

УДК 515.162

**КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ
В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ¹****А. А. Акимова, С. В. Матвеев, В. В. Таркаев**

В работе приводится полная таблица зацеплений в утолщенном торе $T^2 \times I$, минимальные диаграммы которых имеют не более 4 перекрестков. Метод построения таблицы заключается в следующем. Сначала перебираются все абстрактные четырехвалентные графы с не более чем 4 вершинами. Затем рассматриваются все неэквивалентные вложения этих графов в тор T^2 . После этого каждая вершина каждого из полученных графов заменяется на перекресток одного из двух возможных типов, когда один участок графа проходит ниже или выше другого. Слова “выше” и “ниже” понимаются в смысле величины координаты соответствующей точки отрезка I . В результате этого процесса получается набор диаграмм зацеплений в $T^2 \times I$. Предложен ряд искусственных приемов, позволивших существенно сократить этот перебор и строго доказать полноту построенной таблицы. Различность полученных зацеплений доказывается с помощью обобщения полинома Кауффмана.

Ключевые слова: зацепление, утолщенный тор, таблица зацеплений.

A. A. Akimova, S. V. Matveev, V. V. Tarkaev. Classification of links of small complexity in a thickened torus.

The paper contains the table of links in the thickened torus $T^2 \times I$ admitting diagrams with at most four crossings. The links are constructed by a three-step process. First we enumerate all abstract regular graphs of degree 4 with at most four vertices. Then we consider all nonequivalent embeddings of these graphs into T^2 . After that each vertex of each of the obtained graphs is replaced by a crossing of one of the two possible types, when a segment of the graph lies lower or above another segment. The words “above” and “lower” are understood in the sense of the coordinate of the corresponding point in the interval I . As a result, we obtain a family of diagrams of knots and links in $T^2 \times I$. We propose a number of artificial tricks that essentially reduce the enumeration and offer a rigorous proof of the completeness of the table. A generalized version of the Kauffman polynomial is used to prove that all the links are different.

Keywords: link, thickened torus, link table.

MSC: 57M99

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-18-31

Введение

В последнее время все больше внимания уделяется изучению глобальных узлов, т.е. узлов в многообразиях, отличных от трехмерной сферы (см., например, [1–4]). Особый интерес вызывают узлы в утолщенных поверхностях (см. например, [5–8]). Объясняется это тем, что, как и в случае узлов в S^3 , узлы в утолщенных поверхностях можно понимать как классы эквивалентности диаграмм. Это позволяет перенести на теорию узлов в утолщенных поверхностях понятия, задачи и подходы классической теории узлов. Вследствие этого новая теория является естественным обобщением классической.

В рамках диаграммного подхода возникает задача составления таблиц узлов и зацеплений в порядке возрастания их сложности, которая измеряется минимальным числом перекрестков задающих их диаграмм. В настоящей работе представлена полная таблица зацеплений в утолщенном торе $T^2 \times I$, минимальные диаграммы которых имеют не более четырех перекрестков. Метод построения таблицы заключается в следующем. Сначала перебираются все абстрактные четырехвалентные графы с не более чем 4 вершинами. Затем рассматриваются

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00690).

все неэквивалентные вложения этих графов в тор T^2 . После этого каждая вершина каждого из полученных графов заменяется на перекресток одного из двух возможных типов, когда один участок графа проходит ниже или выше другого. Слова “выше” и “ниже” понимаются в смысле величины координаты соответствующей точки отрезка I .

В результате этого процесса мы получаем набор диаграмм зацеплений в $T^2 \times I$. Предложен ряд искусственных приемов, позволивших существенно сократить этот перебор и строго доказать полноту построенной таблицы. Различность полученных зацеплений доказывается с помощью обобщения полинома Кауффмана (см. [9; 10]).

Наш основной результат состоит в том, что всего в утолщенном торе существует не более 27 попарно неэквивалентных примарных зацеплений с двумя и более компонентами, обладающих диаграммами с не более чем 4 перекрестками (понятия эквивалентности и примарности определены далее). Зацепления с 1 компонентой в настоящей статье не рассматриваются, поскольку таблицы узлов малой сложности в утолщенном торе были построены нами ранее (см. [11–14]).

1. Используемые понятия

Понятия m -компонентного зацепления и его диаграммы в случае утолщенного тора вводятся так же, как и в классическом случае, с единственным отличием: диаграммы рассматриваются не на сфере S^2 , а на торе T^2 .

Зацепления L и L' в утолщенном торе $\hat{T} = T^2 \times I$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм, переводящий пару $\{\hat{T}, L\}$ в пару $\{\hat{T}, L'\}$.

Проекцией зацепления называется вложенный в тор регулярный четырехвалентный граф. Его вершины мы будем называть *перекрестками проекции*.

Компонентой проекции $G \subset T^2$ называется замкнутый путь на графе G , проходящий через каждый перекресток по правилу “прямо вперед”.

Гранью проекции $G \subset T^2$ называется компонента связности множества $T^2 \setminus G$.

Две проекции *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм тора на себя, переводящий одну проекцию в другую.

Две диаграммы зацеплений в утолщенном торе *эквивалентны*, если одну в другую можно перевести при помощи конечной последовательности преобразований, состоящей из преобразований трех типов: гомеоморфизмов тора на себя, движений Рейдемейстера, одновременной смены типов всех перекрестков. Очевидно, что эквивалентным диаграммам могут отвечать неэквивалентные проекции и наоборот.

Диаграммы и проекции зацеплений мы будем изображать на квадрате, подразумевая, что его противоположные стороны отождествляются по параллельным переносам.

О п р е д е л е н и е 1. *Сложностью диаграммы или проекции* называется число ее перекрестков. Диаграмма зацепления L называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех диаграмм зацепления L .

О п р е д е л е н и е 2. Зацепление в утолщенном торе называется *тривиальным*, если оно обладает диаграммой без перекрестков.

2. Типы зацеплений, не включаемые в таблицу

Перечислим пять типов зацеплений, которые мы не будем включать в таблицу.

Через \hat{T} обозначим утолщенный тор $T^2 \times I$.

Локальные зацепления. Зацепление $L \subset \hat{T}$ называется *локальным*, если существует шар $B \subset \hat{T}$ такой, что $L \subset B$. Локальные зацепления не включаются в таблицу, так как каждому локальному зацеплению в утолщенном торе отвечает зацепление в S^3 .

Кольцевые зацепления. Зацепление $L \subset \hat{T}$ называется *кольцевым*, если в \hat{T} существует неразбивающее собственное кольцо A такое, что $A \cap L = \emptyset$. Кольцевые зацепления не включаются в таблицу, так как каждому такому зацеплению отвечает зацепление в полнотории: разрезаем \hat{T} по кольцу A , получаем полноторие, содержащее исходное зацепление.

