ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 519.17+512.54

АВТОМОРФИЗМЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(1305, 440, 115, 165)$[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих, М. М. Хамгокова

Граф Γ называется *t-изорегулярным*, если для любого $i \le t$ и любого i-вершинного подмножества S число $|\Gamma(S)|$ зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного S. Граф Γ на v вершинах называется *абсолютно изорегулярным*, если он является $(v-1)$-изорегулярным. Известно, что каждый 5-изорегулярный граф является абсолютно изорегулярным, и такие графы полностью описаны. Каждый точно 4-изорегулярный граф является псевдогеометрическим графом для $\mathrm{pG}_r(2r, 2r^3+3r^2-1)$ или дополнительным графом к нему. Через $\mathrm{Izo}(r)$ обозначим псевдогеометрический граф для $\mathrm{pG}_r(2r, 2r^3+3r^2-1)$. Для бесконечного множества значений r $(r = 3, 4, 6, 10, \ldots)$ графы $\mathrm{Izo}(r)$ не существуют. Существование $\mathrm{Izo}(5)$ неизвестно. В данной работе найдены возможные автоморфизмы окрестности ребра из $\mathrm{Izo}(5)$.

Ключевые слова: изорегулярный граф, сильно регулярный граф, псевдогеометрический граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, and M. M. Khamgokova. Automorphisms of strongly regular graphs with parameters $(1305, 440, 115, 165)$**.**

A graph Γ is called *t-isoregular* if, for any $i \le t$ and any i-vertex subset S, the number $|\Gamma(S)|$ depends only on the isomorphism class of the subgraph induced by S. A graph Γ on v vertices is called *absolutely isoregular* if it is $(v-1)$-isoregular. It is known that each 5-isoregular graph is absolutely isoregular, and such graphs have been fully described. Each exactly 4-isoregular graph is either a pseudogeometric graph for $\mathrm{pG}_r(2r, 2r^3+3r^2-1)$ or its complement. By $\mathrm{Izo}(r)$ we denote a pseudogeometric graph for $\mathrm{pG}_r(2r, 2r^3+3r^2-1)$. Graphs $\mathrm{Izo}(r)$ do not exist for an infinite set of values of r $(r = 3, 4, 6, 10, \ldots)$. The existence of $\mathrm{Izo}(5)$ is unknown. In this work we find possible automorphisms for the neighborhood of an edge from $\mathrm{Izo}(5)$.

Keywords: isoregular graph, strongly regular graph, pseudogeometric graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-232-242

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a*. Для подмножества вершин S графа Γ через $\Gamma(S)$ обозначим $\bigcap_{a\in S}([a]-S)$.

Через k_a обозначим *степень вершины a*, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени k*, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)*, если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *сильно (вполне) регулярным с параметрами (v, k, λ, μ)*, если Γ — реберно регулярный граф с соответствующими параметрами и для любых двух несмежных (находящихся на расстоянии 2) вершин a, b верно равенство $|[a]\cap[b]| = \mu$. Пересечение окрестностей двух вершин $[a]\cap[b]$ во вполне регулярном графе назовем *λ-подграфом*, если вершины a, b смежны и назовем *μ-подграфом*, если $\mathrm{d}(a, b) = 2$.

Через $K_{m\times n}$ обозначим полный двудольный граф с m долями порядка n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$p \times q$-решеткой*, если $|X| = p$, $|Y| = q$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025 (теорема), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие).

смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, или $y_1 = y_2$. Через mK_n обозначается объединение m изолированных полных подграфов K_n.

Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_i(g)$ обозначим число вершин $u \in \Gamma$ таких, что $d(u, u^g) = i$.

Система инцидентности $(X, \mathcal{L})$, где X — множество точек и $\mathcal{L}$ — множество прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке), и для любой точки a, не лежащей на прямой l, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $\mathrm{pG}_\alpha(s, t)$).

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $\mathrm{pG}_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s+1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, параметры которого можно представить в таком виде для некоторых натуральных чисел α, s, t, называется *псевдогеометрическим графом* для $\mathrm{pG}_\alpha(s, t)$.

Граф Γ называется *t-изорегулярным*, если для любого $i \le t$ и любого i-вершинного подмножества S число $|\Gamma(S)|$ зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного S. t-изорегулярный граф Γ называется *точно t-изорегулярным*, если он не является $(t+1)$-изорегулярным. Граф Γ на v вершинах называется *абсолютно изорегулярным*, если он является $(v-1)$-изорегулярным.

Камерон [1, теорема 8.21] доказал, что каждый 5-изорегулярный граф Γ является абсолютно изорегулярным и, с точностью до перехода к дополнительному графу, Γ — полный многодольный граф $K_{m \times n}$, пятиугольник или 3×3-решетка; далее, каждый точно 4-изорегулярный граф является псевдогеометрическим графом для $\mathrm{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$ или дополнительным графом к нему. Через $\mathrm{Izo}(r)$ обозначим псевдогеометрический граф для $\mathrm{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$. При $r = 1$ получим точечный граф единственного обобщенного четырехугольника порядка $(2, 4)$, а при $r = 2$ — граф Маклафлина.

Для любой вершины a графа $\mathrm{Izo}(r)$ подграф $\Sigma = [a]$ является псевдогеометрическим графом для $\mathrm{pG}_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$. Существование графа $\mathrm{Izo}(r)$ равносильно существованию плотной 5-схемы в евклидовой сфере S^{n-1} размерности $n-1$, где $n = (2r+1)^2$ (см. [2]). Из результатов [2] и [3] следует несуществование графов $\mathrm{Izo}(r)$ для бесконечного множества значений r, в частности, для $r = 3, 4, 6, 10, 12, 22, 28, 30, 34, 42, 46, \ldots$. В [4] доказано, что граф с параметрами окрестности вершины в графе $\mathrm{Izo}(3)$ не существует. Возможные автоморфизмы локальных подграфов графа $\mathrm{Izo}(4)$ найдены в [5].

Наиболее важной на данный момент представляется проблема существования графа $\mathrm{Izo}(5)$.

