ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУППАХ НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ. I [1]

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы G, и обозначается через $GK(G)$. В ряде статей мы описываем условия совпадения графов простых чисел неизоморфных простых групп. Этот вопрос связан с вопросом А.В. Васильева 16.26 из "Коуровской тетради" о количестве неизоморфных простых групп с одинаковым графом простых чисел. Ранее автором были даны необходимые и достаточные условия совпадения графов простых чисел двух конечных простых групп лиева типа G и G_1, где G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно одной характеристики. Пусть G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно разных характеристик. Ранее автором получены необходимые условия совпадения графов простых чисел двух конечных простых групп лиева типа G и G_1. В настоящей статье уточняется последний результат в случае, когда одна из групп — простая линейная группа достаточно большого лиева ранга над полем порядка q. Доказано, что если G — простая линейная группа достаточно большого лиева ранга, то графы простых чисел групп G и G_1 могут совпадать только при выполнении одного из девятнадцати случаев. В качестве следствия основного результата получены ограничения (при некоторых дополнительных условиях) на возможное число конечных простых групп с графом как у простой линейной группы.

Ключевые слова: конечная простая линейная группа, конечная простая унитарная группа, граф простых чисел, граф Грюнберга — Кегеля, спектр.

M. R. Zinov'eva. On finite simple linear and unitary groups over fields of different characteristics with coinciding prime graphs. I.

Suppose that G is a finite group, $\pi(G)$ is the set of prime divisors of its order, and $\omega(G)$ is the set of orders of its elements. We define a graph on $\pi(G)$ with the following adjacency relation: different vertices r and s from $\pi(G)$ are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$. This graph is called the *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph* of G and is denoted by $GK(G)$. In a series of papers we describe the coincidence conditions for the prime graphs of nonisomorphic simple groups. This issue is connected with Vasil'ev's Question 16.26 in the "Kourovka Notebook" about the number of nonisomorphic simple groups with the same prime graph. Earlier the author derived necessary and sufficient conditions for the coincidence of the prime graphs of two nonisomorphic finite simple groups of Lie type over fields of orders q and q_1, respectively, with the same characteristic. Let G and G_1 be two nonisomorphic finite simple groups of Lie type over fields of orders q and q_1, respectively, with different characteristics. The author also obtained necessary conditions for the coincidence of the prime graphs of two nonisomorphic finite simple groups of Lie type. In the present paper the latter result is refined in the case when G is a simple linear group of sufficiently high Lie rank over a field of order q. If G is a simple linear group of sufficiently high Lie rank, then we prove that the prime graphs of G and G_1 may coincide only in one of nineteen cases. As corollaries of the main result, we obtain constraints (under some additional conditions) on the possible number of simple groups whose prime graph is the same as the prime graph of a simple linear group.

Keywords: finite simple linear group, finite simple unitary group, prime graph, Gruenberg–Kegel graph, spectrum.

MSC: 05C25, 20D05, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-136-151

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со сле-

[1]Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 15-11-10025).

дующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы G, и обозначается через $GK(G)$.

В "Коуровской тетради" [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 о количестве неизоморфных конечных простых групп с одинаковым графом простых чисел. С этим вопросом непосредственно связана проблема описания всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одним и тем же графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случаях, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор в [4] решил этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики. В работе [5] получена теорема редукции в случае, когда заданы две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является классической группой.

В данной работе продолжается это исследование. Мы рассматриваем вопрос о совпадении графов простых чисел двух конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является линейной группой, тем самым уточняя [5, теорема 2].

Мы рассматриваем только простые группы. Для $\varepsilon \in \{+,-\}$ через $A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ обозначается $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\varepsilon = -$, через $D^{\varepsilon}_n(q)$ обозначается $D_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2D_n(q)$ при $\varepsilon = -$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество конечных простых классических групп $A^{\pm}_{n-1}(q)$, где $n \geq 7$; $B_n(q)$, где $n \geq 5$; $C_n(q)$, где $n \geq 5$; $D^{\pm}_n(q)$, где $n \geq 5$.