Связная сумма зацепления в S^3 и зацепления в утолщенном торе. Классическое понятие связной суммы двух зацеплений в S^3 очевидным образом обобщается на случай, когда одно из слагаемых — это зацепление в утолщенном торе, а другое — зацепление в S^3 : удаляем в обоих слагаемых по шару, пересекающемуся с зацеплением по незаузленной дуге, и затем отождествляем образовавшиеся сферические компоненты края при помощи гомеоморфизма, переводящего выделенные точки в выделенные точки (под выделенными точками понимаются точки пересечения зацеплений с поверхностями удаляемых шаров). Зацепления, представимые в виде связной суммы, не включаются в таблицу, так как они однозначно определяются суммируемыми зацеплениями.

Кольцевая связная сумма двух зацеплений в утолщенном торе (понятие кольцевой суммы предложено С. В. Матвеевым (см. [15; 16])). Рассмотрим два зацепления, лежащие каждое в своем экземпляре утолщенного тора. Пусть в обоих утолщенных торах существуют неразбивающие собственные кольца, пересекающиеся с зацеплениями ровно в одной точке. Разрежем утолщенные торы по этим кольцам. Затем склеим получившиеся многообразия в новый утолщенный тор, отождествив экземпляры разрезающих колец, лежащие на краях склеиваемых многообразий. Склеивку выполним при помощи обращающих ориентацию гомеоморфизмов, отождествляющих выделенные точки, имеющиеся на краях склеиваемых многообразий. Зацепления, представимые в виде кольцевой суммы зацеплений в утолщенном торе, не включаются в таблицу, так как они однозначно определяются упорядоченным набором слагаемых, рассматриваемым с точностью до циклических перестановок (см. [15; 16]).

Расщепляемые зацепления. Зацепление $L \subset \hat{T}$ называется *расщепляемым*, если существует поверхность F , вложенная в \hat{T} , обладающая следующими тремя свойствами:

- 1) F — это либо сфера, либо тор, параллельный $\partial\hat{T}$;
- 2) $F \cap L = \emptyset$;
- 3) F разделяет какие-то две компоненты зацепления L .

Расщепляемые зацепления не включаются в таблицу, так как они обладают диаграммами, являющимися результатом наложения более простых диаграмм. Диаграммы как бы рисуются каждая на своем прозрачном торе, а затем эти торы вкладываются один в другой.

Сформулируем очевидные и легко проверяемые достаточные условия того, что диаграмма задает зацепление одного из отбрасываемых типов.

Лемма 1. 1. Если проекция зацепления содержится в диске, то любая отвечающая ей диаграмма задает локальное зацепление.

2. Если на торе существует кольцо, содержащее проекцию зацепления, то любая отвечающая этой проекции диаграмма задает кольцевое зацепление.

3. Пусть проекция зацепления такова, что на торе имеется вложенная окружность l , обладающая следующими свойствами: l тривиальна, l трансверсально пересекается с проекцией ровно в двух точках, l делит проекцию на две части, в каждой из которых есть хотя бы один перекресток.

Тогда любая отвечающая этой проекции диаграмма либо неминимальна, либо задает зацепление, представимое в виде связной суммы нетривиального зацепления в утолщенном торе и нетривиального зацепления в S^3 .

4. Пусть проекция зацепления такова, что на торе существуют две вложенные окружности l_1, l_2 , обладающие следующими свойствами: $l_1 \cap l_2 = \emptyset$, l_1 и l_2 нетривиальны, каждая из этих окружностей пересекается с проекцией трансверсально ровно в одной точке, и в совокупности они делят проекцию на две части, в каждой из которых имеется хотя бы один перекресток. Тогда любая диаграмма, отвечающая этой проекции, либо неминимальна, либо

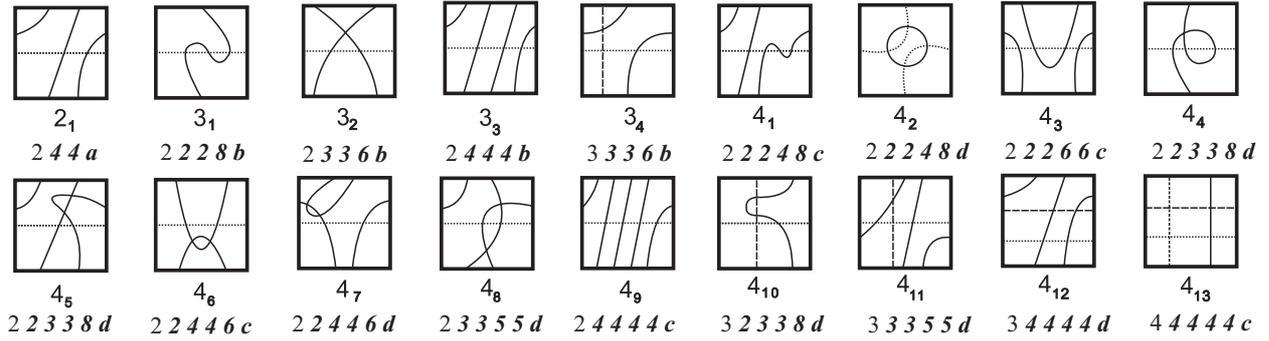


Рис. 1. Существенные проекции зацеплений на торе T^2 .

задает зацепление, представимое в виде кольцевой суммы двух нетривиальных зацеплений в утолщенном торе.

5. Если проекция несвязна или одна из ее компонент пересекается с объединением остальных в единственной точке, то любая диаграмма, отвечающая этой проекции, задает расщепляемое зацепление.

6. Зацепление расщепляемо, если его компоненты можно разбить на два набора так, что на некоторой диаграмме рассматриваемого зацепления во всех перекрестках, где пересекаются компоненты из различных наборов, компоненты из первого набора проходят над компонентами из второго.

О п р е д е л е н и е 3. Проекция зацепления называется *существенной*, если она не является проекцией узла (т.е. число ее компонент больше 1) и к ней неприменим ни один из пп. 1–5 леммы 1.

3. Перечисление графов и проекций

Теорема 1. На торе имеется ровно 18 попарно неэквивалентных существенных проекций с не более чем 4 перекрестками (см. рис. 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем в четыре этапа.

Э т а п 1. Перечисление абстрактных графов, вложения которых могут быть существенными проекциями.

Лемма 2. Любая существенная проекция зацепления с не более чем 4 перекрестками является вложением в тор одного из графов a, b, c, d , изображенных на рис. 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся в том, что любая существенная проекция одновременно обладает следующими тремя свойствами: она связна, на ней нет разбивающих пар ребер, на ней нет петель. Истинность доказываемой леммы будет обеспечена тем, что среди всех регулярных четырехвалентных графов с не более чем 4 вершинами имеется ровно 4 графа, которые одновременно обладают этими тремя свойствами. Это графы a, b, c, d , изображенные на рис. 2.