Граф $\mathrm{Izo}(5)$ имеет параметры $(7139, 3250, 1305, 1625)$ и для любой вершины a подграф $\Sigma = [a]$ является псевдогеометрическим графом для $\mathrm{pG}_4(9, 144)$ с параметрами (3250,1305,440,580). Далее, для любой вершины $b \in \Sigma$ подграф $\Delta = \Sigma(b)$ является псевдогеометрическим графом для $\mathrm{pG}_3(8, 54)$ и имеет параметры $(1305, 440, 115, 165)$. Существование сильно регулярных графов с указанными параметрами неизвестно. В данной работе найдены возможные автоморфизмы графа с параметрами $(1305, 440, 115, 165)$.

Теорема 1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами* $(1305, 440, 115, 165)$, *G — группа автоморфизмов графа Γ, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, \ldots, 53\}$, 29^2 не делит $|G|$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 29$ и $\alpha_1(g) = 435$, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 75(4l+1)$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 45(4l-1)$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $p = 3$, $n = 3t$, $t \le 3$ и $\alpha_1(g) = 3(60l + 5t - 15)$, либо $p = 2$, $n = 2t+1$, $t \le 4$ и $\alpha_1(g) = 2(60l + 5t - 20)$;*

(3) *Ω является l-кокликой, $2 \le l \le 145$, $p = 11$, $l = 11t + 7$ и $\alpha_1(g) = 55(12m + 2 + t)$ либо $p = 5$, $l = 5s$ и $\alpha_1(g) = 5(60m + 5s + 27)$;*

(4) *Ω является объединением изолированных клик, $p = 3$, и порядок любой максимальной клики из Ω равен* 3 *или* 6;

(5) *Ω содержит геодезический* 2*-путь и $p \le 53$.*

Следствие 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(1305, 440, 115, 165)$, *неразрешимая группа автоморфизмов G графа Γ действует транзитивно на множестве его вершин и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$S(G)$ содержит элемент f порядка* 29, *группа $\bar{T}$ изоморфна* A_5, A_6, $\mathrm{PSp}_4(3)$ *и фиксирует некоторую вершину a*;

(2) *$S(G) = O_{3,5}(G)$, группа $\bar{T}$ изоморфна* A_{29} *и* $\bar{T}_a \cong \mathrm{A}_{28}$.

В любом случае граф Γ не является реберно симметричным.

1. Предварительные результаты

Приведем сначала два вспомогательных результата.

Лемма 1.1 [6]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с собственными значениями k, r, s, $s < 0$, на v вершинах. Если Γ содержит индуцированный регулярный подграф Δ степени d на w вершинах, то $s \le d - (k-d)w/(v-w) \le r$, причем в случае равенства каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $(k-d)w/(v-w)$ вершинами из Δ.*

Лемма 1.2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(1305, 440, 115, 165)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если W является трехвершинным подграфом из Γ, x_i — число вершин из $\Gamma - W$, смежных точно с i вершинами из W, то число $x_0 + x_3$ равно* 330, *если W является кликой; равно* 390, *если W является* 2*-путем; равно* 429, *если W является объединением изолированной вершины и ребра; равно* 477, *если W является кокликой*;

(2) *если g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, то число $\alpha_0(g)$ не больше $480 - p$ в случае $\alpha_1(g) = 0$, не больше* 390 *в случае $\alpha_1(g) > 0$ и не больше* 330 *в случае $\alpha_2(g) < \alpha_1(g)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - W$, смежных точно с i вершинами из W. Если W является 2-путем a, b, c, то X_2 содержит $164 - x_3$ вершин из $[a] \cap [c]$, и по $115 - x_3$ вершин из $[a] \cap [b]$, $[b] \cap [c]$. Далее, X_1 содержит $208 + x_3$ вершин из $[b]$ и по $160 + x_3$ вершин из $[a]$, $[c]$. Поэтому $x_0 + x_3 = 1302 - (394 - 3x_3) - (528 + 3x_3) = 390$.

Если W является объединением изолированной вершины a и ребра $\{b, c\}$, то X_2 содержит $115 - x_3$ вершин из $[b] \cap [c]$ и по $165 - x_3$ вершин из $[a] \cap [b]$, $[a] \cap [c]$. Далее, X_1 содержит $110 + x_3$ вершин из $[a]$ и по $159 + x_3$ вершин из $[b]$, $[c]$. Поэтому $x_0 + x_3 = 1302 - (445 - 3x_3) - (428 + 3x_3) = 429$.

Аналогично рассматриваются случаи клики и коклики для W.

Если $u^{\langle g \rangle}$ — кокликовая орбита длины p и W является трехвершинным подграфом из $u^{\langle g \rangle}$, то $X_0 \cup X_3$ содержит $\alpha_0(g)$ вершин из $\mathrm{Fix}(g)$ и $p - 3$ вершин из $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $\alpha_0(g) \le 480 - p$.

Если $\alpha_1(g) > 0$, то можно считать, что $u^{\langle g \rangle}$ содержит 2-путь и $X_0 \cup X_3$ содержит $\alpha_0(g) \le 390$ вершин.

Покажем, что если $\alpha_2(g) < \alpha_1(g)$, то $\alpha_0(g) \le 330$. Так как число орбит, в которых вершина не смежна с ее образом под действием g, равно $\alpha_2(g)$, и число орбит, в которых вершина не смежна с ее образом под действием g^2, также равно $\alpha_2(g)$, то найдется орбита $u^{\langle g \rangle}$, в которой $W = \{u, u^g, u^{g^2}\}$ является треугольником. Отсюда $X_0 \cup X_3$ содержит Ω и $\alpha_0(g) \le 330$.

Лемма доказана.

Если Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1305, 440, 115, 165)$, то ввиду леммы 1.1 порядок коклики в Γ не больше 145, а порядок клики не больше 9.

Доказательство теоремы опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [7]. При этом графу Γ соответствует симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где R_0 — отношение равенства на множестве вершин X графа Γ, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $\mathrm{GL}(v, \mathbb{C})$. Пусть W_i — i-е собственное подпространство из $\mathbb{C}^v$ матрицы смежности A графа Γ. Так как A перестановочна с любой матрицей из $\psi(G)$, то подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления $\psi|_{W_i}$. Тогда для любого $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ верно равенство $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2} Q_{ij}\alpha_j(g)$.

