\gamma-1+\sum_{i=1}^{r}\big(1-\frac{1}{m_i}\big)+p\Big).$$

Из условия теоремы следует, что
$$S=\gamma-1+\sum_{i=1}^{r}\big(1-\frac{1}{m_i}\big)+p>0.$$

Поскольку $|G|=(g-1+s)/S$, максимум величины $|G|$ достигается при минимуме величины S, при условии $S>0$. Рассмотрим два возможных случая.

1°. $\gamma\geq 1, p\geq 1$. Тогда $S\geq 0+0+p\geq 1$ и минимум величины $S=1$ достигается при $\gamma=1$, $p=1$, $r=0$. В этом случае X является регулярным накрытием графа рода 1, разветвленным над одной точкой.

2°. $\gamma=0$, $p\geq 1$. Тогда $S\geq\sum\limits_{i=1}^{r}\big(1-\dfrac{1}{m_i}\big)\geq\dfrac{1}{2}$. Минимум величины $S=\dfrac{1}{2}$ достигается при $\gamma=0$, $p=1$, $r=1$ и $m_1=2$. Здесь X — регулярное накрытие дерева, разветвленное над двумя точками с порядками ветвления 2 и $|G|/s$. Следовательно, $S\geq\dfrac{1}{2}$ и $|G|=(g-1+s)/S\leq 2(g-1)+2s$.

Точность полученной оценки следует из рассмотрения примера 1, приведенного ниже. Более точно, равенство $|G|=2(g+s-1)$ достигается при $s=2$ для группы $G=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{g+1}$, действующей гармонично на графе $X=K_{2,g+1}$ по правилу, описанному в указанном примере. □

2.2. Теоремы Аракавы

Т. Аракава [12] доказал две теоремы, обобщающие теорему Оикавы на случай двух и трех инвариантных подмножеств. Первая из них утверждает, что порядок конечной группы G конформных автоморфизмов римановой поверхности X рода $g>1$, имеющей непересекающиеся инвариантные подмножества A и B такие, что $|A|\geq|B|\geq 1$, удовлетворяет неравенству $|G|\leq 8(g-1)+|A|+4|B|$. Вторая теорема устанавливает, что для трех G-инвариантных непересекающихся подмножеств A, B, C поверхности X таких, что $|A|\geq|B|\geq|C|\geq 1$, справедлива оценка порядка группы G: $|G|\leq 2(g-1)+|A|+|B|+|C|$. В работе Э. Бухалансе и Г. Грамадски [13] приведена более тонкая формулировка первой теоремы Аракавы в случае, когда мощности множеств A и B строго меньше $|G|$.

В данном разделе будут доказаны дискретные версии двух теорем Аракавы [12] и установлен дискретный аналог теоремы 3.2 из [13].

Пусть G — конечная группа, действующая на некотором множестве X. *Орбитой* группы G называется множество вида $\{g(x),\ g\in G\}$, где x – фиксированный элемент X. Орбита называется *собственной*, если ее порядок строго меньше $|G|$. Любое G-инвариантное подмножество X представляется как дизъюнктное объединение орбит группы G (не обязательно собственных).

Следующее утверждение переносит результаты первой теоремы Аракавы на графы и обобщает теорему 4 из работы авторов [14].

Теорема 2. *Пусть X — граф рода $g\geq 2$, а A и B — два непересекающиеся подмножества вершин X, мощности которых удовлетворяют неравенствам $|A|\geq|B|\geq 1$. Предположим, что конечная группа G действует гармонично на X и оставляет множества A и B инвариантными. Тогда имеет место неравенство $|G|\leq\dfrac{1}{2}(s(g-1)+t|A|+u|B|)$, справедливое для любого набора чисел s,t,u, удовлетворяющих соотношениям $u\geq s\geq 3, 2\geq t\geq 0$ и $s+t\geq 4$.*

В случае $u=s$ и $s+t=4$ полученная оценка является точной и достигается для любого рода g.

Доказательство. Рассмотрим сигнатуру $(\gamma; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ фактор-графа X/G. Здесь $\gamma \geq 0$, $r \geq 0$ и $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_r$. Тогда, по формуле Римана — Гурвица $|G| = (g-1)/S$, где $S = \gamma - 1 + \sum_{i=1}^{r} \bigl(1 - \dfrac{1}{m_i}\bigr)$.