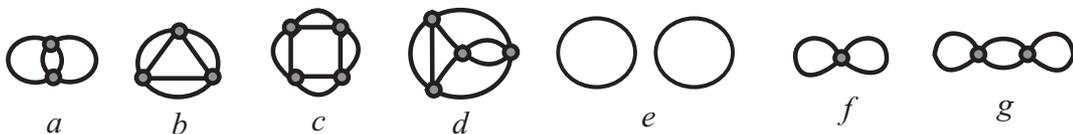


Рис. 2. Графы, используемые при построении существенных проекций.

Существенная проекция не может быть несвязной, так как в противном случае к ней был бы применим п. 5 леммы 1.

Предположим, что проекция G связна и на ней имеется разбивающая пара ребер $\{e_1, e_2\}$. Разрежем G по внутренним точкам ребер e_1, e_2 , удалив из G малые окрестности точек разреза. Пара $\{e_1, e_2\}$ разбивающая, следовательно, полученный в результате разрезания граф \bar{G} несвязен. Число его компонент связности равно двум, обозначим их через \bar{G}_1 и \bar{G}_2 (если бы компонент связности было три, то компоненты проекции, проходящие по ребрам e_1, e_2 , не могли бы замкнуться, а больше трех компонент связности в результате разрезания двух ребер образоваться не может).

Компоненты связности множеств $T^2 \setminus \bar{G}_1$ и $T^2 \setminus \bar{G}_2$ могут быть либо дисками, либо кольцами с нетривиальными на торе осевыми линиями, либо торами с дыркой. По построению $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \emptyset$, следовательно, не может быть такого, чтобы каждый из этих графов разрезал тор на диски. Значит, возможны только две ситуации.

Первая, когда в дополнении хотя бы к одному из графов (пусть это \bar{G}_1) присутствует тор с дыркой. Тогда \bar{G}_1 содержится в диске. Рассмотрим окружность $l \subset T^2 \setminus \bar{G}$, изотопную краю этого диска. Если $l \cap G = \emptyset$, то к исходной проекции применим п. 1 леммы 1. Если $l \cap G \neq \emptyset$, то найдется изотопная l окружность l' , трансверсально пересекающаяся с G ровно в двух точках, лежащих внутри ребер e_1 и e_2 . В этом случае к G применим п. 3 леммы 1.

Вторая, когда торов с дыркой нет ни в $T^2 \setminus \bar{G}_1$, ни в $T^2 \setminus \bar{G}_2$. В этом случае в дополнениях обоих графов есть кольца с нетривиальными на торе осевыми линиями. Значит, тор является объединением двух колец таких, что \bar{G}_1 содержится во внутренности одного, а \bar{G}_2 — во внутренности второго. Тогда на торе существуют две параллельные нетривиальные окружности, изотопные краевым окружностям этих колец, трансверсально пересекающиеся с G , одна — во внутренней точке ребра e_1 , другая — во внутренней точке ребра e_2 . Значит, к G применим п. 4 леммы 1.

Следовательно, разбивающих пар ребер на существенной проекции быть не может.

Предположим, что на проекции G имеется петля e . Инцидентный петле перекресток обозначим через v . Возможны три ситуации: e ограничивает диск, e нетривиальна и подходит к v с противоположных сторон, e нетривиальна и подходит к v с неположенных сторон. Разберем эти ситуации.

Пусть e ограничивает диск. Если отличное от e ребро, инцидентное v , тоже является петлей, то проекция G либо несвязна, либо (когда вторая петля тривиальна) локальна, либо (когда вторая петля нетривиальна) является кольцевой. Во всех этих случаях проекция несущественна. Если отличные от e ребра, инцидентные перекрестку v , различны, то они составляют разбивающую пару, что, как установлено выше, противоречит существенности проекции G .

Пусть e образует нетривиальную окружность, подходящую к v с противоположных сторон. Тогда e является компонентой проекции, которая пересекается с остальными в единственной точке v . В этом случае к G применим п. 5 леммы 1.

Если окружность, образуемая петлей e , нетривиальна и подходит к v с неположенных сторон, то на T^2 существует нетривиальная окружность, параллельная e и не имеющая с G общих точек. В этом случае к G применим п. 2 леммы 1.

Лемма 2 доказана.

Э т а п 2. Построение существенных проекций без двуугольных граней.

Лемма 3. *На торе существует ровно 9 проекций с числом перекрестков не более 4, которые существенны и не обладают двуугольными гранями.*

Это проекции $\mathbf{2}_1, \mathbf{3}_2, \mathbf{3}_3, \mathbf{3}_4, \mathbf{4}_8, \mathbf{4}_9, \mathbf{4}_{11}, \mathbf{4}_{12}, \mathbf{4}_{13}$ (см. рис. 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2 существенная проекция G является вложением одного из графов a, b, c, d , изображенных на рис. 2. Разберем эти возможности.

Проекция G является вложением графа a (см. рис. 2). На G нет двуугольных граней, значит, любая пара ребер проекции G является нетривиальной окружностью. То есть G —

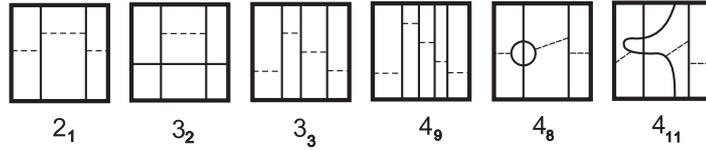


Рис. 3. Построение проекций применением M^{-1} вдоль пунктирных дуг.

это две нетривиальные окружности, пересекающиеся в двух точках. Следовательно, с точностью до гомеоморфизма G является объединением меридиана тора и кривой типа $(1, 2)$. Это проекция 2_1 (см. рис. 1).

Проекция G является вложением графа b (см. рис. 2). На проекции нет двуугольных граней, значит, каждое из двойных ребер является нетривиальной окружностью. При этом любые две из этих окружностей имеют единственную общую точку. Если все три окружности изотопны, то имеем проекцию 3_3 (см. рис. 3). Если две окружности изотопны друг другу и неизотопны третьей (два касающихся меридиана и пересекающая их параллель), то имеем проекцию 3_2 (см. рис. 3). Если все три окружности неизотопны (меридиан, параллель и кривая типа $(1, 1)$), то имеем проекцию 3_4 (см. рис. 1).

