ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 517.518.28+517.518.862

О ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ РАВНОМЕРНЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ НА КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ $H_p^l[\omega]$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$

Н. А. Ильясов

С. Б. Стечкиным была поставлена задача: для заданных $1 \le p < q \le \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l, k \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_l(0,\pi]$ найти точный порядок убывания $L_q(\mathbb{T})$-модуля гладкости k-го порядка $\omega_k(f^{(r)};\delta)_q$ на классах 2π-периодических функций $H_p^l[\omega] = \{f \in L_p(\mathbb{T}):\ \omega_l(f;\delta)_p \le \omega(\delta),\ \delta \in (0,\pi]\}$, где $\mathbb{T} = (-\pi,\pi]$, $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$, $\Omega_l(0,\pi]$ — класс функций $\omega = \omega(\delta)$, определенных на $(0,\pi]$ и удовлетворяющих условиям: $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$ $(\delta \downarrow 0)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow$ $(\delta \uparrow)$. Ранее автором получено решение указанной задачи в случае $1 \le p < q < \infty$. В настоящей работе приводится решение в случае $1 \le p < q = \infty$, а именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l > \sigma = r + 1/p$, $\rho = l - (k+\sigma)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega_l(f;\pi/n)_p < \infty$; *тогда* f *эквивалентна некоторой функции* $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ *и справедлива оценка* $\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n)_\infty \le C_1(l,k,r,p)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_l(f;\pi/\nu)_p + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega_l(f;\pi/\nu)_p\Big)$, $n \in \mathbb{N}$, *где* $C^r(\mathbb{T})$ — *класс функций* $\psi \in C(\mathbb{T})$, *имеющих обычную производную* r*-го порядка* $\psi^{(r)} \in C(\mathbb{T})$ $(\psi^{(0)} = \psi$, $C^0(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T}))$, $\chi(t) = 0$ *при* $t \le 0$ *и* $\chi(t) = 1$ *при* $t > 0$.

Отметим, что приведенная оценка охватывает все возможные случаи соотношений между l и $k + r$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l > \sigma = r + 1/p$, $\rho = l - (k+\sigma)$, $\omega \in \Omega_l(0,\pi]$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$; *тогда* $\sup\{\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n)_\infty :\ f \in H_p^l[\omega]\} \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega(\pi/\nu) + \chi(\rho)n^{-k} \times \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega(\pi/\nu)$, $n \in \mathbb{N}$, *где* ψ *обозначает соответствующую функцию из* $C^r(\mathbb{T})$, *эквивалентную* $f \in H_p^l[\omega]$.

В утверждениях теорем 1 и 2 наибольший интерес представляет случай $l = k + \sigma = k + r + 1/p$ $(\Rightarrow \chi(\rho) = 0)$, который возможен лишь при $p = 1$, поскольку $r \in \mathbb{Z}_+$ и $l, k \in \mathbb{N}$. В этом случае при доказательстве оценки из теоремы 1 используется неравенство $n^{-l}\|T_{n,1}^{(l)}(f;\cdot)\|_\infty \le C_2(l)n\omega_{l+1}(f;\pi/n)_1$, где $T_{n,1}(f;\cdot)$ — полином наилучшего в метрике $L_1(\mathbb{T})$ приближения функции $f \in L_1(\mathbb{T})$, которое в свою очередь выводится как следствие усиленного варианта неравенства разных метрик для производных произвольных тригонометрических полиномов $\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_\infty \le 2^{-1}\pi\|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: модуль гладкости, наилучшее приближение, неравенства между модулями гладкости различных порядков в разных метриках, точный порядок убывания равномерных модулей гладкости на классе.

N. A. Il'yasov. On the order of decrease of uniform moduli of smoothness for the classes of periodic functions $H_p^l[\omega]$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$.

S. B. Stechkin posed the following problem: for given $1 \le p < q \le \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l, k \in \mathbb{N}$, and $\omega \in \Omega_l(0,\pi]$, find the exact order of decrease of the $L_q(\mathbb{T})$-modulus of smoothness of the kth order $\omega_k(f^{(r)};\delta)_q$ on the classes of 2π-periodic functions $H_p^l[\omega] = \{f \in L_p(\mathbb{T}) : \omega_l(f;\delta)_p \le \omega(\delta),\ \delta \in (0,\pi]\}$, where $\mathbb{T} = (-\pi,\pi]$, $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$, and $\Omega_l(0,\pi]$ is the class of functions $\omega = \omega(\delta)$ defined on $(0,\pi]$ and satisfying the conditions $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$ $(\delta \downarrow 0)$ and $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow$ $(\delta \uparrow)$. Earlier the author solved this problem in the case $1 \le p < q < \infty$. In the present paper, we give a solution in the case $1 \le p < q = \infty$; more exactly, we prove the following theorems.

Theorem 1. *Suppose that* $1 \le p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l > \sigma = r + 1/p$, $\rho = l - (k+\sigma)$, *and* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega_l(f;\pi/n)_p < \infty$. *Then* f *is equivalent to some function* $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ *and the following estimate holds:* $\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n)_\infty \le C_1(l,k,r,p)\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_l(f;\pi/\nu)_p + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega_l(f;\pi/\nu)_p\Big\}$, $n \in \mathbb{N}$, *where* $\chi(t) = 0$ *for* $t \le 0$, $\chi(t) = 1$ *for* $t > 0$, *and* $C^r(\mathbb{T})$ *is the class of functions* $\psi \in C(\mathbb{T})$ *that have the usual* r*th-order derivative* $\psi^{(r)} \in C(\mathbb{T})$ *(we assume that* $\psi^{(0)} = \psi$ *and* $C^{(0)}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$*).*

Note that this estimate covers all possible cases of relations between l and $k + r$.

Theorem 2. *Suppose that* $1 \le p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l > \sigma = r + 1/p$, $\rho = l - (k+\sigma)$, $\omega \in \Omega_l(0,\pi]$, *and* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$. *Then* $\sup\{\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n)_\infty : f \in H_p^l[\omega]\} \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega(\pi/\nu) + \chi(\rho)n^{-k} \times \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega(\pi/\nu)$, $n \in \mathbb{N}$, *where* ψ *denotes the corresponding function from* $C^r(\mathbb{T})$ *equivalent to* $f \in H_p^l[\omega]$.

In Theorems 1 and 2, the case $l = k + \sigma = k + r + 1/p$ $(\Rightarrow \chi(\rho) = 0)$ is of the most interest. This case is possible only for $p = 1$, since $r \in \mathbb{Z}_+$ and $l, k \in \mathbb{N}$. In this case, the proof of the estimate in Theorem 1 employs the inequality $n^{-l}\|T_{n,1}^{(l)}(f;\cdot)\|_\infty \le C_2(l)n\omega_{l+1}(f;\pi/n)_1$, where $T_{n,1}(f;\cdot)$ is a best approximation polynomial for the function $f \in L_1(\mathbb{T})$. The latter inequality is derived from the strengthened version of the inequality of different metrics for derivatives of arbitrary trigonometric polynomials $\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_\infty \le 2^{-1}\pi\|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1$, $n\in\mathbb{N}$.