По предположению теоремы мы имеем $g - 1 > 0$ и $|G| \geq 1$. Следовательно, $S > 0$. Поэтому для нахождения верхней границы $|G|$ достаточно найти нижнюю границу S при условии $S > 0$. В следующих трех случаях нижняя оценка на S находится относительно легко.

1°. $\gamma \geq 2$. Тогда $S \geq 1 + 0 \geq 1$, и минимальное значение $S = 1$ достигается при $\gamma = 2$, $r = 0$. Поскольку $u \geq s \geq 2$, а t неотрицательно, имеем

$$|G| = \frac{(g-1)}{S} \leq g - 1 < \frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|).$$

2°. $\gamma = 1$, $r \geq 2$. В этом случае $S \geq \sum_{i=1}^{r} \bigl(1 - \dfrac{1}{m_i}\bigr) \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. Минимум $S = 1$ достигается при $\gamma = 1$, $r = 2$, $m_1 = m_2 = 2$. Аналогично предыдущему получим $|G| \leq g - 1 < \dfrac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|)$.

3°. $\gamma = 0$, $r \geq 4$. Здесь $S \geq -1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. По–прежнему, $|G| < \dfrac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|)$.

В вышеуказанных трех случаях утверждение теоремы справедливо. Для рассмотрения оставшихся случаев нам потребуется следующая лемма, приведенная в работе [14] без доказательства.

Лемма. *Пусть фактор-граф X/G имеет сигнатуру $(\gamma; m_1, m_2, \ldots, m_r)$. Тогда $|G| \leq \dfrac{3}{2}(g-1)$ за исключением следующих случаев*:

(i) $\gamma = 1$, $r = 1$, $m_1 = 2$;
(ii) $\gamma = 0$, $r = 3$, $(m_1, m_2, m_3) = (2, 2, 2)$;
(iii) $\gamma = 0$, $r = 2$, $(m_1, m_2) = (5, m)$, $m \geq 5$;
(iv) $\gamma = 0$, $r = 2$, $(m_1, m_2) = (4, m)$, $m \geq 4$;
(v) $\gamma = 0$, $r = 2$, $(m_1, m_2) = (3, m)$, $m \geq 3$;
(vi) $\gamma = 0$, $r = 2$, $(m_1, m_2) = (2, m)$, $m \geq 3$.

Доказательство. (i) Пусть $\gamma = 1$. В силу 2° мы можем считать, что $r = 1$. Случай $r = 0$ невозможен в силу неравенства $g \geq 2$. Пусть теперь $m_1 \geq 3$. Тогда $S \geq 0 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$. Отсюда $|G| \leq \dfrac{3}{2}(g-1)$.

В оставшихся случаях (ii)–(vi) мы имеем $\gamma = 0$. При этом $r \geq 2$, иначе $S < 0$. Предположим, что $r \geq 4$. Тогда $S \geq -1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ и $|G| \leq (g-1) < \dfrac{3}{2}(g-1)$.

(ii) Пусть $r = 3$ и $m_3 \geq 3$. Тогда $S \geq -1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$ и $|G| \leq \dfrac{3}{2}(g-1)$. Поскольку $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$, остается ровно один случай $(m_1, m_2, m_3) = (2, 2, 2)$.

В заключение рассмотрим случай $\gamma = 0$ и $r = 2$. Тогда

$$S = -1 + \sum_{i=1}^{2} \bigl(1 - \frac{1}{m_i}\bigr) = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}.$$

Если $m_1 \geq 6$, то в силу $m_2 \geq m_1$ имеем $S \geq -1 + \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{3}$. В результате получаем $|G| \leq \dfrac{3}{2}(g-1)$. Поэтому исключительными случаями будут (iii)–(vi). $\square$

Продолжим доказательство теоремы 2. Для его завершения достаточно рассмотреть случаи (i)–(vi). Иначе, в силу условий $u \geq s \geq 3$ и $t \geq 0$ имеем

$$|G| \leq \frac{3}{2}(g-1) < \frac{1}{2}(s(g-1)+t|A|+u|B|).$$

Покажем, что теорема справедлива в каждом из указанных случаев.