Проекция G является вложением графа c (см. рис. 2). Двуугольников на проекции нет, значит, все двойные ребра являются нетривиальными окружностями. При этом они разбиты на две пары, каждая из которых состоит из двух окружностей, не пересекающихся между собой. Если окружности, входящие в разные пары, не изотопны, то имеем проекцию 4_{13} . Если все четыре окружности попарно изотопны, то имеем проекцию 4_9 (см. рис. 3).

Проекция G является вложением графа d (см. рис. 2). На G есть два двойных ребра, не имеющих общих точек. В силу отсутствия двуугольников они являются непересекающимися нетривиальными окружностями, обозначим их через c_1 и c_2 . Оставшиеся 4 ребра проекции образуют окружность, обозначим ее через c_3 . Окружность c_3 пересекается по два раза и с c_1 , и с c_2 . Причем при обходе окружности c_3 точки ее пересечения с другими окружностями чередуются. Если окружность c_3 тривиальна, то имеем проекцию 4_8 (см. рис. 3). Если окружность c_3 нетривиальна и неизотопна c_1 и c_2 , то имеем проекцию 4_{12} . Если все три окружности попарно изотопны, то имеем проекцию 4_{11} (см. рис. 3).

Лемма 3 доказана.

Э т а п 3. Построение существенных проекций с двуугольной гранью.

Обозначим через L преобразование проекций, аналогичное второму движению Рейдемейстера (см. рис. 2). На месте удаленного при помощи преобразования L двуугольника проведем точечную дугу с концами на разведенных кривых. Эту точечную дугу будем использовать для обозначения места применения обратного преобразования L^{-1} . Преобразование L уничтожает двуугольную грань проекции и уменьшает на 2 число ее перекрестков. Преобразование L^{-1} создает двуугольную грань и увеличивает на 2 число перекрестков.

Через M обозначим преобразование проекции, устраняющее один ее перекресток (см. рис. 4). При выполнении преобразования M проекция разрезается по устраняемому перекрестку, при этом объединяются две грани, содержащие пару инцидентных удаленному перекрестку вертикальных углов. Место выполнения преобразования M будем помечать пунктирной дугой. Пунктирная дуга, как и точечная, будет использоваться на рисунках для обозначения места выполнения обратного преобразования M^{-1} .

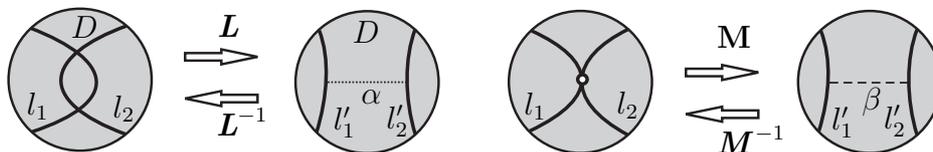


Рис. 4. Преобразования L и M .

Пусть на проекции G имеется хотя бы одна двуугольная грань. Через $F(G)$ обозначим вложенный в T^2 граф, получаемый из G в результате устранения всех имеющихся на G двуугольных граней, при помощи преобразования L .

Лемма 4. Пусть проекция G , обладающая хотя бы одной двуугольной гранью, существенна и ее сложность не превосходит 4. Тогда граф $F(G)$ является вложением в тор одного из графов a , e , f и g , изображенных на рис. 2.

Доказательство. Согласно лемме 2 проекция G является вложением в тор одного из графов a, b, c, d (см. рис. 2). Разберем эти возможности.

G является вложением графа a . В этом случае $F(G)$ является вложением в тор графа e (см. рис. 2).

G является вложением графа b . В этом случае $F(G)$ является вложением графа f (см. рис. 2).

G является вложением графа c . Если на проекции G имеется одна двуугольная грань или две двуугольные грани с общей вершиной, то получаем граф $F(G)$, являющийся вложением графа a . Если на проекции G имеются две двуугольные грани без общих вершин, то в результате двукратного применения преобразования L получаем граф $F(G)$, являющийся вложением графа e (см. рис. 2).

G является вложением графа d . Если на проекции G имеется одна двуугольная грань, то в результате ее устранения получаем вложение графа g , если две, то получаем вложение окружности. Но преобразование L не изменяет числа компонент проекции, следовательно, исходная проекция в последнем случае является проекцией узла, что противоречит ее существенности.

Лемма 4 доказана.

Пусть на вложенном в тор графе проведены точечные дуги (одна или две) такие, что вершины графа (если они имеются) не являются концами этих дуг. Будем называть точечную дугу или пару точечных дуг *подходящей*, если отвечающее ей преобразование L^{-1} дает существенную проекцию.

Лемма 5. Пусть проекция G , обладающая хотя бы одной двуугольной гранью, существенна и ее сложность не превосходит 4. Тогда

1. Объединение графа $F(G)$ и точечных дуг разбивает тор на диски.
2. Если граф $F(G)$ содержит петлю, то на этой петле лежит один из концов точечной дуги.
3. Если граф $F(G)$ снабжен одной точечной дугой, то либо концы точечной дуги располагаются на разных ребрах, либо она подходит к одному и тому же ребру с разных сторон.
4. Если граф $F(G)$ снабжен парой точечных дуг, то сформулированное в предыдущем пункте условие выполняется хотя бы для одной из дуг.

Доказательство. В случае, если не выполняется условие 1, проекция G является локальной или кольцевой. Если не выполняются свойства 2–4, то проекция G обладает петлями.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. На торе существуют ровно 9 проекций с числом перекрестков не более чем 4, которые существенны и обладают хотя бы одной двуугольной гранью.

Это проекции 3_1 , 4_1 – 4_7 , 4_{10} (см. рис. 1).

Доказательство. Согласно лемме 4 граф $F(G)$ является вложением одного из графов a, e, f, g , изображенных на рис. 2. Разберем эти возможности.

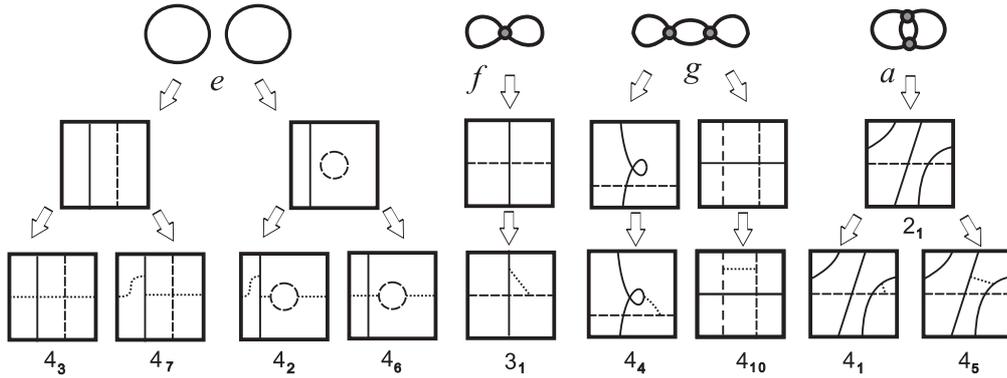


Рис. 5. Вложения в тор графов e , f , g и a . Точечные дуги показывают место выполнения преобразований L^{-1} .