Keywords: modulus of smoothness, best approximation, inequality between moduli of smoothness of different orders in different metrics, exact order of decrease for uniform moduli of smoothness on a class.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-162-175

Введение

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p<\infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой $\|f\|_p=\Big(\pi^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$, $L_\infty(\mathbb{T})\equiv C(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических вещественнозначных функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in\mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$; $\omega_l(f;\delta)_p$ — модуль гладкости l-го порядка функции $f\in L_p(\mathbb{T})$, $l\in\mathbb{N}$, $\delta\in[0,\infty):\omega_l(f;\delta)_p=\sup\{\|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p:\ h\in\mathbb{R},\ |h|\le\delta\}$, где $\Delta_h^l f(x)=\sum_{\nu=0}^l(-1)^{l-\nu}\binom{l}{\nu}f(x+\nu h)$, $\binom{l}{\nu}=l!/(\nu!(l-\nu)!)$, $\nu=\overline{0,l}$; $\Omega_l(0,\pi]$ — класс функций $\omega=\omega(\delta)$, определенных на $(0,\pi]$ и удовлетворяющих условиям: $0<\omega(\delta)\downarrow 0$ $(\delta\downarrow 0)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow$ $(\delta\uparrow)$; $H_p^l[\omega]$ — класс функций $f\in L_p(\mathbb{T})$, для каждой из которых $\omega_l(f;\delta)_p\le\omega(\delta)$, $\delta\in(0,\pi]$, где $1\le p<\infty$, $l\in\mathbb{N}$ и $\omega\in\Omega_l(0,\pi]$.

Ниже и всюду в дальнейшем $C_j(l,k,r,p,\ldots)$, где $j\in\mathbb{N}$, обозначают положительные постоянные, зависящие только от указанных в скобках параметров, а $\chi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, обозначает функцию Хевисайда: $\chi(t)=0$ при $t\le 0$ и $\chi(t)=1$ при $t>0$.

С. Б. Стечкиным была поставлена задача: для заданных $1\le p<q\le\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $l,k\in\mathbb{N}$ и $\omega\in\Omega_l(0,\pi]$ найти точный порядок убывания $\omega_k(f^{(r)};\delta)_q$ на классах $H_p^l[\omega]$. Автором [1, теорема 2] получено решение этой задачи в случае $1\le p<q<\infty$ (там же приведена соответствующая библиография), а именно, имеет место следующее утверждение: *Пусть*

$$1\le p<q<\infty,\quad r\in\mathbb{Z}_+,\quad l,k\in\mathbb{N},\quad l>\sigma=r+1/p-1/q,\quad \rho=l-(k+r),\quad \omega\in\Omega_l(0,\pi]$$

и

$$\sum_{n=1}^\infty n^{q\sigma-1}\omega^q(\pi/n)<\infty;$$

тогда

$$\sup\Big\{\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_q:\ f\in H_p^l[\omega]\Big\}$$

$$\asymp\bigg(\sum_{\nu=n+1}^\infty\nu^{q\sigma-1}\omega^q\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\bigg)^{1/q}+\chi(\rho)n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^n\nu^{q(k+\sigma)-1}\omega^q\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\bigg)^{1/q},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Отметим, что поскольку $0<1/p-1/q<1$, то условие $l>\sigma=r+1/p-1/q$ равносильно условию $l>r$, а соотношения $\rho=l-(k+r)>0$ $(\Rightarrow\chi(\rho)=1)$ и $\rho=l-(k+r)\le 0$ $(\Rightarrow\chi(\rho)=0)$ равносильны соответственно неравенствам $l>k+\sigma$ и $l<k+\sigma$.

Напомним, что порядковое равенство $\alpha_n\asymp\beta_n$ означает существование таких постоянных $0<C_2\le C_1$, зависящих лишь от заданных в условии утверждения параметров (в данном случае l,k,r,p и q), что $C_2\beta_n\le\alpha_n\le C_1\beta_n$.

В настоящей работе приводится решение указанной задачи в случае $1\le p<q=\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $1\le p<\infty$, $f\in L_p(\mathbb{T})$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $l,k\in\mathbb{N}$, $l>\sigma=r+1/p$, $\rho=l-(k+\sigma)$ *и*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p<\infty;\tag{0.1}$$

тогда f эквивалентна некоторой функции $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ и справедлива оценка

$$\omega_k\Big(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty \le C_1(l,k,r,p)\Bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega_l\Big(f; \frac{\pi}{\nu}\Big)_p + \chi(\rho) n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+\sigma-1}\omega_l\Big(f; \frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Bigg), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.2}$$

где $C^r(\mathbb{T})$ — класс функций $\psi \in C(\mathbb{T})$, имеющих обычную производную r-го порядка $\psi^{(r)} \in C(\mathbb{T})$ ($\psi^{(0)} = \psi$, $C^{(0)}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$).

З а м е ч а н и е 1. 1) Условие $l > \sigma = r + 1/p$, равносильное неравенствам $l \ge r + 1$ при $p > 1$ и $l \ge r + 2$ при $p = 1$, необходимо для сходимости ряда (0.1) для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_l(f;\delta)_p \not\equiv 0$, поскольку в противном случае в силу известного свойства $\omega_l(f;\delta)_p \ge (2\pi)^{-l}\omega_l(f;\pi)_p\delta^l$, $\delta \in (0,\pi]$, ряд (0.1) заведомо расходится. Если $r = 0$ и $l \le \sigma = 1/p$, что возможно лишь при $p = 1$ и $l = \sigma = 1$, то даже наибольший порядок убывания модуля непрерывности $\omega_1(f;\delta)_1 = O(\delta)$ $(\delta \to 0)$ функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ не гарантирует ее эквивалентность некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T})$, поскольку в этом случае условие $\omega_1(f;\delta)_1 = O(\delta)$ равносильно эквивалентности f некоторой функции ограниченной вариации (см., например, [2, гл. III, п. 3.6.1] и [3, т. 1, гл. 4, различные теоремы и примеры, п. 8]).

2) Если $l > k + \sigma = k + r + 1/p$, то $\rho = l - (k + \sigma) > 0$ и $\chi(\rho) = 1$; этот случай сводится к равносильным неравенствам: $l \ge k + r + 1$ при $p > 1$ и $l \ge k + r + 2$ при $p = 1$.

Если $l < k + \sigma = k + r + 1/p$, то $\rho = l - (k + \sigma) < 0$ и $\chi(\rho) = 0$; этот случай сводится к равносильному неравенству $l \le k + r$ при $p \ge 1$, причем $k \ge 1$ при $p > 1$ и $k \ge 2$ при $p = 1$.

Если $l = k + \sigma = k + r + 1/p$, то $\rho = l - (k + \sigma) = 0$ и $\chi(\rho) = 0$; этот случай возможен лишь при $p = 1$, и, следовательно, $l = k + r + 1$.

Таким образом, оценка (0.2) охватывает все возможные случаи соотношений между l и $k + r$, где $l, k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

З а м е ч а н и е 2. Формулировка теоремы 1 (в интегральной форме записи) для случая $p = 1$ приведена автором в [4, замечание 4]. В случае $p = 1$, $r = 0$, $l = k+\sigma = k+1$ оценка (0.2) анонсирована в работе С. Ю. Тихонова [5, разд. 5, п. 4] как частный случай доказанной там же оценки (1.5) при $p = 1$, $q = \infty$, $\alpha = k$ (см. разд. 1, часть (A) теоремы 1).

Теорема 2. *Пусть $1 \le p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l > \sigma = r+1/p$, $\rho = l-(k+\sigma)$, $\omega \in \Omega_l(0,\pi]$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) < \infty; \tag{0.3}$$

тогда

$$\sup\Big\{\omega_k\Big(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty : \ f \in H_p^l[\omega]\Big\}$$

$$\asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.4}$$

где ψ обозначает соответствующую функцию из $C^r(\mathbb{T})$, эквивалентную $f \in H_p^l[\omega]$.