(i) Здесь $|G| = 2(g-1)$. По предположению множества A и B состоят из попарно непересекающихся орбит группы G, образованных вершинами графа X. Поскольку $r = 1$ и $m_1 = 2$, существует единственная орбита длины $g-1$, а остальные орбиты имеют длину $2(g-1)$. Напомним, что $|A| \geq |B|$. Поэтому $|A| \geq 2(g-1)$ и $|B| \geq g-1$. Отсюда

$$\frac{1}{2}\big(s(g-1)+t|A|+u|B|\big) \geq \frac{1}{2}\big(s(g-1)+2t(g-1)+u(g-1)\big)$$

$$\geq \frac{1}{2}\big(3(g-1)+0(g-1)+3(g-1)\big) > 2(g-1) = |G|,$$

и утверждение теоремы доказано.

(ii) В этом случае $|G| = 2(g-1)$. Поскольку $(m_1, m_2, m_3) = (2,2,2)$, длины двух минимальных орбит группы G равны $g-1$. Следовательно, $|A| \geq g-1$, $|B| \geq g-1$ и $\frac{1}{2}(s(g-1)+t|A|+u|B|) \geq \frac{3+0+3}{2}(g-1) > |G|$.

(iii)–(vi) В указанных случаях по формуле Римана — Гурвица (1) получим

$$g-1 = \Big(1-\frac{1}{j}-\frac{1}{m}\Big)|G|,$$

где $j = 2,3,4,5$ и $m \geq j$ за исключением случая $j = 2$, где $m \geq 3$. Длины двух наименьших орбит группы G равны $|G|/m$ и $|G|/j$. Отсюда $|A| \geq |G|/j$ и $|B| \geq |G|/m$. Тогда последовательно учитывая, что $u-s \geq 0$, $s \geq 4-t$, $2-t \geq 0$ и $j \geq 2$, имеем

$$\frac{1}{2}(s(g-1)+t|A|+u|B|) \geq \frac{1}{2}\Big(s\big(1-\frac{1}{j}-\frac{1}{m}\big)+\frac{t}{j}+\frac{u}{m}\Big)|G|$$

$$= \frac{1}{2}\Big(s\big(1-\frac{1}{j}\big)+\frac{t}{j}+\frac{u-s}{m}\Big)|G| \geq \frac{1}{2}\Big(s\big(1-\frac{1}{j}\big)+\frac{t}{j}\Big)|G| \geq \frac{1}{2}\Big((4-t)\big(1-\frac{1}{j}\big)+\frac{t}{j}\Big)|G|$$

$$= \Big(2-\frac{t}{2}-\frac{2-t}{j}\Big)|G| \geq \Big(2-\frac{t}{2}-\frac{2-t}{2}\Big)|G| = |G|.$$

Точность полученной оценки для любого g следует из примера 2, описанного ниже. При этом $X = K_{2,g+1}$ и $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{g+1}$ те же, что и в доказательстве теоремы 1, A — множество двухвалентных вершин графа X, а множество B образовано вершинами графа X валентности $g+1$. Поскольку $|G| = 2g+2$, $|A| = g+1$ и $|B| = 2$, из соотношений $s+t = 4$ и $u = s$ непосредственно следует равенство $|G| = \frac{1}{2}(s(g-1)+t|A|+u|B|)$. □

Э. Бухалансе и Г. Громадски [13, теорема 3.2] предложили следующее уточнение первой теоремы Аракавы. Предположим, что группа G конформных автоморфизмов римановой поверхности S рода больше 1 имеет две собственные орбиты порядков k и l. Тогда либо $|G| \leq 2(g-1)+k+l$, либо $|G| = \frac{m}{m-1}(2(g-1)+k+l)$ для некоторого целого числа $m \geq 2$. В последнем случае фактор-поверхность S/G является сферой, а каноническое отображение $S \to S/G$ разветвлено ровно над тремя коническими точками порядков $|G|/k$, $|G|/l$ и m. Следующая теорема представляет собой дискретную версию указанного результата.