$F(G)$ является вложением графа a (см. рис. 2). Граф $F(G)$ — это две окружности, пересекающиеся в двух точках. Двугольных граней на $F(G)$ нет (напомним, что граф $F(G)$ получен в результате устранения всех двугольников), значит, обе окружности, составляющие $F(G)$, нетривиальны. Причем они и неизотопны, так как в противном случае имела бы двугольная грань. Следовательно, с точностью до гомеоморфизма $F(G)$ — это меридиан и кривая типа $(1, 2)$.

Все ребра рассматриваемой проекции равноправны. Поместим на какое-то из них один конец точечной дуги α . Подходить к тому же ребру с другой стороны α не может, так как $F(G)$ разрезает тор на диски. Значит, второй конец дуги α может располагаться либо на ребре, входящем в ту же окружность, что и ребро, на котором расположен первый конец, либо на ребре, входящем в другую окружность. Применив преобразование L^{-1} , получим соответственно проекции 4_1 и 4_5 (см. рис. 5).

$F(G)$ является вложением графа e (см. рис. 2). Согласно п. 1 леммы 5 объединение $F(G)$ и точечных дуг делит тор на диски. Если обе окружности тривиальны, то обеспечить это нельзя. Значит, хотя бы одна из окружностей нетривиальна. Если обе окружности нетривиальны, то имеется два варианта проведения точечных дуг. В результате выполнения соответствующих преобразований L^{-1} получаются проекции 4_3 и 4_7 . Если одна окружность тривиальна, а другая нет, то имеются тоже два варианта проведения точечных дуг, дающие проекции 4_2 и 4_6 (см. рис. 5).

$F(G)$ является вложением графа f (см. рис. 2). Если хотя бы одна из петель ограничивает диск, то на графе $F(G)$ и, следовательно, на G будет всего одна компонента, что противоречит существенности проекции G . Значит, обе петли нетривиальны. В силу п. 2 леммы 5 необходимо, чтобы точечная дуга имела концы на различных петлях. В результате выполнения соответствующего такой дуге преобразования L^{-1} получим проекцию 3_1 .

$F(G)$ является вложением графа g (см. рис. 2). На графе $F(G)$ имеется две петли, значит, в силу п. 2 леммы 5 концы точечной дуги лежат на различных петлях. Двугольных граней на $F(G)$ нет, значит, двойное ребро составляет нетривиальную окружность. Если обе петли тривиальны, то на графе $F(G)$ имеется всего одна компонента, следовательно, проекция G является в этом случае проекцией узла, т. е. несущественна. Пусть одна петля тривиальна, а другая нет. Тогда нетривиальные окружности, образуемые двойным ребром и петлей, могут быть изотопными или неизотопными. Если они изотопны (два касающихся меридиана), то на $F(G)$ опять имеется единственная компонента. Если неизотопны, то в результате выполнения преобразования L^{-1} получим проекцию 4_4 . Пусть обе петли нетривиальны. Тогда $F(G)$ — это два меридиана, пересеченные параллелью. В этом случае получим проекцию 4_{10} (см. рис. 5).

Лемма 6 доказана.

Э т а п 4. Доказательство различности построенных существенных проекций.

Докажем, что все проекции на рис. 1 попарно неэквивалентны. Грани проекции являются многоугольниками. Сопоставим каждой проекции строку $\{m i_1 i_2 \dots i_k x\}$, в которой в начале стоит число компонент проекции, затем располагаются упорядоченные по неубыванию числа углов ее граней, и в конце стоит тип графа проекции $x \in \{a, b, c, d\}$. Строки, отвечающие построенным проекциям, приведены на рис. 1. Таких строк достаточно, чтобы различить любые две проекции на рис. 1, за исключением пары $(4_4, 4_5)$. Но проекции $(4_4, 4_5)$ неэквивалентны, потому что в первом случае треугольные грани имеют общее ребро, а во втором не имеют.

Теорема 1 доказана.

4. Основной результат

О п р е д е л е н и е 4. *Зацепление* $L \subset T^2 \times I$ называется *условно примарным*, если его минимальная диаграмма реализуется на существенной проекции.

Теорема 2. *В утолщенном торе существует ровно 27 различных условно примарных зацеплений, сложность которых не превосходит 4. Задающие их диаграммы изображены на рис. 6.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для построения полного списка условно примарных зацеплений в утолщенном торе, сложность которых не превосходит 4, достаточно рассмотреть все существенные проекции, построенные при доказательстве теоремы 1 (см. рис. 1), и на каждой из них перебрать все возможные варианты типов перекрестков (т. е. выбора верхней и нижней дуги). Приводимые ниже соображения позволили нам избежать полного перебора всех вариантов, не потеряв ни одной минимальной диаграммы.

1. Каждая компонента зацепления содержит оба типа перекрестков (т. е. в каком-то перекрестке она проходит сверху, а в каком-то снизу). В противном случае согласно п. 6 леммы 1 зацепление является расщепляемым.

2. При рассмотрении каждой проекции тип одного перекрестка можно зафиксировать, в силу чего для проекции с n перекрестками достаточно рассмотреть 2^{n-1} вариантов.

3. Перекрестки в вершинах двугольной грани должны быть такими, чтобы второе преобразование Рейдемейстера было к этому двугольнику неприменимо.

Выполнив перебор и отбросив очевидные дубликаты, мы получили набор, состоящий из 27 диаграмм, изображенных на рис. 6.

Различность всех зацеплений на рис. 6 можно показать, используя обобщенный полином Кауффмана (см. [9–12]). Напомним его определение.

Пусть L — зацепление в утолщенном торе и D — его диаграмма. Тогда

$$K(L, a, x) = (-a)^{-3w(D)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta(s)},$$

где

- сумма, как и в случае зацеплений в S^3 , берется по всем состояниям диаграммы D , т. е. по всем возможным вариантам расстановки маркеров типа a и типа b в ее перекрестках;
- $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ обозначают соответственно число маркеров типа A и типа B в состоянии s ; $\gamma(s)$ и $\delta(s)$ обозначают соответственно число тривиальных и нетривиальных окружностей, полученных в результате разрешения всех перекрестков диаграммы; выбор способа разрешения перекрестка определяется маркером, сопоставленным этому перекрестку в состоянии S ;
- $w(D)$ обозначает число скручивания диаграммы D .