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(1305, 440, 115, 165)$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1305, 440, 115, 165)$ и спектром 440^1, $5^{1188}, -55^{116}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности* 116, *равно* $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/60 + 29/4$ *и* $\chi_2(g) - 116$ *делится на* p;

(2) *если* f *— элемент порядка* p^2 *и* $g = f^p$, *то* $\chi_2(g) - 116$ *делится на* p^2;

(3) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 29$ *и* $\alpha_1(g) = 435$, *либо* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 75(4l+1)$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 45(4l-1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1188 & 27/2 & -33/4 \\ 116 & -29/2 & 29/4 \end{pmatrix}$$

и $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/2 + \alpha_2(g)/4)/45$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = 1305 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/60 + 29/4$.

Последнее замечание из утверждения (1) леммы следует из [8, лемма 1].

Утверждение (2) следует из [9].

Пусть Ω — пустой граф, $\alpha_i(g) = pw_i$. Так как $1305 = 45 \cdot 29$, то $p \in \{3, 5, 29\}$.

Пусть $p = 29$. Тогда $\chi_2(g) = 29(-w_1 + 15)/60$ и $\alpha_1(g) = 435$.

Пусть $p = 5$. Тогда число $\chi_2(g) = (87 - w_1)/12$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 5(60l + 15)$.

Пусть $p = 3$. Тогда число $\chi_2(g) = (145 - w_1)/20$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 3(60l - 15)$.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $p = 3$, $n = 3t \le 9$ *и* $\alpha_1(g) = 3(60l + 5t - 15)$, *либо* $p = 2$, $n = 2t + 1 \le 9$ *и* $\alpha_1(g) = 2(60l + 5t - 20)$;

(2) *если* Ω *является* l*-кокликой,* $l \ge 2$, *то* $p = 11$, $l = 11t + 7$, $t \le 12$ *и* $\alpha_1(g) = 55(12m + 1 + t)$ *или* $p = 5$, $l = 5s$, $s \le 29$ *и* $\alpha_1(g) = 5(60m + 5s + 27)$;

(3) *если* Ω *является объединением изолированных клик, то* $p = 3$ *и порядок любой максимальной клики из* Ω *равен* 3 *или* 6.

Доказательство. Пусть Ω является n-кликой. Если $n=1$, то p делит 440 и 864, поэтому $p=2$, число $\chi_2(g)=(440-\alpha_1(g))/60$ четно и $\alpha_1(g)=120l-40$.

Пусть $n\geq 2$ и $a,b\in\Omega$. Так как g действует полурегулярно на $[a]-b^\perp$ и на $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$, то p делит 324, 540 и $117-n$, поэтому $p=2,3$. В случае $p=3$ имеем $n=3t$, число $\chi_2(g)=(145+5t-w_1)/20$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g)=3(60l+5t-15)$. В случае $p=2$ имеем $n=2t+1$, число $\chi_2(g)=(220+5t-w_1)/30$ четно и $\alpha_1(g)=2(60l+5t-20)$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l\geq 2$, и $a,b\in\Omega$. Так как g действует полурегулярно на $[a]\cap[b]$ и на $[a]-b^\perp$, то p делит 165, 275 и $590-l$, поэтому $p=5,11$. В случае $p=11$ имеем $l=11t+6$, число $\chi_2(g)=(475+55t-\alpha_1(g))/60$ сравнимо с 7 по модулю 11 и $\alpha_1(g)=660m+55+55t$. В случае $p=5$ имеем $l=5s$, число $\chi_2(g)=(5s-w_1+87)/12$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_1(g)=5(60m+5s+27)$.

Если Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, то p делит 324 и 165, поэтому $p=3$ и порядок любой максимальной клики из Ω делится на 3. Но если этот порядок равен 9, то любая вершина из Γ смежна с 3 вершинами этой клики, противоречие.

Лемма доказана.

Ввиду лемм 2.1, 2.2 можно считать, что Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c.

Лемма 2.3. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *если $[a]$ содержится в Ω для некоторой вершины $a\in\Omega$, то $p=2,3$ и $\Omega=a^\perp$*;
(2) *верно неравенство $p\leq 53$.*

Доказательство. Допустим, что $[a]\subset\Omega$. Тогда для $u\in\Gamma-\Omega$ подграф $[u]\cap\Omega$ содержит 165 вершин из $[a]$, поэтому $\alpha_1(g)=0$ и $\Omega=a^\perp$. Далее, $\chi_2(g)=528/12=44$ и $116-\chi_2(g)=72$ делится на p, поэтому $p=2,3$.

В случае $p>165$ граф Ω является сильно регулярным с параметрами $(v',k',115,165)$ и собственными значениями $(-50\pm n)/2$, где $n^2=2500+4(k'-165)$. Поэтому $n=2u$, $k'=u^2-460$ и кратность $u-25$ равна $(u+24)(u^2-460)(u^2+u-435)/(330u)$, противоречие.

Если $115<p<165$, то $p=127$, $\alpha_0(g)=35$, $\alpha_1(g)=1270$ и любая $\langle g\rangle$-орбита является кликой, противоречие.

Для $31\leq p\leq 113$ получим следующие возможности.

Если $p=113$, то $\alpha_0(g)=62$, $\alpha_1(g)=565$ или $\alpha_0(g)=175$, $\alpha_1(g)=1130$. В последнем случае любая $\langle g\rangle$-орбита является кликой. В первом случае степень вершины в Ω равна 101, 214 или 327, противоречие.

Если $p=109$, то $\alpha_0(g)=106$, $\alpha_1(g)=545$ или $\alpha_0(g)=215$, $\alpha_1(g)=1090$. В последнем случае любая $\langle g\rangle$-орбита является кликой. В первом случае степень вершины в Ω равна 113, 222 или 331, противоречие.

Если $p=107$, то $\alpha_0(g)=21$, $\alpha_1(g)=0$ или $\alpha_0(g)=128$, $\alpha_1(g)=535$. Далее, степень вершины в Ω равна 12 или 119. В первом случае $\mu_\Omega\geq 58$, а во втором $\lambda_\Omega=79$, $\mu_\Omega=58$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (128,119,79,58). В любом случае имеем противоречие.