Теорема 3. *Пусть X — граф рода $g \geq 2$. Предположим, что конечная группа G действует гармонично на X, а A и B — две собственные орбиты группы G на множестве вершин X. Положим $k = |A|$ и $l = |B|$. Тогда либо порядок группы G удовлетворяет неравенству $|G| \leq \frac{2}{3}(g-1+k+l)$, либо имеет место равенство $|G| = g-1+k+l$. В последнем случае фактор-граф X/G является деревом, а каноническое отображение $X \to X/G$ разветвлено ровно над двумя коническими точками порядков $|G|/k$ и $|G|/l$.*

Доказательство. Пусть фактор-граф X/G имеет сигнатуру $(\gamma; m_1, m_2, \ldots, m_r)$, где $m_1, m_2, \ldots, m_r \geq 2$. По условию группа G имеет две собственные орбиты. Следовательно, $r \geq 2$. Без ограничения общности можем считать, что при отображении $X \to X/G$ орбиты A и B переходят в конические точки порядков $m_1 = |G|/k$ и $m_2 = |G|/l$ соответственно. По формуле Римана — Гурвица (1) имеем $|G| = (g-1)/S$, где $S = \gamma - 1 + \sum\limits_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{m_i})$.

Рассмотрим несколько случаев.

1°. $\gamma \geq 1$. Тогда $S \geq 2 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}$, или, эквивалентно,

$$\frac{g-1}{|G|} \geq 2 - \frac{k}{|G|} - \frac{l}{|G|}.$$

Отсюда $|G| \leq \frac{1}{2}(g-1+k+l)$.

2°. $\gamma = 0$, $r \geq 3$. Учитывая, что $m_3 \geq 2$, имеем

$$\frac{g-1}{|G|} = \gamma - 1 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq 0 - 1 + \sum_{i=1}^{3}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}.$$

Повторяя рассуждения из предыдущего случая, получим $|G| \leq \frac{2}{3}(g-1+k+l)$.

3° $\gamma = 0$, $r = 2$. Имеем

$$\frac{g-1}{|G|} = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{k}{|G|} - \frac{l}{|G|}.$$

Последнее эквивалентно равенству $|G| = g-1+k+l$. □

Нижеследующий результат, установленный нами в [14, теорема 5], можно рассматривать как дискретный аналог второй теоремы Аракавы.

Теорема 4. *Пусть X — граф рода $g \geq 2$, а A, B и C — три попарно непересекающиеся подмножества вершин X, мощности которых удовлетворяют неравенствам $|A| \geq |B| \geq |C| \geq 1$. Предположим, что конечная группа G действует гармонично на X и оставляет множества A, B и C инвариантными. Тогда порядок группы G удовлетворяет неравенству $|G| \leq \frac{1}{2}(g-1+|A|+|B|+|C|)$.*

В приведенных ниже примерах (см. пример 4) мы покажем, что полученная здесь верхняя оценка является точной и достигается для бесконечного числа значений g.

Примеры. Следующие примеры показывают, что верхние оценки, полученные в теоремах 1–4, достигаются для бесконечно многих значений рода g. Пусть $K_{2,g+1}$ — полный двудольный граф с вершинами v_1, v_2, w_1, $w_2, \ldots, w_{g+1}$ и ребрами v_iw_j, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, g+1$. Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{g+1}$ порядка $2g+2$ как прямое произведение циклических групп $\mathbb{Z}_2 = \langle x \,|\, x^2 = 1\rangle$ и $\mathbb{Z}_{g+1} = \langle y \,|\, y^{g+1} = 1\rangle$. Определим действие группы G на графе $K_{2,g+1}$, считая, что ее порождающие x и y действуют на вершинах графа подстановками $x = (v_1v_2)$ и $y = (w_1w_2\ldots w_{g+1})$. Нетрудно проверить, что группа G действует на графе $K_{2,g+1}$ гармонично, а фактор-граф $K_{2,g+1}/G$ представляет собой отрезок с вершинами v, w и единственным ребром vw. Каноническое отображение $K_{2,g+1} \to K_{2,g+1}/G$ переводит вершины v_1, v_2 в v, а w_1, $w_2, \dots, w_{g+1}$ — в w. При этом вершинам v и w приписаны группы $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_{g+1}$ соответственно, а сигнатура полученного фактор-графа имеет вид $(0; 2, g+1)$. Отметим, что род графа $X = K_{2,g+1}$ равен g, а $|G| = 2g + 2$.