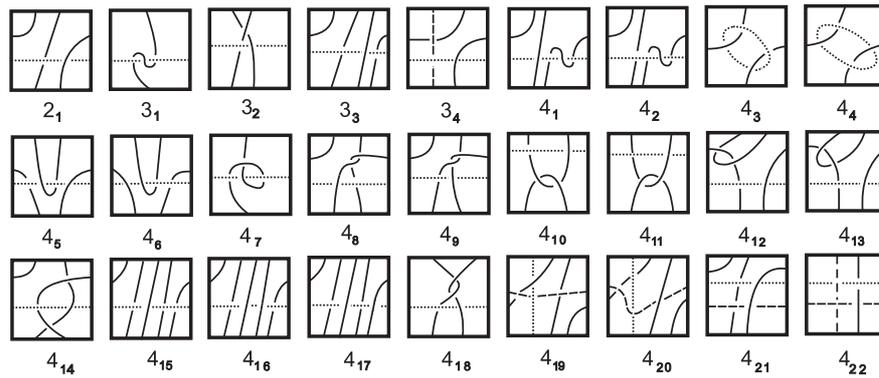


Рис. 6. Условно примарные зацепления в $T^2 \times I$ сложности, не превосходящей 4.

Значения полиномов Кауффмана, приведенные в табл. 1, были получены путем прямого вычисления. Все полиномы оказались различными. Следовательно, все зацепления, приведенные на рис. 6, попарно неэквивалентны.

Теорема 2 доказана.

Будем говорить, что зацепление $L \subset T^2 \times I$ имеет тип $(m; n)$, если L состоит из m компонент и его минимальная диаграмма имеет точно n перекрестков, и что проекция $G \subset T^2$ имеет тип $(m; n)$, если на ней имеется точно m компонент и n перекрестков. В табл. 2 приведено количество проекций и зацеплений типа $(m; n)$, где число компонент $m = 2, 3, 4$ и число перекрестков $n = 2, 3, 4$. Зацепления типов $(m; 1)$, где $m \geq 2$, и $(m; n)$, где $m \geq 5, n \leq 4$, существуют, но, как несложно проверить, являются расщепляемыми и по этой причине были отброшены.

5. О примарности табличных зацеплений

О п р е д е л е н и е 5. Зацепление в утолщенном торе называется *составным*, если оно не представимо ни в виде связной суммы нетривиальных зацеплений в \mathbb{S}^3 и в утолщенном торе, ни в виде кольцевой суммы двух нетривиальных зацеплений в утолщенном торе. Зацепление в утолщенном торе называется *примарным*, если оно не является ни локальным, ни кольцевым, ни расщепляемым, ни составным.

Теорема 3. В утолщенном торе существует не более чем 27 примарных зацеплений, сложность которых не превосходит 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что примарное зацепление является условно примарным (см. определение 4). Следовательно, число примарных зацеплений сложности не более 4 не превосходит числа условно примарных зацеплений.

Теорема 3 доказана.

Вопрос о том, содержит ли построенная таблица непримарные зацепления, остается открытым. Мы можем утверждать только то, что ни одно из построенных зацеплений не относится к четырем из пяти отбрасываемых типов (кроме представимости в виде кольцевой суммы). Для доказательства этого достаточно убедиться, что на их дополнительных пространствах имеется гиперболическая структура. Действительно, если зацепление локальное или расщепляемое, то в его дополнительном пространстве имеется существенная сфера или существенный тор. Если зацепление кольцевое или представимое в виде связной суммы зацепления в S^3 и зацепления в утолщенном торе, то в его дополнительном пространстве имеется существенное кольцо. Во всех этих случаях дополнительное пространство гиперболической структурой не обладает.

При помощи компьютерной программы “SnapPy” (см. [17]) была проведена проверка наличия гиперболической структуры на дополнительных пространствах зацеплений, включенных

**Полиномы примарных зацеплений в $T^2 \times I$,
минимальные диаграммы которых имеют $n \leq 4$ перекрестков,
представленных на рис. 6**

- 2₁: $(-a^{-4} - 2 - a^4) + 2x^2$
 3₁: $(-a^{-16} + a^{-12} - a^{-8} - a^{-6})x$
 3₂: $(a^{-8} - a^{-4} - 2a^{-2})x$
 3₃: $(a^{-8} + a^{-4} - a^{-2} + 1)x - a^{-4}x^3$
 3₄: $(-a^{-10} + a^{-6} + 3a^{-2} + a^2) - 3a^{-2}x^2$
 4₁: $(-a^{-16} - 2a^{-4} - 1) + (a^{-12} - a^{-8} + 2a^{-4})x^2$
 4₂: $(-a^{-20} - a^{-12} - 2a^{-8}) + (a^{-20} - a^{-16} + a^{-12} + a^{-8})x^2$
 4₃: $(-a^{-18} - a^{-16} + 2a^{-12} - a^{-8} - a^{-6})x$
 4₄: $(a^{-8} - 2a^{-4} - 2a^{-2} + 1 + a^2 - a^6)x$
 4₅: $(a^{-8} - 2 + a^8) + (-a^{-4} + 3 - a^4)x^2$
 4₆: $(2a^{-16} - 2a^{-8}) + (a^{-20} - 2a^{-16} + a^{-12} + a^{-8})x^2$
 4₇: $(a^{-8} - 2a^{-4} - a^{-2} + 1 + a^2 - a^4 - a^6)x$
 4₈: $(a^{-12} - 2a^{-8} - 3a^{-4}) + (-a^{-12} + a^{-8} + 2a^{-4})x^2$
 4₉: $(-a^{-16} + a^{-12} - 3a^{-4} - 1) + (-a^{-8} + 3a^{-4})x^2$
 4₁₀: $(-a^{-6} - 2a^{-4} - a^{-2} + 2 + a^2 - a^6)x$
 4₁₁: $(-a^{-18} + a^{-14} + 2a^{-12} - a^{-10} - 2a^{-8} - a^{-6})x$
 4₁₂: $(-2a^{-4} - 1 + 2a^4 + a^8) + (a^{-4} + 2 - 2a^4)x^2$
 4₁₃: $(a^{-20} + a^{-16} - 2a^{-12} - a^{-8} + a^{-4}) + (-2a^{-16} + 3a^{-12})x^2$
 4₁₄: $(a^{-8} - a^{-4} - 4 - a^4 + a^8) + (-a^{-4} + 4 - a^4)x^2$
 4₁₅: $(a^{-12} - a^{-4}) + (-a^{-12} - 2a^{-8})x^2 + a^{-8}x^4$
 4₁₆: $(-a^{-4} - 1 - a^4)x^2 + x^4$
 4₁₇: $(a^{-8} - 2 + a^8) + (-2a^{-4} + 1 - 2a^4)x^2 + x^4$
 4₁₈: $(a^{-14} - a^{-10} + 2a^{-6} + 2a^{-4})x$
 4₁₉: $(a^{-14} - 2a^{-10} + 2a^{-4} - a^{-2})x + a^{-6}x^3$
 4₂₀: $(-a^{-6} - a^{-2} + 2)x + a^{-2}x^3$
 4₂₁: $(-a^{-6} + a^{-2} + 4 + a^2 - a^6)x$
 4₂₂: $(a^{-8} - 2a^{-4} - 6 - 2a^4 + a^8) + 6x^2$