Если $p=103$, то $\alpha_0(g)=69$, $\alpha_1(g)=0$ или $\alpha_0(g)=172$, $\alpha_1(g)=515$. Далее, степень вершины a в Ω равна 28 или 131. В первом случае $\mu_\Omega\geq 62$, а во втором либо $\lambda_\Omega=12$, либо $\lambda_\Omega=115$ и $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 115 на 127 вершинах. В любом случае имеем противоречие.

Если $p=101$, то $\alpha_0(g)=93$, $\alpha_1(g)=0$ или $\alpha_0(g)=194$, $\alpha_1(g)=505$. Далее, $\lambda_\Omega=14,115$, $\mu_\Omega=64,165$, и степень вершины в Ω равна 137. Поэтому $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 115 на 137 вершинах, противоречие.

Если $p=97$, то $\alpha_0(g)=141$, $\alpha_1(g)=0$ или $\alpha_0(g)=238$, $\alpha_1(g)=485$. Теперь $\lambda_\Omega=18,115$, $\mu_\Omega=68,165$, и степень вершины в Ω равна 149. Отсюда $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 115 на 149 вершинах, противоречие.

Пусть $p=89$. Тогда $\alpha_0(g)=237$, $\alpha_1(g)=0$ или $\alpha_0(g)=326$, $\alpha_1(g)=445$. Далее, $\lambda_\Omega=26,115$, $\mu_\Omega=76,165$, и степень вершины в Ω равна 84, 173 или 262.

Если Ω содержит вершину a степени 262, то $|\Omega - a^\perp| = 63$ и $\Omega - a^\perp$ — регулярный граф степени 8. Отсюда a — единственная вершина степени 262 в Ω, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $146x + 57(262 - x) = 165y + 76(63 - y)$. Теперь $89(y - x) = 38(393 - 126)$ и $(y - x) = 108$, противоречие с тем, что $y \leq 63$.

Если Ω содержит вершину a степени 84, то $|\Omega - a^\perp| = 152, 330$. Далее, число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $146x + 57(84 - x) = 76|\Omega - a^\perp|$. Если $|\Omega - a^\perp| = 152$, то $89x = 76(152 - 63)$ и $x = 76$. Для двух вершин $b, c \in \Omega(a)$, смежных с 146 вершинами из $\Omega - a^\perp$, подграф $[b] \cap [c]$ содержит не менее $146 + 146 - 152$ вершин из $\Omega - a^\perp$, и вершины b, c не смежны. Противоречие с тем, что $\Omega(a)$ содержит 76-коклику. Если $|\Omega - a^\perp| = 330$, то $89x = 76(330 - 63)$ и $x = 228$, противоречие.

Значит, Ω — регулярный граф степени 173 на 326 вершинах, и по лемме 1.1 имеем $-55 \leq 173 - 267 \cdot 326/979 \leq 5$, противоречие.

Пусть $p = 83$. Тогда $\alpha_0(g) = 309$, $\alpha_1(g) = 0$ или $\alpha_0(g) = 392$, $\alpha_1(g) = 415$. Далее, $\lambda_\Omega = 32, 115$, $\mu_\Omega = 82, 165$, и степень вершины в Ω равна 108, 191, 274 или 357.

Если Ω содержит вершину a степени 357, то $|\Omega - a^\perp| = 34$, противоречие с тем, что вершина b из $\Omega(a)$ смежна по крайней мере с 75 вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Пусть Ω содержит вершину a степени 274. Тогда $|\Omega - a^\perp| = 117$, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $75 \cdot 274 = 165y + 82(117 - y)$. Теперь $83y = 75 \cdot 274 - 82 \cdot 117$, и $y = 132$, противоречие с тем, что $y \leq 117$.

Пусть Ω содержит вершину a степени 108. Тогда $|\Omega - a^\perp| = 200, 283$, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $158x + 75(108 - x) = 82|\Omega - a^\perp|$. В случае $|\Omega - a^\perp| = 200$ имеем $83x = 100(164 - 81)$ и $x = 100$. Теперь для двух вершин $b, c \in \Omega(a)$, смежных с 158 вершинами из $\Omega - a^\perp$, подграф $[b] \cap [c]$ содержит не менее $158 + 158 - 200 = 116$ вершин из $\Omega - a^\perp$, в частности, вершины b, c не смежны. Противоречие с тем, что $\Omega(a)$ содержит 100-коклику. В случае $|\Omega - a^\perp| = 283$ имеем $83x = (82 \cdot 283 - 108 \cdot 75)$ и $x = 182$, противоречие.

Значит, Ω — регулярный граф степени 191 на 392 вершинах, и по лемме 1.1 имеем $-55 \leq 191 - 249 \cdot 392/913 \leq 5$, противоречие.

Пусть $p = 79$. Тогда $\alpha_0(g) = 357$, $\alpha_1(g) = 0$ или $\alpha_0(g) = 436$, $\alpha_1(g) = 395$. Однако, ввиду леммы 1.2 имеем $\alpha_0(g) \leq 400$. Далее, $\lambda_\Omega = 36, 115$, $\mu_\Omega = 7, 86, 165$, и степень вершины в Ω равна 45, 124, 203 или 282. Так как $|\Omega| = 357$, то $|\Gamma - \Omega| = 79 \cdot 12$.

Если Ω содержит вершину a степени 45, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 36, и по лемме 1.1 имеем $36 - 202 \cdot 9/126 \leq 5$, противоречие.

Если Ω содержит вершину a степени 282, то $|\Omega - a^\perp| = 74$ — регулярный граф степени 38 и по лемме 1.1 имеем $38 - 402 \cdot 74/1231 \leq 5$, противоречие.

Если Ω содержит вершину a степени 203, то $|\Omega - a^\perp| = 153$, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $87x + 8(203 - x) = 165y + 86z + 7(153 - y - z)$. Отсюда $79(2y + z - x) = 1624 - 1071 = 7 \cdot 79$ и $2y + z - x = 7$. Теперь $y + z \leq 153$, $x - y \leq 146$ и $203 - x \geq 57 + y$. Отсюда число вершин степени, не большей 124 в Ω, не меньше $57 + y + z + (153 - y - z)$.