1. Для доказательства точности верхней оценки в теореме 1 выберем $A = \{v_1, v_2\}$. Тогда $|G| = 2(g-1) + 2|A|$.

2. В теореме 2 в качестве инвариантных множеств возьмем $A = \{w_1, w_2, \dots, w_{g+1}\}$ и $B = \{v_1, v_2\}$. Тогда $|A| = g+1$, $|B| = 2$ и $|G| = 2g+2$. При $s = u$ и $s+t = 4$ имеем $\frac{1}{2}(s(g-1)+t|A|+u|B|) = \frac{1}{2}(s(g-1)+t(g+1)+2s) = \frac{1}{2}(s+t)(g+1) = 2g+2$. Откуда $|G| = \frac{1}{2}(s(g-1)+t|A|+u|B|)$. Следовательно, верхняя оценка в указанной теореме достигается для любого значения g.

3. В теореме 3 в качестве собственных орбит группы $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{g+1}$ выберем множества $A = \{w_1, w_2, \dots, w_{g+1}\}$ и $B = \{v_1, v_2\}$. Для них реализуется равенство $|G| = g - 1 + |A| + |B|$, описанное второй возможностью в теореме 3.

4. Для установления точности оценки в теореме 4 рассмотрим барицентрическое подразбиение, полученное добавлением к каждому ребру $v_i w_j$ его середины $m_{i,j}$. Группа G по-прежнему действует гармонично на X'. Полагая $A = \{w_1, w_2, \dots, w_{g+1}\}$, $B = \{v_1, v_2\}$ и $C = \{m_{i,j}, i = 1, 2,\ j = 1, 2, \dots, g+1\}$, получим $|A| = g+1$, $|B| = 2$, $|C| = 2(g+1)$. Отсюда имеем равенство $|G| = \frac{1}{2}(g - 1 + |A| + |B| + |C|)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Baker M., Norine S.** Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs // Int. Math. Res. Notes. 2009. Vol. 15. P. 2914–2955. doi: 10.1093/imrn/rnp037 .
2. **Corry S.** Genus bounds for harmonic group actions on finite graphs // Int. Math. Res. Not. 2011. Vol. 19. P. 4515–4533. doi: 10.1093/imrn/rnq261 .
3. **Mednykh A.D.** On the Riemann–Hurwitz formula for graph coverings [e-resource]. 2015. 8 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1505.00321.pdf .
4. **Медных А.Д., Неделя Р.** Гармонические отображения графов и теорема Римана — Гурвица // Докл. АН. 2016. Т. 466, № 2. С. 144–147. doi: 10.7868/S0869565216020079 .
5. **Hurwitz A.** Uber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich // Math. Ann. 1893. Vol. 41. P. 403–442.
6. **Медных И.А.** О теоремах Фаркаша и Акколы для графов // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 4. С. 387–391. doi: 10.7868/S0869565213040063 .
7. **Медных И.А.** Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 1. С. 69–81. doi: 10.4213/mzm9381 .
8. **Limonov M.P.** Non-regular graph coverings and lifting the hyperelliptic involution // Siberian Elect. Math. Rep. 2015. Vol. 12. P. 372–380. doi: 10.17377/semi.2015.12.031 .
9. **Limonov M.P.** Accola theorem on hyperelliptic graphs // Ars Mathematica Contemporanea. 2016. Vol. 11, iss. 1. P. 91–99.
10. **Mednykh A., Mednykh I.** On Wiman's theorem for graphs // Discrete Math. 2015. Vol. 338. P. 1793–1800. doi: 10.1016/j.clineuro.2015.03.003 .
11. **Oikawa K.** Note on conformal mapping of a Riemann surface onto itself // Kodai Math. Sem. Rep. 1956. Vol. 8. P. 23–30.
12. **Arakawa T.** Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets // Osaka J. Math. 2000. Vol. 37. P. 823–846.
13. **Bujalance E., Gromadzki G.** On automorphisms Of Klein surfaces with invariant subsets // Osaka J. Math. 2013. Vol. 50. P. 251–269.

14. **Медных А.Д., Медных И.А., Неделя Р.** О некоторых обобщениях теоремы Гурвица для групп, действующих на графе // Докл. АН. 2015. Т. 460, № 5. С. 520–524. doi: 10.7868/S0869565215050072 .
15. **Malnic A., Nedela, R., Skoviera M.** Lifting graph automorphisms by voltage assignments // European J. Combin. 2000. Vol. 21, iss. 7. P. 927–947. doi: 10.1006/eujc.2000.0390 .