Количество проекций и зацеплений типа $(m; n)$ на торе

| Компонент | Перекрестки | Проекции | Зацепления |
|-----------|-------------|----------|------------|
| 2 | 2 | 1 | 1 |
| | 3 | 3 | 3 |
| | 4 | 9 | 17 |
| 3 | 3 | 1 | 1 |
| | 4 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 1 |
| Всего | | 13 | 27 |

в таблицу. Ответ во всех случаях оказался положительным. Следовательно, все табличные зацепления не являются ни локальными, ни кольцевыми, ни расщепляемыми, ни представимыми в виде связной суммы зацепления в утолщенном торе с зацеплением в S^3 .

Вопрос о непредставимости табличных зацеплений в виде кольцевой суммы на настоящий момент остается открытым.

В табл. 3 приведены изометрические сигнатуры и величины гиперболических объемов дополнительных пространств табличных зацеплений. Изометрическая сигнатура (см. [18]) — это один из способов описания триангуляции многообразия. Приведенные сигнатуры получены при помощи компьютерной программы “3-Manifold Recognizer” (см. [19]). Величины гиперболических объемов были вычислены при помощи компьютерной программы “SnapPy” (см. [17]).

Т а б л и ц а 3

Изометрические сигнатуры и гиперболические объемы дополнительных пространств табличных зацеплений

| Имя | Изометрическая сигнатура | Гиперболический объем |
|-------------------|---|-----------------------|
| 2 ₁ : | <i>ivLAPQcdefehgghhbbabaabb</i> | 7.32772475342 |
| 3 ₁ : | <i>mLvwwAQQQcgfhhkikjlllaaaaaaaaa</i> | 7.3277247534 |
| 3 ₂ : | <i>mLvLAzAQQcegfgiikjllklaaaacccaaccc</i> | 7.327724753 |
| 3 ₃ : | <i>mLvwwAQQQcgfhhjjikklllaaaaaaaaa</i> | 8.9293178231 |
| 3 ₄ : | <i>mvLAzPwQQdefeghhjkllklbbabbbbaaaab</i> | 10.1494160641 |
| 4 ₁ : | <i>qvLALLPzPAQkdefhkhimlonlppnopbbaabbbbaaaabbbb</i> | 10.6669791338 |
| 4 ₂ : | <i>qLLvwPvAAQQkcefjhiiolmnlppoppaaacccaaccccccc</i> | 8.9293178231 |
| 4 ₃ : | <i>qLvwwAzAMQQkcgjggnlompklmoppoaaacccaacccaaccccc</i> | 10.1494160641 |
| 4 ₄ : | <i>qLvwwAzAAQQkcgjggnlmmklppoppoaaacccaacccaaccccc</i> | 10.991587130 |
| 4 ₅ : | <i>qvLALLzAPAQkdefgkhimlonlppnopbbaabbbbaaaabbbb</i> | 12.1792992769 |
| 4 ₆ : | <i>qLvwwAMAPAQkcgjgihhmnklopoppoaaacccaacccaacccaac</i> | 10.666979134 |
| 4 ₇ : | <i>qLvwwALwQQQkcgfgnlpjkmkonpnopaacccaacccaaccccc</i> | 10.149416064 |
| 4 ₈ : | <i>qLLvwLAzQPQkcefijlnkjonmtpoppoaaacccaacccaaccccc</i> | 7.32772475342 |
| 4 ₉ : | <i>qvLALvPQMLQkdefghjijmlnmpoopppbaabbbbaaaabbbb</i> | 11.7518361653 |
| 4 ₁₀ : | <i>qLvLwAzAQQkcfjggljkpompnopppaaacccaacccaaccccc</i> | 10.149416064 |
| 4 ₁₁ : | <i>qLvLwAzAQQkcfjggljkpompnopppaaacccaacccaaccccc</i> | 10.1494160641 |
| 4 ₁₂ : | <i>qLLvwLAzAQQkcefijlnkjonmtpoppoaaacccaacccaaccccc</i> | 10.1494160641 |
| 4 ₁₃ : | <i>qvLALvPQMLQkdefghjijmlnmpoopppbaabbbbaaaabbbb</i> | 12.8448530047 |
| 4 ₁₄ : | <i>qvLALvPQMLQkdefhhiijmlnmpoopppbaabbbbaaaabbbb</i> | 13.9396856802 |
| 4 ₁₅ : | <i>qLLvwPvAAQQkcefjhiiolmnlppoppoaaacccaaccccccc</i> | 9.4918896866 |
| 4 ₁₆ : | <i>qLvwwAMAPAQkcgkghhmlnkopnppoaaacccaacccaacccaac</i> | 11.147218226 |
| 4 ₁₇ : | <i>qvLALLPzPAQkdefhkhimlonlppoopbbaabbbbaaaabbbb</i> | 14.655449507 |
| 4 ₁₈ : | <i>qLvwwAAMLQQkcgfhhkknmlolmoppoaaacccaacccaaccccc</i> | 10.149416064 |
| 4 ₁₉ : | <i>qLvwwAMQPPPkcgfhhikjjnmpoppoaaacccaacccaacccaac</i> | 12.709173114 |
| 4 ₂₀ : | <i>qLvwwAMMMPQkcgfhhjknmkomppoaaacccaacccaaccccc</i> | 10.149416064 |
| 4 ₂₁ : | <i>qLvwwPzLQQQkcgfgpmlomknlmpoaaacccaacccaaccccc</i> | 7.328 |
| 4 ₂₂ : | <i>qvLAzPwwQLQkdefeghhjnlmpoopppbabbbbaabaabaab</i> | 14.655449507 |