З а м е ч а н и е 3. *Условие* (0.3) *необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция $f \in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_l(f;\delta)_p = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$, была эквивалентна некоторой функции $\psi \in C^r(\mathbb{T})$.* Достаточность следует из первой части утверждения теоремы 1; необходимость доказана в [6, § 4, теорема 5] при $r = 0$, $l = 1$, [7, теорема 4] при $r \ge 0$, $l \ge 1$ (см. также пп. 1) и 2) леммы 5 в разд. 2 настоящей работы).

З а м е ч а н и е 4. Утверждение о справедливости порядкового равенства (0.4) в случае $p = 1$ отмечено автором в [4, замечание 4].

1. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через $E_n(f)_p$ и $T_{n,p}(f;x)$ соответственно наилучшее приближение и полином наилучшего (в метрике $L_p(\mathbb{T})$) приближения порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ функции $f \in L_p(\mathbb{T}) :\ \|f(\cdot) - T_{n,p}(f;\cdot)\|_p = E_n(f)_p$.

Предложение 1. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T}),\ r \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{N},\ \sigma = r + 1/p$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p < \infty. \tag{1.1}$$

Тогда f эквивалентна некоторой функции $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ и справедливы оценки:

1) $E_n(\psi^{(r)})_\infty \le \|\psi^{(r)}(\cdot) - T_{n,p}^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \le C_3(r,p)\Big((n+1)^\sigma E_n(f)_p + \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_\nu(f)_p\Big),\ n \in \mathbb{Z}_+;$

2) $\omega_k\Big(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty \le C_4(k,r,p)\Big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p + n^{-k} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{k+\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p\Big),\ n \in \mathbb{N}.$

В случае $r = 0$ оценка 1) является частным случаем неравенства разных метрик для наилучших приближений А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина, доказательство которого приведено в [8, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)]. В этой же работе (см. первый абзац после доказательства теоремы 2) отмечено, что имеет место также оценка 2). В случае $r > 0$ доказательство оценки 1) проводится аналогично случаю $r = 0$ (см., например, [2, гл. VI, доказательство теоремы 6.4.1]). Оценка 2) установлена в [2, гл. VI, теорема 6.4.1].

Лемма 1. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ и произвольного полинома $t_n(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$, где $a_0,\ a_\nu,\ b_\nu \in \mathbb{R}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, справедлива оценка*

$$\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_\infty \le 2^{-1}\pi \|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varphi(x) = (\pi - x)/2,\ x \in [0, 2\pi)$ и $\varphi(x) = \varphi(x + 2\pi),\ x \in \mathbb{R}$. Интегрируя по частям, имеем для любого $\eta \in (0, 2\pi)$

$$\int_0^{2\pi-\eta} \varphi(y) t_n^{(l+1)}(x-y)\,dy = -\int_0^{2\pi-\eta} \varphi(y)\,d(t_n^{(l)}(x-y)) = -\varphi(y) t_n^{(l)}(x-y)\Big|_0^{2\pi-\eta} + \int_0^{2\pi-\eta} t_n^{(l)}(x-y)\,d\varphi(y)$$

$$= -\varphi(2\pi - \eta) t_n^{(l)}(x - 2\pi + \eta) + \varphi(0) t_n^{(l)}(x) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi-\eta} t_n^{(l)}(x-y)\,dy,$$

откуда, переходя к пределу при $\eta \to 0$, получаем

$$\int_0^{2\pi} \varphi(y) t_n^{(l+1)}(x-y)\,dy = -\varphi(2\pi - 0) t_n^{(l)}(x - 2\pi) + \varphi(0) t_n^{(l)}(x) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t_n^{(l)}(x-y)\,dy,$$

и, следовательно,

$$t_n^{(l)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(y) t_n^{(l+1)}(x-y)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t_n^{(l)}(x-y)\,dy. \tag{1.3}$$

Поскольку второе слагаемое в (1.3) равно $(2\pi)^{-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} t_n^{(l)}(z)\,dz = 0$ и $|\varphi(z)| \le \pi/2,\ z \in \mathbb{R}$, то из равенства (1.3) следует оценка

$$|t_n^{(l)}(x)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(y)|\big|t_n^{(l+1)}(x-y)\big|\,dy \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\big|t_n^{(l+1)}(x-y)\big|\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|t_n^{(l+1)}(z)\big|\,dz = \frac{\pi}{2}\|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1.$$

$\square$

З а м е ч а н и е 5. 1) Равенство (1.3) и оценка (1.2) имеют место также и в случае $l=0$ при условии $a_0 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} t_n(y)\,dy = 0$.

2) В личной беседе с автором С. Ю. Тихонов (январь 2010 г., г. Саратов), а позднее В. В. Жук (май 2010 г., г. Санкт-Петербург) предложили следующее доказательство оценки (1.2) (с постоянной π вместо $\pi/2$) в случае $l=0$: поскольку $a_0=0$, то найдется хотя бы одна точка $x_0\in\mathbb{T}$ такая, что $t_n(x_0)=0$, и, следовательно, $|t_n(x)| = |t_n(x)-t_n(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} t_n^{(1)}(y)\,dy\right| \le \int_T |t_n^{(1)}(y)|\,dy = \pi\|t_n^{(1)}(\cdot)\|_1,\ x\in\mathbb{T}$. Аналогичные рассуждения позволяют доказать оценку (1.2) (с той же постоянной π) и в случае $l\in\mathbb{N}$.

3) Недавно П. Ю. Глазырина (по инициативе ред. А. Г. Бабенко) сообщила автору, что неравенства типа П. Турана для тригонометрических полиномов исследовались И. Я. Тырыгиным. При условии, что все нули полинома вещественны, им найдена [9, следствие 1] точная константа $D=D(p,n)$, зависящая от p и n, в неравенстве $\|t_n(\cdot)\|_\infty \le D\|t_n^{(1)}(\cdot)\|_p$, $n\in\mathbb{N}$, $1\le p<\infty$, а также доказано, что экстремальными являются полиномы вида $t_n^*(x) = c\Big(\sin\dfrac{x-\gamma}{2}\Big)^{2n}$, $c,\gamma\in\mathbb{R},\ c\ne 0$.

4) Утверждение о справедливости оценки (1.2) при $l\ge 0$ с постоянной C_0 вместо $\pi/2$, где $C_0=\sup\{\|\Phi_n(\cdot)\|_\infty:\ n\in\mathbb{N}\}<\infty$, $\Phi_n(x)=\sum_{\nu=1}^n \nu^{-1}\sin\nu x,\ x\in\mathbb{R}$, анонсировано автором в [4, неравенство (2) и замечание 1]. Появление C_0 в оценке (1.2) связано лишь с методом доказательства, основанным на привлечении равенства (см. [4])

$$t_n^{(l)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y)\Phi_n(x-y)\,dy + (1-\chi(l))a_0, \quad n\in\mathbb{N},$$

справедливость которого устанавливается простыми вычислениями

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y)\Phi_n(x-y)\,dy + (1-\chi(l))a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu(x-y)}{\nu}\,dy + (1-\chi(l))a_0$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y)\cos\nu y\,dy - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu x}{\nu}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y)\sin\nu y\,dy + (1-\chi(l))a_0$$

$$= \Bigg\{(-1)^{(l+1)/2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^l(a_\nu\sin\nu x - b_\nu\cos\nu x) = t_n^{(l)}(x), \quad l \text{ — нечетное};$$

$$(-1)^{l/2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^l(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x) + (1-\chi(l))a_0 = t_n^{(l)}(x), \quad 0\le l \text{ — четное}\Bigg\}.$$

5) Положим $\varphi^*(x)=\varphi(x),\ x\in(0,2\pi),\ \varphi^*(0)=\varphi^*(2\pi)=0$ и $\varphi^*(x)=\varphi^*(x+2\pi),\ x\in\mathbb{R}$. Поскольку (см., например, [3, т. 1, гл. 1, п. 2, формула (2.8)]) $\varphi^*(x)=\sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-1}\sin\nu x,\ x\in[0,2\pi]$, и $S_n(\varphi^*;x)=\sum_{\nu=1}^n\nu^{-1}\sin\nu x = \Phi_n(x)$, то $|\varphi^*(x)|\le|\varphi^*(x)-S_n(\varphi^*;x)|+|\Phi_n(x)|\le|\varphi^*(x)-S_n(\varphi^*;x)|+C_0$. Предельный переход при $n\to\infty$ в правой части последнего неравенства приводит к оценке $|\varphi^*(x)|\le C_0,\ x\in[0,2\pi]$, откуда $C_0\ge\sup\{|\varphi^*(x)|:\ x\in[0,2\pi]\}=\max\{|\varphi(x)|:\ x\in[0,2\pi]\}=\pi/2$.