Если $u^{\langle g \rangle}$, $w^{\langle g \rangle}$ — две орбиты длины 79, то для степени d подграфа $u^{\langle g \rangle} \cup w^{\langle g \rangle}$ имеем $-55 \leq d - (440 - d)158/1147 \leq 5$ и $5 \leq d \leq 65$. Пусть W — трехвершинный подграф из $u^{\langle g \rangle}$, X_i — множество вершин из $\Gamma - W$, смежных точно с i вершинами из W, и $x_i = |X_i|$. Тогда $X_0 \cup X_3$ содержит 357 вершин из Ω и 76 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Значит, $X_0 \cup X_3$ содержит 43 вершины из $\Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g \rangle})$ и $d \geq 12$.

Вершина $u \in \Gamma - \Omega$ смежна не более чем со 165 вершинами из Ω и по крайней мере с 25 вершинами из некоторой орбиты $w^{\langle g \rangle}$. Тогда имеется $25 \cdot 12 \cdot 79$ 2-путей с концами в $u^{\langle g \rangle}$ и средней вершиной в $w^{\langle g \rangle}$, и некоторая пара вершин из $u^{\langle g \rangle}$ смежна по крайней мере с 100/13 вершинами из $w^{\langle g \rangle}$ и не более чем со 157 вершинами из Ω.

Минимум числа 2-путей с концами в $u^{\langle g \rangle}$ и средней вершиной в $\Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g \rangle})$ достигается в случае, когда u смежна с 26 вершинами в восьми орбитах и с 25 вершинами в трех $\langle g \rangle$-орбитах длины 79, и равен $79(13 \cdot 25 \cdot 8 + 36 \cdot 25)$. Поэтому некоторая пара вершин из $u^{\langle g \rangle}$ смежна по крайней мере с $25(52 + 18)/39$ вершинами из $\Gamma - \Omega$ и не более чем с 120 вершинами из Ω.

Повторив это рассуждение несколько раз, получим, что некоторая пара вершин из $u^{\langle g\rangle}$ смежна по крайней мере с 65 вершинами из $\Gamma - \Omega$ и не более чем с 100 вершинами из Ω. Итак, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, разделенное на 79, не больше $12 \cdot 100 = 1200$, но не меньше $210 \cdot 4 + 147 \cdot 3$, противоречие.

Пусть $p = 73$. Тогда $\alpha_0(g) = 429$ и $\alpha_1(g) = 0$. Противоречие с леммой 1.2.

Пусть $p = 71$. Тогда $\alpha_0(g) = 453$, $\alpha_1(g) = 0$ или $\alpha_0(g) = 524$, $\alpha_1(g) = 355$. В любом случае получим противоречие с леммой 1.2.

Пусть $p = 67$. Тогда $\alpha_0(g) = 501$, $\alpha_1(g) = 0$. Ввиду леммы 1.2 имеем $\alpha_0(g) \leq 413$, противоречие.

Пусть $p = 61$. Тогда $\alpha_0(g) = 24$ и $\alpha_1(g) = 915$. Далее, $\lambda_\Omega = 54, 115$, противоречие.

Пусть $p = 59$. Тогда $\alpha_0(g) = 7$, $\alpha_1(g) = 590$ или $\alpha_0(g) = 66$, $\alpha_1(g) = 885$. Далее, $\lambda_\Omega = 56, 115$, $\mu_\Omega = 47, 106, 165$, и степень вершины в Ω равна 27, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если $p > 29$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $p = 53$, $\alpha_0(g) = 86$, $\alpha_1(g) = 265$ *или* $\alpha_0(g) = 139$, $\alpha_1(g) = 530$, *или* $\alpha_0(g) = 192$, $\alpha_1(g) = 795$;

(2) $p = 47$, $\alpha_0(g) = 177$, $\alpha_1(g) = 0$ *или* $\alpha_0(g) = 224$, $\alpha_1(g) = 235$, *или* $\alpha_0(g) = 271$, $\alpha_1(g) = 470$, *или* $\alpha_0(g) = 318$, $\alpha_1(g) = 705$;

(3) $p = 43$, $\alpha_0(g) = 273$, $\alpha_1(g) = 0$ *или* $\alpha_0(g) = 316$, $\alpha_1(g) = 215$, *или* $\alpha_0(g) = 359$, $\alpha_1(g) = 430$;

(4) $p = 41$, $\alpha_0(g) = 321$, $\alpha_1(g) = 0$ *или* $\alpha_0(g) = 362$, $\alpha_1(g) = 205$;

(4) $p = 37$, $\alpha_0(g) = 417$, $\alpha_1(g) = 0$ *или* $\alpha_0(g) = 121$, $\alpha_1(g) = 740$, *или* $\alpha_0(g) = 158$, $\alpha_1(g) = 925$;

(5) $p = 31$, $\alpha_0(g) = 189$, $\alpha_1(g) = 0$ *или* $\alpha_0(g) = 220$, $\alpha_1(g) = 155$, *или* $\alpha_0(g) = 251$, $\alpha_1(g) = 310$, *или* $\alpha_0(g) = 282$, $\alpha_1(g) = 465$, *или* $\alpha_0(g) = 313$, $\alpha_1(g) = 620$.

Доказательство. Пусть $p = 53$. Тогда $\alpha_0(g) = 33$, $\alpha_1(g) = 0$; $\alpha_0(g) = 86$, $\alpha_1(g) = 265$; $\alpha_0(g) = 139$, $\alpha_1(g) = 530$ или $\alpha_0(g) = 192$, $\alpha_1(g) = 795$. Далее, $\lambda_\Omega = 9, 62, 115$, $\mu_\Omega = 6, 59, 112, 165$, и степень вершины в Ω равна 16, 69, 122, 175.

Если $|\Omega| = 33$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (33,16,9,6), собственными значениями $5, -2$ и кратностью 5, равной $16 \cdot 18/42$, противоречие.

В случае $p = 47$ получим параметры из заключения леммы.

В случае $p = 43$ либо получим параметры из заключения леммы, либо $\alpha_0(g) = 402$, $\alpha_1(g) = 645$. Но в этом случае по лемме 1.2 имеем $\alpha_0(g) \leq 400$.