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дроботухина Ю. В.** Аналог многочлена Джоунса для зацеплений в RP^3 и обобщение теоремы Кауффмана — Мурасуги // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 3. С.171–191.
2. **Miyazaki Katura** Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 313, no. 2. P. 785–804.
3. **Gabrovšek Boštjan** Tabulation of prime knots in lens spaces // Mediterr. J. Math. 2017. Vol. 14, no. 2. Art. 88. 24 p.
4. **Costantino F.** Colored Jones invariants of links in $\#_k S^2 \times S^1$ and the Volume Conjecture // J. Lond. Math. Soc. (2). 2007. Vol. 76, no. 2. P. 1–15.
5. **Kuperberg G.** What is a virtual link? // Algebr. Geom. Topol. 2003. Vol. 3. P. 587–591.
6. **Матвеев С.В.** Разложение гомологически тривиальных узлов в $F \times I$ // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 1. С. 13–15.
7. **Turaev V.** Cobordism of knots on surfaces // J. Topol. 2008. Vol. 1, no. 2. P. 285–305.
8. **Adams Colin, Fleming Thomas, Levin Michael, Turner Ari M.** Crossing number of alternating knots in $S \times I$ // Pacific J. Math. 2002. Vol. 203, no. 1. P. 1–22.
9. **Kauffman L.H.** State models and the Jones polynomial // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 395–407.
10. **Dye H. A., Kauffman, Louis H.** Minimal surface representations of virtual knots and links // Algebr. Geom. Topol. 2005. Vol. 5. P. 509–535.
11. **Akimova A.A., Matveev S.V.** Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings // J. Knot Theory Ramifications. 2014. Vol. 23, no. 6, 1450031. 19 p.
12. **Акимова А.А., Матвеев С.В.** Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе // Вестн. НГУ. Сер. “Математика. Механика. Информатика”. 2012. Т. 12, № 3. С. 10–21.
13. **Акимова А.А.** Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков // Вестн. ЮУрГУ. Сер. “Математика. Механика. Физика”. 2013. Т. 5, № 1. С. 8–11.
14. **Акимова А.А.** Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные октаэдральные диаграммы которых не лежат в кольце // Вестн. ЮУрГУ. Сер. “Математика. Механика. Физика”. 2015. Т. 7, № 1. С. 5–10.
15. **Matveev S.V.** Prime decompositions of knots in $T \times I$ // Topol. Appl. 2011. Vol. 159, no. 7. P. 1820–1824.
16. **Korablev Ph., Matveev S.V.** Reductions of knots in thickened surfaces and virtual knots // Dokl. Math. 2011. Vol. 83, no. 2. P. 262–264.
17. SnapPy 2.5.4 documentation [e-resource]. URL: <http://www.math.uic.edu/t3m/SnapPy>.
18. **Burton B.** The pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations // Proc. of the Twenty-seventh annual symposium on computational geometry (SCG’11). NY: ACM, 2011. P. 153–162.
19. Atlas of 3-Manifolds [site] / Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University. URL: <http://www.matlas.math.csu.ru>.

Акимова Алена Андреевна

канд. физ.-мат. наук

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

e-mail: akimovaaa@susu.ru

Поступила 31.08.2017

Матвеев Сергей Владимирович

д-р физ.-мат. наук, профессор, академик РАН

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Челябинский государственный университет, Челябинск

e-mail: matveev@csu.ru

Таркаев Владимир Викторович

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

старший науч. сотрудник

Челябинский государственный университет, Челябинск

e-mail: v.tarkaev@gmail.com

REFERENCES

1. Drobotukhina Yu.V. An analogue of the Jones polynomial for links in RP^3 and a generalization of the Kauffman–Murasugi theorem. *Leningrad Math. J.*, 1991, vol. 2, no. 3, pp. 613–630.
2. Miyazaki Katura. Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, vol. 313, no. 2, pp. 785–804. doi: 10.1090/S0002-9947-1989-0997679-2.
3. Gabrovšek Boštjan. Tabulation of prime knots in lens spaces. *Mediterr. J. Math.*, 2017, vol. 14, no. 2, Art. 88, 24 p. doi: 10.1007/s00009-016-0814-5.
4. Costantino F. Colored Jones invariants of links in $\#_k S^2 \times S^1$ and the volume conjecture. *J. Lond. Math. Soc.* (2), 2007, vol. 76, no. 2, pp. 1–15. doi: 10.1112/jlms/jdm029.
5. Kuperberg G. What is a virtual link? *Algebr. Geom. Topol.*, 2003, vol. 3, pp. 587–591.
6. Matveev S.V. Decomposition of homologically trivial knots in $F \times I$. 2010, *Dokl. Math.*, vol. 82, no. 1, pp. 511–513. doi: 10.1134/S1064562410040034.
7. Turaev V. Cobordism of knots on surfaces. *J. Topol.*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 285–305. doi: 10.1112/jtopol/jtn002.
8. Adams Colin, Fleming Thomas, Levin Michael, Turner Ari M. Crossing number of alternating knots in $S \times I$. *Pacific J. Math.*, 2002, vol. 203, no. 1, pp. 1–22.
9. Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 395–407. doi: 10.1016/0040-9383(87)90009-7.
10. Dye H. A., Kauffman, Louis H. Minimal surface representations of virtual knots and links. *Algebr. Geom. Topol.*, 2005, vol. 5, pp. 509–535. doi: 10.2140/agt.2005.5.509.
11. Akimova A.A., Matveev S.V. Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings. *J. Knot Theory Ramifications*, 2014, vol. 23, no. 6, 1450031, 19 p. doi: 10.1142/S021821651450031X.
12. Akimova A.A., Matveev S.V. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 202, no. 1, pp. 1–12. doi: 10.1007/s10958-014-2029-2.
13. Akimova A.A. Classification of knots in the thickened torus with minimal diagrams which are not in a circle and have five crossings. *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 8–11 (in Russian).
14. Akimova A.A. Classification of knots in a thickened torus with minimal octahedron diagrams which are not contained in an annulus. *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 5–10 (in Russian).
15. Matveev S.V. Prime decompositions of knots in $T \times I$. *Topol. Appl.*, 2011, vol. 159, no. 7, pp. 1820–1824. doi: 10.1016/j.topol.2011.04.022.
16. Korablev Ph., Matveev S.V. Reductions of knots in thickened surfaces and virtual knots. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 83, no. 2, pp. 262–264. doi: 10.1134/S1064562411020414.
17. SnapPy 2.5.4 documentation [e-resource]. Available at: <http://www.math.uic.edu/t3m/SnapPy>.
18. Burton B. The pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations. *Proc. of the Twenty-seventh annual symposium on computational geometry (SCG'11)*, NY, ACM, 2011, pp. 153–162. doi: 10.1145/1998196.1998220.
19. Atlas of 3-Manifolds [site], Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University. Available at: <http://www.matlas.math.csu.ru>.

The paper was received by the Editorial Office on October 9, 2017.

Alena Andreevna Akimova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: akimovaaa@susu.ru.

Sergei Vladimirovich Matveev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: matveev@csu.ru.

Vladimir Viktorovich Tarkaev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: v.tarkaev@gmail.com.