З а м е ч а н и е 6. Оценка (1.2) является точной в смысле порядка на классе всех тригонометрических полиномов, а именно: существует полином G_n порядка не выше $n,\ n\in\mathbb{N}$, такой, что $\|G_n^{(l+1)}\|_1 \le C_5(l)\|G_n^{(l)}\|_\infty$, где $C_5(l) = 2(l+1)(l+2)$ при четном l и $C_5(l) = 2^{l+2}(l+2)$ при нечетном l.

В случае четного l полагаем $G_n(x) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^n (1 - \nu/(n+1))\cos\nu x = F_n(x)$ — ядро Фейера порядка $(n+1) \in \mathbb{N}$ $(F_0(x) = 1/2)$. В силу неравенства С. Н. Бернштейна (см., например, [2, гл. IV, п. 4.8.61, неравенство (26)]): $\|t_n^{(l)}\|_p \le n^l \|t_n\|_p$, где $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, имеем ($\|F_m\|_1 = 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$) $\|G_n^{(l+1)}\|_1 \equiv \|F_n^{(l+1)}\|_1 \le n^{l+1}\|F_n\|_1 = n^{l+1}$. Далее, поскольку $F_n^{(l)}(x) = (-1)^{l/2}\sum_{\nu=1}^n (1 - \nu/(n+1))\nu^l \cos\nu x$, то применение преобразования Абеля приводит к оценке

$$|F_n^{(l)}(0)| = \sum_{\nu=1}^n \Big(1 - \frac{\nu}{n+1}\Big)\nu^l = (n+1)^{-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^l + (n+1)^{-1}\sum_{\mu=1}^n \mu^l$$

$$= (n+1)^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^l \ge (l+1)^{-1}(n+1)^{-1}\sum_{\nu=1}^n \nu^{l+1}$$

$$\ge (l+1)^{-1}(l+2)^{-1}(n+1)^{-1}n^{l+2} \ge (2(l+1)(l+2))^{-1}n^{l+1},$$

учитывая которую, получим $\|F_n^{(l+1)}\|_1 \le n^{l+1} \le 2(l+1)(l+2)|F_n^{(l)}(0)| \le 2(l+1)(l+2)\|F_n^{(l)}\|_\infty$.

В случае нечетного l полагаем (см., например, [10, добавления к гл. 8, § 18]) $G_n(x) = \sin mx F_{m-1}(x) = (2m)^{-1}\Big(\sum_{\nu=1}^m \nu\sin\nu x + \sum_{\nu=m+1}^{2m-1}(2m-\nu)\sin\nu x\Big)$, где $m = [(n+1)/2]$, $[t]$ — целая часть числа t, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $2m-1 = 2[(n+1)/2]-1 \le 2(n+1)/2-1 = n$, то порядок полинома $G_n(x)$ не превышает n. В силу неравенства С. Н. Бернштейна имеем

$$\|G_n^{(l+1)}\|_1 \le n^{l+1}\|G_n\|_1 = n^{l+1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin mx||F_{m-1}(x)|\,dx \le n^{l+1}\|F_{m-1}\|_1 = n^{l+1},$$

где $m = [(n+1)/2]$, $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, так как

$$G_n^{(l)}(x) = (-1)^{(l+1)/2+1}(2m)^{-1}\bigg(\sum_{\nu=1}^m \nu^{l+1}\cos\nu x + \sum_{\nu=m+1}^{2m-1}\nu^l(2m-\nu)\cos\nu x\bigg),$$

то

$$|G_n^{(l)}(0)| = (2m)^{-1}\bigg(\sum_{\nu=1}^m \nu^{l+1} + \sum_{\nu=m+1}^{2m-1}\nu^l(2m-\nu)\bigg) \ge (2m)^{-1}\sum_{\nu=1}^m \nu^{l+1} \ge (2m)^{-1}(l+2)^{-1}m^{l+2}$$

$$= (2(l+2))^{-1}m^{l+1} = (2(l+2))^{-1}\Big[\frac{n+1}{2}\Big]^{l+1} \ge (2(l+2))^{-1}\Big(\frac{n}{2}\Big)^{l+1} = (2^{l+2}(l+2))^{-1}n^{l+1}.$$

Учитывая последнюю оценку, имеем

$$\|G_n^{(l+1)}\|_1 \le n^{l+1} \le (l+2)2^{l+2}|G_n^{(l)}(0)| \le (l+2)2^{l+2}\|G_n^{(l)}\|_\infty.$$

З а м е ч а н и е 7. Утверждение о порядковой точности оценки (1.2) с указанной постоянной $C_5(l)$ анонсировано автором в [4, замечание 2].

Лемма 2. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ и произвольной функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ справедлива оценка*

$$n^{-l}\|T_{n,1}^{(l)}(f;\cdot)\|_\infty \le C_6(l)n\omega_{l+1}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу оценки (1.2), неравенства Ф. Рисса — С. М. Никольского — С. Б. Стечкина (см., например, [2, гл. IV, п. 4.8.61]): $\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_p \le 2^{-l}n^l\|\Delta^l_{\pi/n}t_n(\cdot)\|_p$, где $1 \le p \le \infty$, $l \in \mathbb{N}$, и неравенства Джексона — Стечкина в $L_p(\mathbb{T})$ (см., например, [2, гл. V, п. 5.1.32, неравенство (16), п. 5.11, неравенство (1)]): $E_n(f)_p \le C_7(l)\omega_l(f;\pi/(n+1))_p$, где $1 \le p \le \infty$, $l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\|T^{(l)}_{n,1}(f;\cdot)\|_\infty \le 2^{-1}\pi\|T^{(l+1)}_{n,1}(f;\cdot)\|_1 \le 2^{-1}\pi 2^{-(l+1)}n^{l+1}\|\Delta^{l+1}_{\pi/n}T_{n,1}(f;\cdot)\|_1$$

$$\le 2^{-1}\pi 2^{-(l+1)}n^{l+1}\Big(\|\Delta^{l+1}_{\pi/n}(T_{n,1}(f;\cdot)-f(\cdot))\|_1 + \|\Delta^{l+1}_{\pi/n}f(\cdot)\|_1\Big)$$

$$\le 2^{-1}\pi 2^{-(l+1)}n^{l+1}\Big(2^{l+1}\|T_{n,1}(f;\cdot)-f(\cdot)\|_1 + \omega_{l+1}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_1\Big)$$

$$= 2^{-1}\pi n^{l+1}\Big(E_n(f)_1 + 2^{-(l+1)}\omega_{l+1}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_1\Big) \le 2^{-1}\pi\Big(C_7(l+1)+2^{-(l+1)}\Big)n^{l+1}\omega_{l+1}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_1,$$

откуда следует оценка (1.4) с $C_6(l) = 2^{-1}\pi\{C_7(l+1)+2^{-(l+1)}\}$. □

Замечание 8. Оценка (1.4) анонсирована автором в [4, замечание 3].