В случае $p = 41$ либо получим параметры из заключения леммы, либо $\alpha_0(g) = 403$, $\alpha_1(g) = 410$, либо $\alpha_0(g) = 444$, $\alpha_1(g) = 615$, либо $\alpha_0(g) = 34$. В последнем случае имеем $\lambda_\Omega = 33$, противоречие. В первых двух случаях по лемме 1.2 имеем $\alpha_0(g) \leq 400$.

В случае $p = 37$ либо получим параметры из заключения леммы, либо $\alpha_0(g) = 454$, $\alpha_1(g) = 185$, либо $\alpha_0(g) = 491$, $\alpha_1(g) = 370$, либо $\alpha_0(g) = 10, 47$, либо $\alpha_0(g) = 84$. В первых двух случаях по лемме 1.2 имеем $\alpha_0(g) \leq 400$. В следующих двух случаях имеем $\lambda_\Omega = 4$, $\mu_\Omega = 17$, и степень вершины в Ω равна 33. В случае $\alpha_0(g) = 47$ граф Ω является регулярным степени 33, противоречие. Наконец, в случае $\alpha_0(g) = 84$ степень вершины a в Ω равна 33 или 70, $\lambda_\Omega \in \{4, 41\}$ и $\mu_\Omega \in \{17, 54\}$. Если степень вершины a в Ω равна 33, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $33 \cdot 28 = 40 \cdot 17$, противоречие. Если же Ω — регулярный граф степени 70, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ не меньше $70 \cdot 28$, но не больше $13 \cdot 54$, противоречие.

В случае $p = 31$ либо получим параметры из заключения леммы, либо $\alpha_0(g) = 344$, $\alpha_1(g) = 775$, либо $\alpha_0(g) = 3, 34$. В первом случае некоторая $\langle g\rangle$-орбита длины 31 содержит треугольник, и по лемме 1.2 имеем $\alpha_0(g) \leq 330$.

Пусть $\alpha_0(g) = 3, 34$. Заметим, что $\lambda_\Omega = 22$, $\mu_\Omega = 10$, и степень вершины в Ω равна 6, 37. В случае $\alpha_0(g) = 34$ граф Ω является сильно регулярным с параметрами (34,6,22,10), противоречие.

Лемма 2.5. *Если g — элемент порядка 29 из G, то выполняются следующие утверждения*:

(1) $\alpha_0(g) = 261$, $\alpha_1(g) = 0$ *или* $\alpha_0(g) = 290$, $\alpha_1(g) = 145$, *или* $\alpha_0(g) = 319$, $\alpha_1(g) = 290$, *или* $\alpha_0(g) = 348$, $\alpha_1(g) = 435$, *или* $\alpha_0(g) = 87$, $\alpha_1(g) = 870$, *или* $\alpha_0(g) = 116$, $\alpha_1(g) = 1015$;

(2) $|G|$ *не делится на* 29^2.

Доказательство. В случае $p = 29$ либо получим параметры из заключения леммы, либо $\alpha_0(g) = 406$, $\alpha_1(g) = 725$, либо $\alpha_0(g) = 377$, $\alpha_1(g) = 580$, либо $\alpha_0(g) = 29, 58$. В первом случае по лемме 1.2 имеем $\alpha_0(g) \le 400$. В последних двух случаях $\lambda_\Omega = 28, 57$, $\mu_\Omega = 20, 49$, и степень вершины в Ω равна 34, 63. Отсюда Ω — реберно регулярный граф с параметрами (58,34,28), противоречие с тем, что $58 \cdot 34 \cdot 28$ не делится на 3. В случае $\alpha_0(g) = 377$ ввиду леммы 1.2 имеем $\alpha_0(g) \le 330$.

Допустим, что G содержит элемент f порядка 29^2, $g = f^{29}$. Тогда $|\Gamma - \Omega|$ делится на 29^2, поэтому $|\Omega| = 1305 - 841 = 464$, противоречие с утверждением (1).

Пусть U является элементарной абелевой подгруппой из G порядка 29^2, g_i ($i \in \{1, 2, \dots, 30\}$) порождают различные подгруппы порядка 29 из U, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$, $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(U)$ и a, b — две вершины из Ω^0.

Если на Γ имеется U-орбита w^U длины 841, то $|\bigcup_i \Omega^i| = 464$. В этом случае $|\Omega^0| \ne 0$, иначе $|\bigcup_i \Omega^i| \ge 30 \cdot 87$, противоречие. Далее, $[a] \cap [b]$ содержит $28, 57, 86$ или 115 вершин из Ω^0, если a, b смежны и $20, 49, 78, 107, 136$ или 165 вершин из Ω^0, если a, b не смежны. Пусть $c \in \Omega^0(a) \cap [b]$, X_0 — множество вершин из Γ, не смежных с вершинами из $\{a, b, c\}$. Тогда X_0 содержит w^U, противоречие с тем, что по лемме 1.2 имеем $|X_0| \le 400$.

Значит, на Γ нет U-орбит длины 841 и $|\bigcup_i \Omega^i| = 1305$. Теперь $|\Omega^0| > 29$, иначе $|\bigcup_i \Omega^i| \ge 30 \cdot 58$, противоречие. Пусть $\Omega \ne \Omega^0$ и $u \in \Omega - \Omega^0$. Тогда для любой орбиты w^U на $\Gamma - \Omega$ вершина u смежна либо с нулем вершин из w^U, либо со всеми вершинами из w^U. Зафиксируем трехвершинный подграф W из u^U.

Если $|\Omega^0| = 58$, то $[a] \cap [b]$ содержит 28 вершин из Ω^0, если a, b смежны и 20 или 49 вершин из Ω^0, если a, b не смежны. Далее, степень вершины в Ω^0 равна 34, и Ω^0 — сильно регулярный граф с параметрами (58,34,28,20), противоречие.

Если $|\Omega^0| = 87$, то $[a] \cap [b]$ содержит 28 или 57 вершин из Ω^0, если a, b смежны, и $20, 49$ или 78 вершин из Ω^0, если a, b не смежны. Далее, степень вершины в Ω^0 равна 34 или 63.