Медных Александр Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
e-mail: smedn@mail.ru

Поступила 14.06.2017

Медных Илья Александрович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск,
e-mail: ilyamednykh@mail.ru

Роман Неделя
д-р естественных наук, профессор
Университет Восточной Богемии, факультет прикладных наук,
ул. Университетская 8, Пилзень, Чешская Республика,
Университет Матея Бела, ул. Таховского 40, Банька Быстрица, Словакия,
e-mail: roman.nedela@umb.sk; nedela@ntis.zcu.cz; nedela@savbb.sk

REFERENCES

1. Baker M., Norine S. Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs. *Int. Math. Res. Notes*, 2009, vol. 15, pp. 2914–2955. doi: 10.1093/imrn/rnp037 .
2. Corry S. Genus bounds for harmonic group actions on finite graphs. *Int. Math. Res. Not.*, 2011, vol. 19, pp. 4515–4533. arXiv:1006.0446v2. doi: 10.1093/imrn/rnq261 .
3. Mednykh A.D. On the Riemann–Hurwitz formula for graph coverings [e-resource]. 2015. 8 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1505.00321.pdf .
4. Mednykh A.D., Nedela R Harmonic mappings of graphs and Riemann-Hurwitz theorem. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 1, pp. 23–26. doi: 10.1134/S1064562416010105 .
5. Hurwitz A. Uber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. *Math. Ann.*, 1892, vol. 41, pp. 403–442. doi: 10.1007/BF01443420 .
6. Mednykh I.A. On the Farkas and Accola theorems for graphs. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 65–68. doi: 10.1134/S1064562413010250 .
7. Mednykh I. Discrete analogs of Farkas and Accolas theorems on hyperelliptic coverings of a Riemann surface of genus 2. *Math. Notes.*, 2014, vol. 96, no. 1, pp. 84–94. doi: 10.1134/S0001434614070074 .
8. Limonov M.P. Non-regular graph coverings and lifting the hyperelliptic involution. *Siberian Elect. Math. Rep.*, 2015, vol. 12, pp. 372–380. doi: 10.17377/semi.2015.12.031 .
9. Limonov M.P. Accola theorem on hyperelliptic graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 91–99.
10. Mednykh A., Mednykh I. On Wiman's theorem for graphs. *Discrete Math.*, 2015, vol. 338, pp. 1793–1800. doi: 10.1016/j.disc.2015.03.003 .
11. Oikawa K. Note on conformal mapping of a Riemann surface onto itself. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1956, vol. 8, no. 1, pp. 23–30. doi: 10.2996/kmj/1138843714 .
12. Arakawa T. Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets. *Osaka J. Math.*, 2000, vol. 37, pp. 823–846.
13. Bujalance E., Gromadzki G. On automorphisms of Klein surfaces with invariant subsets. *Osaka J. Math.*, 2013, vol. 50, pp. 251–269.

14. Mednykh A.D., Mednykh I.A., Nedela R. A Generalization of Hurwitz' theorem for groups acting on a graph. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 91, no. 1, pp. 87–90. doi: 10.1134/S1064562415010275 .
15. Malnic A., Nedela, R., Skoviera M. Lifting graph automorphisms by voltage assignments. *European J. Combin.*, 2000, vol. 21, no. 7, pp. 927–947. doi: 10.1006/eujc.2000.0390 .

The paper was received by the Editorial Office on June 14, 2017.

Aleksandr Dmitrievich Mednykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosbirsk, 630090 Russia,
e-mail: smedn@mail.ru .

Il'ya Aleksandrovich Mednykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosbirsk, 630090 Russia,
e-mail: ilyamednykh@mail.ru .

Roman Nedela, Dr. Sci., Prof. RNDr., University of West Bohemia, NTIS FAV, Universitni 8, Pilsen, Czech Republic, Matej Bel University, Tajovskeho 40, Banska Bystrica, Slovakia,
e-mail: roman.nedela@umb.sk; nedela@ntis.zcu.cz; nedela@savbb.sk .