Доказательство теоремы 1. В силу неравенства Джексона — Стечкина в $L_p(\mathbb{T})$ (см. доказательство леммы 2) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}E_{n-1}(f)_p \le C_7(l)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p < \infty,$$

откуда следует сходимость ряда (1.1), обеспечивающая в силу предложения 1 эквивалентность f некоторой функции $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ и справедливость оценки (см. оценку 2 из предложения 1; $l \in \mathbb{N}$, $l > \sigma$)

$$\omega_k\Big(\psi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty \le C_4(k,r,p)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}E_{\nu-1}(f)_p + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}E_{\nu-1}(f)_p\Big)$$

$$\le C_4(k,r,p)C_7(l)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Если $l > k+\sigma$ ($\Rightarrow \chi(\rho)=1$), то (1.5) совпадает с требуемой оценкой (0.2). Далее, если $l < k+\sigma$ ($\Rightarrow \chi(\rho)=0$), то в силу свойств модулей гладкости $\omega_l(f;\delta_1)_p \le \omega_l(f;\delta_2)_p$ и $\delta_2^{-l}\omega_l(f;\delta_2)_p \le 2^l\delta_1^{-l}\omega_l(f;\delta_1)_p$, $0 < \delta_1 < \delta_2 < +\infty$, имеем оценки

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p \le 2^l n^{l-k}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-l-1} \le C_8(k+\sigma-l)2^l n^\sigma\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p,$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p \ge \sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p \ge \omega_l\Big(f;\frac{\pi}{2n}\Big)_p\sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{\sigma-1} \ge 2^{-l}C_9(\sigma)n^\sigma\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p,$$

учитывая которые в (1.5), получаем

$$\omega_k\Big(\psi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty \le C_4(k,r,p)C_7(l)\Big(1+2^{2l}C_9^{-1}(\sigma)C_8(k+\sigma-l)\Big)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p.$$

И, наконец, рассмотрим случай $l = k+\sigma = k+r+1/p$, который возможен лишь при $p=1$, поскольку $l,k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и, следовательно, $l = k+r+1$. В силу известных свойств модулей гладкости и оценки (1.4) для $l = k+r$ имеем

$$\omega_k\Big(\psi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty \le \omega_k\Big(\psi^{(r)}(\cdot)-T^{(r)}_{n,1}(f;\cdot);\frac{\pi}{n}\Big)_\infty + \omega_k\Big(T^{(r)}_{n,1}(f;\cdot);\frac{\pi}{n}\Big)_\infty$$

$$\le 2^k\big\|\psi^{(r)}(\cdot)-T_{n,1}^{(r)}(f;\cdot)\big\|_\infty+\pi^k n^{-k}\big\|T_{n,1}^{(r+k)}(f;\cdot)\big\|_\infty$$
$$\le 2^k\big\|\psi^{(r)}(\cdot)-T_{n,1}^{(r)}(f;\cdot)\big\|_\infty+\pi^k C_6(k+r)n^{r+1}\omega_{k+r+1}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_1.$$

Далее, применяя оценку 1) из предложения 1 при $p=1$ и неравенство Джексона — Стечкина в $L_1(\mathbb{T})$, получаем ($\sigma=r+1$)

$$\omega_k\Big(\psi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty\le 2^k C_3(r,1)\Big((n+1)^\sigma E_n(f)_1+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}E_\nu(f)_1\Big)+\pi^k C_6(k+r)n^{r+1}\omega_{k+r+1}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_1$$
$$\le 2^k C_3(r,1)C_7(k+\sigma)\bigg((n+1)^\sigma\omega_{k+\sigma}\Big(f;\frac{\pi}{n+1}\Big)_1+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_{k+\sigma}\Big(f;\frac{\pi}{\nu+1}\Big)_1\bigg)$$
$$+\pi^k C_6(k+r)n^\sigma\omega_{k+\sigma}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_1\le C_1(l,k,r,1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_{k+\sigma}\Big(f;\frac{\pi}{\nu+1}\Big)_1,$$

откуда и следует требуемая оценка (0.2) в случае $l=k+\sigma=k+r+1$ ($\Rightarrow\chi(\rho)=0$) с $C_1(l,k,r,1)=2^kC_3(r,1)C_7(l)+2^lC_9^{-1}(r+1)\big(2^lC_3(r,1)C_7(l)+\pi^kC_6(k+r)\big)$.

Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 основывается на приведенных ниже утверждениях.

Лемма 3. *Пусть $l\in\mathbb{N}$, $\sigma\in(0,\infty)$, $l>\sigma$. Для каждой функции $\omega\in\Omega_l(0,\pi]$ существует последовательность $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:*

1) $0<\varepsilon_n\le\omega(\pi/n)$ $(n=1,2,\ldots)$, $\varepsilon_n\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$;
2) $(2l)^{-1}\omega(\pi/n)\le n^{-l}\sum_{\nu=1}^n\nu^{l-1}\varepsilon_\nu\le 3\omega(\pi/n)$, $n\in\mathbb{N}$;
3) $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\omega(\pi/n)\asymp\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\varepsilon_n$;
4) *если* $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\omega(\pi/n)<\infty$, *то*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\varepsilon_\nu+n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big),\quad n\in\mathbb{N};$$

5) *если $l\ne k+\sigma$, где $k\in\mathbb{N}$, и $\rho=l-(k+\sigma)$, то*

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\asymp(1-\chi(\rho))n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\nu,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построение последовательности $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющей условиям 1) и 2), проводится по схеме С. Б. Стечкина [11, § 3, лемма 2], случай $l=1$. Схема была развита В. Э. Гейтом [12, лемма 1], случай $l\ge 1$ (более подробную историю вопроса см. в [13, разд. 2, замечание 8]). Соотношения 3) и 4) доказываются с помощью 1) и 2) (см., например, [14, разд. 1, лемма 1]).

Докажем 5). При $l<k+\sigma$ в силу $\omega(\delta)\uparrow(\delta\uparrow)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$ имеем

$$n^\sigma\omega(\pi/n)\asymp\omega(\pi/n)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\le n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega(\pi/\nu)$$
$$\le n^{-k}n^l\omega(\pi/n)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-l-1}\asymp n^\sigma\omega(\pi/n);$$

при $l > k+\sigma$ в силу 1) и 2) получаем

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\nu \le n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega(\pi/\nu) \asymp n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-l-1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{l-1}\varepsilon_\mu$$

$$= n^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{l-1}\varepsilon_\mu\sum_{\nu=\mu}^{n}\nu^{k+\sigma-l-1} \le C_{10}(\rho)n^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\mu. \qquad \square$$

Лемма 4. *Пусть $1\le p<\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $k\in\mathbb{N}$, $\sigma=r+1/p$; для любой последовательности $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($0<\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$) существует функция $g(x;p;\varepsilon)\in L_p(\mathbb{T})$ такая, что*:

1) $E_{n-1}(g)_p \le C_{11}(p)\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{N}$;
2) $g\in C^r(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\varepsilon_n<\infty$;
3) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\varepsilon_n<\infty$, *то*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\varepsilon_\nu \le C_{12}(r,p)\big\{E_n(g^{(r)})_\infty + n^\sigma\varepsilon_{n+1}\big\}, \quad n\in\mathbb{N};$$