Пусть степень вершины a в графе Ω^0 равна 63. Тогда число ребер между $\Omega^0(a)$ и $\Omega^0 - a^\perp$ равно $5 \cdot 63 = 49z + 20(23 - z)$, противоречие. Значит, Ω^0 — регулярный граф степени 34, и число ребер между $\Omega^0(a)$ и $\Omega^0 - a^\perp$ равно $5 \cdot 34 = 20 \cdot 52$, противоречие.

Если $|\Omega^0| = 116$, то $|\Gamma - \Omega^0| = 41 \cdot 29$. Далее, подграф $X_0(W) \cup X_3(W)$ содержит не менее $116 + 29(41 - 8)$ вершин, противоречие с леммой 1.2.

Если $116 < |\Omega^0| \le 203$, то $|\bigcup_i \Omega^i| \ge 30 \cdot 58$, противоречие. Пусть $|\Omega^0| = 232$. Тогда $|\Gamma - \Omega^0| = 37 \cdot 29$, и подграф $X_0(W) \cup X_3(W)$ содержит не менее $232 + 29(37 - 4)$ вершин, противоречие с леммой 1.2.

Аналогичное противоречие получим в случае $|\Omega^0| > 232$.

Лемма доказана.

Из лемм 2.1–2.5 следует теорема.

3. Граф с параметрами $(1305, 440, 115, 165)$, вершинно симметричный случай

До конца работы будем предполагать, что неразрешимая группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 1305 = 9 \cdot 5 \cdot 29$, и 29 не делит $|G_a|$. Через $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $G/S(G)$.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если f — элемент порядка 29 из G и $C_G(f)$ содержит элемент g простого порядка $p \ne 29$, то $\alpha_1(f) = 435$, и либо*

(i) $\alpha_1(g)=0$, $\alpha_0(g)=261$ *и* $p=2,3$, *либо*

(ii) $p=5$, $\alpha_1(g)=145$, $\alpha_0(g)=290$ *или* $\alpha_1(g)=1160$, $\alpha_0(g)=145$, *либо*

(iii) $p=3$, $\alpha_1(g)=870$, $\alpha_0(g)=87$, *либо*

(iv) $p=2$, $\alpha_1(g)=290$, $\alpha_0(g)=319$ *или* $\alpha_1(g)=580$, $\alpha_0(g)=29,377$, *или* $\alpha_1(g)=870$, $\alpha_0(g)=435,87$, *или* $\alpha_1(g)=1160$, $\alpha_0(g)=145$;

(2) *либо* $S(G)=O_{3,5,29}(G)$, *группа* $\bar T$ *изоморфна* A_5, A_6 *или* $\mathrm{PSp}_4(3)$, *либо* $S(G)=O_{3,5}(G)$, *группа* $\bar T$ *изоморфна* $\mathrm{L}_2(29)$, A_{29} *или* A_{30}, *в случаях* $\mathrm{L}_2(29)$, A_{30} *группа* $V=S(G)$ *является элементарной абелевой* 3*-группой,* $|V:V_a|=3$, *и группа* $\bar T$ *действует неприводимо на* V.

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 29 из G, g — элемент простого порядка $p\neq 29$ из $C_G(f)$ и $\Sigma=\mathrm{Fix}(f)$. Тогда Σ — пустой граф, $\alpha_1(f)=435$, 29 делит $|\Omega|$ и $\alpha_i(g)$. Ввиду леммы 2.4 имеем $p\leq 23$.

Так как $\chi_2(g)=(5\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/60+29/4$, то $\alpha_1(g)$ делится на 5. Если $p\neq 5$, то $\alpha_1(g)$ делится на $145p$. Если $\alpha_1(g)=0$, то $\alpha_0(g)$ делится на 29, поэтому $p=3$, $\alpha_0(g)=261$ или $p=2$, $\alpha_0(g)=261$.

Если $\alpha_1(g)\neq 0$, то $5p\leq 45$ и $p\leq 7$. В случае $p=7$ имеем $\alpha_1(g)=1015$ и $\alpha_0(g)=248,164,80$, противоречие. В случае $p=5$ число $\alpha_1(g)$ делится на 145, и либо $\alpha_1(g)=145$, $\alpha_0(g)=290$, либо $\alpha_1(g)=1160$, $\alpha_0(g)=145$. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что h — элемент порядка 9 из $C_G(f)$, $g=h^3$. Тогда $\alpha_0(g)=261$ и $\chi_2(g)-116=29-116$ не делится на 9, противоречие с леммой 2.1.

Допустим, что h — элемент порядка 25 из $C_G(f)$, $g=h^5$. Тогда $\alpha_1(g)$ не делится на 25, противоречие.

Так как $v=9\cdot 5\cdot 29$, то $S(G)=O_{3,5,29}(G)$. Если f — элемент порядка 29 из $S(G)$, то $\pi(\bar T)=\{2,3,5\}$ и группа $\bar T$ изоморфна A_5, A_6 или $\mathrm{PSp}_4(3)$. Далее, силовская 2-подгруппа из $\bar T_a$ и элементы порядка 3 и 5 из $\bar T$ фиксируют некоторую вершину, поэтому $\bar T$ фиксирует $a^{\langle f\rangle}$.

Пусть R — силовская 3-подгруппа из G, допускающая f, $R_0=R\cap S(G)$ и $R_1=C_G(f)\cap R_0$. Так как $|R:R_a|=9$, то $\Phi(P_0)$ фиксирует каждую вершину из Γ и, следовательно, R_0 — элементарная абелева 3-группа.

Пусть P — силовская 5-подгруппа из G, допускающая f, $P_0=P\cap S(G)$ и $P_1=C_G(f)\cap P_0$. Так как $|P:P_a|=5$, то $\Phi(P_0)$ фиксирует каждую вершину из Γ и, следовательно, P_0 — элементарная абелева 5-группа.

Если G содержит элемент простого порядка, большего 29, то ввиду [10, табл. 1] группа $\bar T$ изоморфна A_n, $n=31,32,\ldots,35$ или J_4. Противоречие с тем, что $\bar T_a$ — подгруппа из $\bar T$ индекса, делящего $45\cdot 29$.