4) *если* $g\in C^r(\mathbb{T})$, *то*

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\nu \le C_{13}(k,r,p)\omega_k\Big(g^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty, \quad n\in\mathbb{N};$$

5) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\varepsilon_n<\infty$, *то*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\varepsilon_\nu + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\nu \le C_{14}(k,r,p)\omega_k\Big(g^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство леммы 4 приведено в заметке автора [15, лемма 5]. Функция $g(x;p;\varepsilon)\in L_p(\mathbb{T})$ определяется следующим образом. При $p=1$ полагаем $g(x;1;\varepsilon)=g_1(x;\varepsilon)+g_2(x;\varepsilon)$, где g_1 и g_2 — функции, рассмотренные В. Э. Гейтом в [16, § 2, п. 1 и п. 2] и [17, § 2, п. 2 и п. 3]. Имеем

$$g_1(x;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n F_n(x)=\varepsilon_1/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1;\varepsilon)\cos nx,$$

где $\Delta\varepsilon_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$, $a_n(1;\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{\infty}(1-n/(\nu+1))\Delta\varepsilon_\nu$, $F_n(x)$ — ядро Фейера порядка $(n+1)\in\mathbb{N}$ (см. разд. 1, замечание 6) и

$$g_2(x;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n G_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\varepsilon)\sin nx,$$

где $G_n(x)=\sin((m+1)x)F_m(x)$, $m=[(n+1)/2]-1$, $n\in\mathbb{N}$ (см. разд. 1, замечание 6),

$$b_n(\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{2(n-1)}(1-(n/2[(\nu+1)/2]))\Delta\varepsilon_\nu+n\sum_{\nu=2n-1}^{\infty}(1/2[(\nu+1)/2])\Delta\varepsilon_\nu,$$

$n\in\mathbb{N}$ (при $n=1$ первое слагаемое в $b_n(\varepsilon)$ считается равным нулю); при $p>1$ полагаем $g(x;p;\varepsilon)=g_3(x;p;\varepsilon)$, где g_3 — функция, рассмотренная автором в [15, доказательство леммы 5]:

$$g_3(x;p;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{1/p-1}\Delta\varepsilon_n\sum_{\nu=1}^{n}(\cos\nu x+\sin\nu x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(p;\varepsilon)(\cos nx+\sin nx),$$

$$a_n(p;\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{\infty}\nu^{1/p-1}\Delta\varepsilon_\nu,\ n\in\mathbb{N}.$$

Лемма 5. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ r \in \mathbb{Z}_+,\ l, k \in \mathbb{N},\ l > \sigma = r + 1/p,\ \omega \in \Omega_l(0, \pi]$; *существует функция* $f_0(x; p; \omega) \in L_p(\mathbb{T})$, *обладающая следующими свойствами*:

1) $\omega_l(f_0; \delta)_p \le C_{15}(l, p)\omega(\delta),\ \delta \in (0, \pi]$;

2) $f_0 \in C^r(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$;

3) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$, *то*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{16}(l, r, p)\Big(E_n(f_0^{(r)})_\infty + n^\sigma \omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)$$

$$\le C_{17}(l, k, r, p)\Big(\omega_k\Big(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty,\ l \ge k + \sigma;\ \omega_k\Big(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty + n^\sigma \omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big),\ l < k + \sigma\Big), \quad n \in \mathbb{N};$$

4) *если* $f_0 \in C^r(\mathbb{T})$ *и* $l > k + \sigma$, *то*

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{18}(l, k, r, p)\omega_k\Big(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Положим $f_0(x; p; \omega) = g(x; p; \varepsilon)$, где g — функция из леммы 4, которая определена последовательностью $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, построенной для заданной функции $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$ согласно лемме 3. В силу неравенства (1) [2, гл. VI, п. 6.1.1], п. 1) леммы 4 и п. 2) леммы 3 имеем

$$\omega_l\Big(f_0; \frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_{19}(l, p)n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{l-1}E_{\nu-1}(f_0)_p$$

$$\le C_{19}(l, p)C_{11}(p)n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{l-1}\varepsilon_\nu \le 3C_{19}(l, p)C_{11}(p)\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big),$$

откуда $\omega_l(f_0; \pi/n)_p \le C_{20}(l, p)\omega(\pi/n),\ n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\omega_l(f_0; \delta)_p \le 2^l C_{20}(l, p)\omega(\delta)$, $\delta \in (0; \pi]$.

Утверждение п. 2) является следствием п. 3) леммы 3 и п. 2) леммы 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\varepsilon_n < \infty \Leftrightarrow g \in C^r(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f_0 \in C^r(\mathbb{T}),$$

а оценка в п. 4) следует из п. 5) леммы 3 и п. 4) леммы 4:

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \asymp n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\nu \le C_{13}(k, r, p)\omega_k\Big(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty.$$

Докажем утверждение п. 3). В силу п. 4) леммы 3, п. 3) леммы 4 и п. 1) леммы 3 имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{21}(l, r, p)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\varepsilon_\nu + n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)$$

$$\le C_{21}(l, r, p)\Big(C_{12}(r, p)(E_n(g^{(r)})_\infty + n^\sigma\varepsilon_{n+1}) + n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big) \le C_{16}(l, r, p)\Big(E_n(f_0^{(r)})_\infty + n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big). \tag{2.1}$$

Отсюда, применяя неравенство Джексона — Стечкина к первому слагаемому в правой части (2.1), получим оценку в правой части п. 3) в случае $l < k + \sigma$:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{16}(l, r, p)\Big(C_7(k)\omega_k\Big(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty + n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далее, в силу $\omega(\delta)\uparrow\ (\delta\uparrow)\ (\Leftrightarrow \omega(\pi/n)\downarrow (n\uparrow))$ и п. 4) настоящей леммы имеем оценку

$$n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \le (k+\sigma)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le (k+\sigma)C_{18}(l,k,r,p)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty,$$

учитывая которую в правой части (2.1), получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{16}(l,r,p)\Big(E_n(f_0^{(r)})_\infty + n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)$$

$$\le C_{16}(l,r,p)\Big(C_7(k)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty + (k+\sigma)C_{18}(l,k,r,p)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty\Big) \le C_{17}(l,k,r,p)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty,$$

откуда следует оценка в правой части п. 3) в случае $l > k+\sigma$.

Рассмотрим теперь случай $l = k+\sigma = k+r+1$ (см. п. 2) замечания 1). В силу левой оценки в п. 2) леммы 3 и оценки в п. 4) леммы 4 (случай $p=1$) имеем

$$n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \le 2ln^{\sigma-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}\varepsilon_\nu = 2ln^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\nu \le 2lC_{13}(k,r,1)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty.$$

Применяя последнюю оценку и неравенство Джексона — Стечкина в правой части (2.1), получим

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{16}(l,r,1)\Big(E_n(f_0^{(r)})_\infty + n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)$$

$$\le C_{16}(l,r,1)\Big(C_7(k)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty + 2lC_{13}(k,r,1)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty\Big) \le C_{17}(l,k,r,1)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty,$$

откуда следует оценка в правой части п. 3) в случае $l = k+\sigma$. □

Лемма 6. *Пусть* $r\in Z_+,\ l,k\in\mathbb{N},\ \sigma=r+1,\ \omega\in\Omega_l(0,\pi]$; *существует функция* $\varphi(x;\omega)\in L_1(\mathbb{T})$ *такая, что*:

1) $\omega_l(\varphi;\delta)_1 \le C_{22}(l)\omega(\delta),\ \delta\in(0,\pi]$;

2) *если* $\varphi\in C^r(\mathbb{T})$, *то* $n^\sigma\omega(\pi/n) \le C_{23}(l,k,r)\omega_k(\varphi^{(r)};\pi/n)_\infty,\ n\in\mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем $\varphi(x;\omega)=g_1(x;\omega)$ при четном l и $\varphi(x;\omega)=g_2(x;\omega)$ при нечетном l, где g_1 и g_2 — функции, указанные в первом абзаце после леммы 4, $\omega=\{\omega(\pi/n)\}$, $n\in\mathbb{N}$. Так как $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$, то $n^l\omega(\pi/n)\ \uparrow(n\uparrow)$; следовательно, в силу свойств функций g_1 и g_2, установленных в [16, § 2, свойство e) функции f_1 в п. 1 и свойство c) функции f_2 в п. 2] и [17, § 2, свойство f) функции f_1 в п. 2 и свойство d) функции f_2 в п. 3] имеем $\omega_l(\varphi;\pi/n)_1 \le C_{24}(l)\omega(\pi/n),\ n\in\mathbb{N}$, откуда $\omega_l(\varphi;\delta)_1 \le 2^lC_{24}(l)\omega(\delta),\ \delta\in(0,\pi]$, т.е. имеет место 1). Далее, автором [14, лемма 4, случай $q=\infty$] при условии $\varphi\in C^r(\mathbb{T})$ доказана оценка $n^\sigma\omega(\pi/n) \le C_{25}(l,r)E_{n-1}(\varphi^{(r)})_\infty,\ n\in\mathbb{N}$, применяя в которой неравенство Джексона — Стечкина, получим требуемую оценку в п. 2). □

Лемма 7. *Пусть* $1<p<\infty,\ r\in\mathbb{Z}_+,\ l,k\in\mathbb{N},\ \sigma=r+1/p,\ \omega\in\Omega_l(0,\pi]$; *существует последовательность функций* $\{u_m(x;p;\omega)\}_{m=1}^\infty\subset L_p(\mathbb{T})$ *такая, что*:

1) $\omega_l(u_m;\delta)_p \le C_{26}(l,p)\omega(\delta),\ \delta\in(0,\pi],\ m=1,2,\dots$;

2) $m^\sigma\omega(\pi/m) \le C_{27}(k,r)\omega_k(u_m^{(r)};\pi/m)_\infty,\ m\in\mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $u_m(x;p;\omega) = m^{1/p-1}\omega(\pi/m)(D_m(x)+\widetilde{D}_m(x))$, где $D_m(x)=1/2+\sum_{\nu=1}^m\cos\nu x$ — ядро Дирихле, $\widetilde{D}_m(x)=\sum_{\nu=1}^m\sin\nu x$ — сопряженное ядро Дирихле. В силу неравенства М. Рисса (см., например, [10, гл. 8, § 14]): $\|\widetilde{f}\|_p \le C_{28}(p)\|f\|_p$, $f\in L_p(\mathbb{T}),\ 1<p<\infty$, и известной оценки (см., например, [6, § 4, неравенство (4.17)]): $\|D_m(\cdot)\|_p \le C_{29}(p)m^{1-1/p}$, имеем $\|D_m(\cdot)+\widetilde{D}_m(\cdot)\|_p \le (1+C_{28}(p))\|D_m(\cdot)\|_p \le (1+C_{28}(p))C_{29}(p)m^{1-1/p}$, откуда

$\|u_m(\cdot;p;\omega)\|_p = m^{1/p-1}\omega\Big(\frac{\pi}{m}\Big)\|D_m(\cdot)+\widetilde{D}_m(\cdot)\|_p \le (1+C_{28}(p))C_{29}(p)\omega\Big(\frac{\pi}{m}\Big) \le (1+C_{28}(p))C_{29}(p)\omega(\pi)$, и, следовательно, $\sup\{\|u_m(\cdot;p;\omega)\|_p :\ m\in\mathbb{N}\}<\infty$, то есть $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset L_p(\mathbb{T})$.

Для доказательства оценки в п. 1) заметим, что при любом $\delta\in(0,\pi]$ и каждом фиксированном $m\in\mathbb{N}$ возможны два случая: $\delta<\pi/m$ и $\delta\ge\pi/m$. При $\delta<\pi/m$, учитывая $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$, имеем $\omega_l(u_m;\delta)_p \le \delta^l\|u_m^{(l)}\|_p \le \delta^l m^l\|u_m\|_p \le \delta^l m^l C_{30}(p)\omega(\pi/m) \le C_{30}(p)\delta^l m^l \pi^l m^{-l}\delta^{-l}\omega(\delta) = \pi^l C_{30}(p)\omega(\delta)$, а при $\delta\ge\pi/m$ с учетом $\omega(\delta)\uparrow(\delta\uparrow)$ получаем $\omega_l(u_m;\delta)_p \le 2^l\|u_m\|_p \le 2^l C_{30}(p) \times\omega(\pi/m) \le 2^l C_{30}(p)\omega(\delta)$, где $C_{30}(p)=(1+C_{28}(p))C_{29}(p)$. Таким образом, при любом $\delta\in(0,\pi]$ справедлива оценка $\omega_l(u_m;\delta)_p \le (2^l+\pi^l)C_{30}(p)\omega(\delta),\ m\in\mathbb{N}$, т. е. имеет место 1).

Докажем 2). В силу неравенства Рисса — Никольского — Стечкина (см. доказательство леммы 2) имеем

$$\pi^r m^{-r}\omega_k\Big(u_m^{(r)};\frac{\pi}{m}\Big)_\infty \ge \omega_{k+r}\Big(u_m;\frac{\pi}{m}\Big)_\infty \ge \big\|\Delta_{\pi/m}^{k+r}u_m(\cdot)\big\|_\infty \ge 2^{k+r}m^{-(k+r)}\big\|u_m^{(k+r)}(\cdot)\big\|_\infty$$

$$\ge 2^{k+r}m^{-(k+r)}\big|u_m^{(k+r)}(0;p;\omega)\big| = 2^{k+r}m^{-(k+r)}m^{1/p-1}\omega\Big(\frac{\pi}{m}\Big)\big|D_m^{(k+r)}(0)+\widetilde{D}_m^{(k+r)}(0)\big|$$

$$= 2^{k+r}m^{-(k+r)}m^{1/p-1}\omega\Big(\frac{\pi}{m}\Big)\sum_{\nu=1}^m \nu^{k+r} \ge 2^{k+r}m^{-(k+r)}m^{1/p-1}\omega\Big(\frac{\pi}{m}\Big)(k+r+1)^{-1}m^{k+r+1}$$

$$= 2^{k+r}(k+r+1)^{-1}m^{1/p}\omega\Big(\frac{\pi}{m}\Big),$$

откуда $m^\sigma\omega(\pi/m) \le 2^{-(k+r)}\pi^r(k+r+1)\omega_k(u_m^{(r)};\pi/m)_\infty,\ m\in\mathbb{N}$. □

З а м е ч а н и е 9. Рассмотрение последовательности функций, подобной $\{u_m(x;p;\omega)\}_{m=1}^\infty \subset L_p(\mathbb{T})$, впервые предложено автором в [18, лемма 2] (см. также [1, лемма 2; 14, разд. 1, лемма 3]) при решении задачи о порядковой точности неравенства Джексона — Стечкина в $L_p(\mathbb{T})$ на классах $H_p^l[\omega]$ в случае $1<p<\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Оценка сверху в (0.4) следует из неравенства (0.2): если выполняется (0.3), то в силу теоремы 1 каждая функция $f\in H_p^l[\omega]$ эквивалентна некоторой функции $\psi\in C^r(\mathbb{T})$ и справедлива оценка

$$\omega_k\Big(\psi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty \le C_1(l,k,r,p)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)$$

$$\le C_1(l,k,r,p)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\bigg),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Оценка снизу в (0.4) реализуется при $p\ge1$ и $l>k+\sigma$ ($\Rightarrow\chi(\rho)=1$) посредством функции $C_{15}^{-1}(l,p)f_0(\cdot;p;\omega)\in H_p^l[\omega]$ в силу п. 3) и п. 4) леммы 5:

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) + n^{-k}\sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{31}(l,k,r,p)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty,\quad n\in\mathbb{N};$$

при $p=1$ и $l<k+\sigma$ ($\Rightarrow\chi(\rho)=0$) — посредством функции $C_{15}^{-1}(l,1)f_0(\cdot;1;\omega)\in H_1^l[\omega]$ в силу п. 3) леммы 5 и функции $C_{22}^{-1}(l)\varphi(\cdot;\omega)\in H_1^l[\omega]$ в силу п. 2) леммы 6:

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big) \le C_{17}(l,k,r,1)\Big(\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty + n^\sigma\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)$$

$$\le C_{17}(l,k,r,1)\Big(\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty + C_{23}(l,k,r)\omega_k\Big(\varphi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty\Big)$$

$$\le C_{32}(l,k,r)\sup\Big\{\omega_k\Big(\psi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_\infty :\ f\in H_1^l[\omega]\Big\};$$

при $p>1$ и $l<k+\sigma$ ($\Rightarrow \chi(\rho)=0$) — посредством функции $C_{15}^{-1}(l,p)f_0(\cdot;p;\omega)\in H_p^l[\omega]$ в силу п. 3) леммы 5 и семейства функций $\{C_{26}^{-1}(l,p)u_n(\cdot;p;\omega)\}_{n=1}^{\infty}\subset H_p^l[\omega]$ в силу п. 2) леммы 7:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\le C_{17}(l,k,r,p)\Big(\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_{\infty}+n^{\sigma}\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)$$

$$\le C_{17}(l,k,r,p)\Big(\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_{\infty}+C_{27}(k,r)\omega_k\Big(u_n^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_{\infty}\Big)$$

$$\le C_{33}(l,k,r,p)\sup\Big\{\omega_k\Big(\psi^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_{\infty}:\ f\in H_p^l[\omega]\Big\};$$

при $l=k+\sigma$ ($\Rightarrow \chi(\rho)=0$ и $p=1$) — посредством функции $C_{15}^{-1}(l,1)f_0(\cdot;1;\omega)\in H_1^l[\omega]$ в силу п. 3) леммы 5:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\le C_{34}(l,k,r)\omega_k\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_{\infty},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильясов Н.А.** К неравенству между модулями гладкости различных порядков в разных метриках // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 2. С. 153–155.
2. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
4. **Ильясов Н.А.** К неравенству разных метрик для производных тригонометрических полиномов в $L_p(\mathbb{T})$ // Теория приближений: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию С. Б. Стечкина. М.: Изд-во МИРАН, 2010. С. 36–37.
5. **Tikhonov S.** Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters // J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, no. 4. P. 590–608.
6. **Ульянов П.Л.** Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72(114), № 2. С. 193–225.
7. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1987. 150 с.
8. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.
9. **Тырыгин И.Я.** О неравенствах типа Турана в некоторых интегральных метриках // Укр. мат. журн. 1988. Т. 40, № 2. С. 256–260.
10. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
11. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1953. Т. 17, № 2. С. 87–98.
12. **Гейт В.Э.** Об условиях вложения классов $H_{k,R}^{\omega}$ и $\widetilde{H}_{k,R}^{\omega}$ // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 169–178.
13. **Ильясов Н.А.** О порядке равномерной сходимости частных кубических сумм кратных тригонометрических рядов Фурье на классах функций $H_{1,m}^l[\omega]$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 161–177.
14. **Ильясов Н.А.** К прямой теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Тр. МИРАН. 1997. Т. 219. С. 220–234.
15. **Ильясов Н.А.** К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 53–61.
16. **Гейт В.Э.** О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 571–582.
17. **Гейт В.Э.** О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Математика. 1972. № 7(122). С. 19–30.
18. **Ильясов Н.А.** К неравенствам между наилучшими приближениями и модулями гладкости разных порядков периодических функций в L_p, $1\le p\le\infty$ // Сингулярные интегральные операторы: сб. статей. Баку: Изд-во Бакинского гос. ун-та, 1991. С. 40–52.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
Бакинский государственный университет, г. Баку
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 10.08.2017

REFERENCES

1. Il'yasov N.A. On the inequality between moduli of smoothness of various orders in different metrics. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 2, pp. 877–879.
2. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* Oxford, London, NY, Pergamon Press, 1963, 655 p. This translation has been made from A.F. Timan's book entitled *Teoriya priblizheniya funktsii deystvitel'nogo peremennogo*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
3. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959; vol. I, 383 p.; vol. II, 354 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady.* M.: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p; vol. II, 538 p.
4. Il'yasov N.A. On the different-metrics inequality for derivatives of trigonometric polynomials in $L_p(\mathbb{T})$. Approximations theory: abstracts of Intern. conf., dedicated to the 90-th anniversary of S. B. Stechkin. Moskow, Steklov Inst. Math. Press, 2010, pp. 36–37 (In Russian).
5. Tikhonov S. Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2010, vol. 16, no. 4, pp. 590–608.
6. Ul'yanov P.L. Absolute and uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 169–197.
7. Il'yasov N.A. Embedding theorems for structural and constructive characteristics of functions: Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Baku, 1987, 150 p. (in Russian).
8. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44(86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
9. Tyrygin I.Ya. Turan-type inequalities in certain integral metrics. *Ukrainian Math. J.*, 1988, vol. 40, iss. 2, pp. 256–260 (in Russian).
10. Bari N.K. *A treatise on trigonometric series.* Vols. I, II. Oxford, New York: Pergamon Press, 1964, vol. I, 533 p; vol. II, 508 p. Original Russian text published in *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Fiz.-Mat. Giz. Publ., 1961, 936 p.
11. Stechkin S.B. On absolute convergence of Fourier series. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1953, vol. 17, no. 2, pp. 87–98 (in Russian).
12. Gheit V.È. Imbedding conditions for the classes $H^{\omega}_{k,R}$ and $\widetilde{H}^{\omega}_{k,R}$. *Math. Notes*, 1973, vol. 13, no. 2, pp. 101–106.
13. Il'yasov N.A. On the order of uniform convergence of partial cubic sums of multiple trigonometric Fourier series on the function classes $H^l_{1,m}[\omega]$. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 161–177 (in Russian).
14. Il'yasov N.A. On the direct theorem of approximation theory of periodic functions in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 215–230.
15. Il'yasov N.A. An inverse theorem of approximation theory of periodic functions in various metrics. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 791–798.
16. Gheit V.È. On the exactness of certain inequalities in approximation theory. *Math. Notes*, 1971, vol. 10, no. 5, pp. 768–776.
17. Gheit V.È. The structural and constructive properties of a function and its conjugate in *L*. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.*, 1972, no. 7(122), pp. 19–30 (in Russian).
18. Il'yasov N.A. On inequalities between best approximations and module of smoothness of different orders of periodic functions in L_p, $1 \le p \le \infty$. Singular integral operators, Baku, Baku State Univ. Press, 1991, pp. 40–52 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on August 10, 2017.

N. A. Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan,
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com.