Пусть G не содержит элементов простого порядка, большего 29. Ввиду [10, таблица 1] группа $\bar T$ изоморфна $\mathrm{L}_2(29)$, $\mathrm{L}_2(17^2)$, $\mathrm{PSp}_4(17)$, $\mathrm{U}_4(17)$, Ru, Fi_{24}', A_{29} или A_{30}. Так как $\bar T_a$ — подгруппа из $\bar T$ индекса, делящего $45\cdot 29$, то либо $\bar T\cong \mathrm{L}_2(29)$ и $\bar T_a$ — диэдральная группа порядка 28, либо $\bar T\cong \mathrm{A}_{29}$ и $\bar T_a\cong \mathrm{A}_{28}$, либо $\bar T\cong \mathrm{A}_{30}$ и $\bar T_a\cong \mathrm{S}_{28}$.

В случаях $\mathrm{L}_2(29)$, A_{30} имеем $|\bar T:\bar T_a|=45\cdot 29$, поэтому группа $V=S(G)$ является элементарной абелевой 3-группой, $|V:V_a|=3$, и группа $\bar T$ действует неприводимо на V.

Лемма доказана.

Завершим доказательсво следствия. Пусть G является расширением элементарной абелевой 3-группы V с помощью группы $L\cong \mathrm{L}_2(29)$. Поскольку $L_a\cong \mathrm{D}_{28}$ для любой вершины a, и в L есть только один сопряженный класс подгрупп, изоморфных D_{28}, то для фиксированной вершины a группа L_a оставляет неподвижной вершину в каждой из L-орбит, т. е. набор длин орбит L_a, лежащих в заданной L-орбите, не зависит от выбора L-орбиты и равен $\{1^1,7^2,14^{12},28^9\}$. Всего имеется три L-орбиты длины 435. Таким образом, $[a]$ содержит не больше двух вершин, фиксируемых L_a, остальные вершины из $[a]$ принадлежат L_a-орбитам, длины которых кратны 7. Противоречие с тем, что $|[a]|=440\equiv 6 \pmod 7$. Итак, граф не существует.

Пусть G является расширением элементарной абелевой 3-группы V с помощью группы $L\cong \mathrm{A}_{30}$. Однако, в A_{30} есть только один сопряженный класс подгрупп, изоморфных S_{28}. При действии A_{30} на 435 точках S_{28} имеет орбиты длин 1, 56, 378, которые нужно повторить 3 раза: по разу для каждой L-орбиты. Как и выше, число $|[a]| = 440$ не раскладывается в сумму длин орбит L_a. Граф не существует.

Если группа G действует транзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа Γ, то для вершины $b \in [a]$ имеем $|G_a : G_{a,b}| = 440$. Допустим, что 3 делит $|S(G)|$, и выберем силовскую 3-подгруппу R из $S(G)$. Тогда R_a фиксирует некоторую вершину из $[a]$. Отсюда R_a фиксирует каждую вершину из $[a]$. Так как $|\Gamma - a^{\perp}| = 864$ и R_a действует полурегулярно на $\Gamma - a^{\perp}$, то $|R_a|$ не делится на 81, противоречие. Значит, 3 не делит $|S(G)|$, противоречие.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cameron P., Van Lint J.** Designs, graphs, codes and their links. ISBN: 0521423856 .
2. **Bannai E., Munemasa A., Venkov B.** The nonexistence of certain tight spherical designs // Algebra and Analis. 2004. Vol. 16, no. 4. P. 1–23.
3. **Nebe G., Venkov B.** On tight spherical designs // Algebra and Analis. 2012. Vol. 24, no. 3. P. 163–171.
4. **Makhnev A.A.** On nonexistence of strongly regular graphs with parameters $(486, 165, 36, 66)$ // Ukrainskii Mat. Zh. 2002. V. 54, № 7. P. 941–949.
5. **Махнев А.А., Хамгокова М.М.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(532, 156, 30, 52)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 930–939.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // European J. Combin. 1993. Vol. 14, no. 3. P. 397–407.
7. **Cameron P.J.** Permutation Groups Cambridge: Cambridge University Press. 1999. 220 p. doi: 10.1017/CBO9780511623677 .
8. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
9. **MacKay M., Siran J.** Search for properties of the missing Moore graph // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432, no. 9. P. 2381–2398. doi: 10.1016/j.laa.2009.07.018 .
10. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Поступила 24.04.2017

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук,
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

Хамгокова Мадина Мухадиновна
канд. физ.-мат. наук,
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: hamgokova.madina@yandex.ru

REFERENCES

1. Cameron P., Van Lint J. *Designs, graphs, codes and their links.* Cambridge: Cambridge University Press, 1981, 240 p. ISBN: 0521423856 .

2. Bannai E., Munemasa A., Venkov B. The nonexistence of certain tight spherical designs. *St. Petersburg Math. J.*, 2005, vol. 16, no. 4, pp. 609–625. doi: 10.1090/S1061-0022-05-00868-X .
3. Nebe G., Venkov B. On tight spherical designs *St. Petersburg Math. J.*, 2013, vol. 24, no. 3, pp. 485–491. doi: 10.1090/S1061-0022-2013-01249-0 .
4. Makhnev A.A. On nonexistence of strongly regular graphs with parameters $(486, 165, 36, 66)$. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 7, pp. 1137–1146. doi: 10.1023/A:1022066425998 .
5. Makhnev A.A., Khamgokova M.M. Automorphisms of strongly regular graph with parameters (532,156,30,52). *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, vol. 12, pp. 930–939. doi: 10.17377/semi.2015.12.078 .
6. Brouwer A.E., Haemers W.H. The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra. *European J. Combin.*, 1993, vol. 14, no. 5, pp. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044 .
7. Cameron P.J. *Permutation groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 220 p. doi: 10.1017/CBO9780511623677 .
8. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A., On automorphisms of distance-regular graph with the intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
9. MacKay M., Siran J. Search for properties of the missing Moore graph. *Linear Algebra Appl.*, 2010, vol. 432, no. 9, pp. 2381–2398. doi: 10.1016/j.laa.2009.07.018 .
10. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on April 24, 2017.

A. A. Makhnev. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

D. V. Paduchikh. Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

M. M. Hamgokova. Kand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: hamgokova.madina@yandex.ru