Согласно [6] если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r,q) = 1$, то через $e(r,q)$ обозначается минимальное натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod r$. Если q нечетно, то $e(2,q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod 4$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod 4$. Говорят, что простое число r с $e(r,q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ — множество всех таких делителей.

Для натурального n через n_p обозначается p-часть числа n.

Пусть n — натуральное число. Введем обозначения: $R^{(1)}_{1,n}(q) = \{2 \neq r_1(q) \in R_1(q) : n_{r_1(q)} < (q-1)_{r_1(q)}\}$; $R^{(2)}_{1,n}(q) = \{2 \neq r_1(q) \in R_1(q) : n_{r_1(q)} = (q-1)_{r_1(q)}\}$; $R^{(3)}_{1,n}(q) = \{2 \neq r_1(q) \in R_1(q) : n_{r_1(q)} > (q-1)_{r_1(q)}\}$; $R^{(1)}_{2,n}(q) = \{2 \neq r_2(q) \in R_2(q) : n_{r_2(q)} < (q+1)_{r_2(q)}\}$; $R^{(2)}_{2,n}(q) = \{2 \neq r_2(q) \in R_2(q) : n_{r_2(q)} = (q+1)_{r_2(q)}\}$; $R^{(3)}_{2,n}(q) = \{2 \neq r_2(q) \in R_2(q) : n_{r_2(q)} > (q+1)_{r_2(q)}\}$.

Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [6–9], мы получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$, где $n \geq 9$, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то $n_1 = n$ и выполнено одно из следующих утверждений (с точностью до перестановки q и q_1):*

(1) *qq_1 нечетно, $n \equiv 1,3 \pmod 6$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(2) *qq_1 нечетно, $n \equiv 5 \pmod 6$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(3) *qq_1 нечетно, $n \equiv 0,4 \pmod 6$, $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$, или $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 < (q_1-1)_2$, или $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(4) *qq_1 нечетно, $n \equiv 2 \pmod 6$, $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$, или $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 < (q_1-1)_2$, или $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(5) *q нечетно, q_1 четно, $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$, $n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(6) *q нечетно, q_1 четно, $n \equiv 8 \pmod{12}$, $n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$.*

Кроме того, $R_k(q) = R_k(q_1)$ для любого k такого, что $4 \le k < [(n+1)/2]$.

Определяем, как в [6], функцию $\nu(x)$ на множестве натуральных чисел:

$$\nu(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \equiv 0 \pmod 4,\\ x/2 & \text{при } x \equiv 2 \pmod 4,\\ 2x & \text{при } x \equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n_1-1}(q_1)\}$, где $n \ge 9$, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то $n_1 = n$ и выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) *qq_1 нечетно, $n \equiv 1, 9 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$;*

(2) *qq_1 нечетно, $n \equiv 3, 7 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$;*

(3) *qq_1 нечетно, $n \equiv 5 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$;*

(4) *qq_1 нечетно, $n \equiv 11 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$;*

(5) *qq_1 нечетно, $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$, $n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$, или $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 < (q_1+1)_2$, или $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(6) *qq_1 нечетно, $n \equiv 8 \pmod{12}$, $n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$, или $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 < (q_1+1)_2$, или $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(7) *qq_1 нечетно, $n \equiv 6, 10 \pmod{12}$, $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 \le (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$;*

(8) *qq_1 нечетно, $n \equiv 2 \pmod{12}$, $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 \le (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$;*

(9) *qq_1 нечетно, $n \equiv 2 \pmod{12}$, $(q-1)_2 = n_2 \le (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n/2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n-2}(q_1)$;*

(10) *q нечетно, q_1 четно, $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$, $n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(11) *q нечетно, q_1 четно, $n \equiv 8 \pmod{12}$, $n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$, $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(12) *q четно, q_1 нечетно, $n \equiv 0,4 \pmod{12}$, $n_2 = (q_1+1)_2$, $\{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) = R_{1,n}^{(2)}(q)$, $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$, $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;*

(13) *q четно, q_1 нечетно, $n \equiv 8 \pmod{12}$, $n_2 = (q_1+1)_2$, $R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$, $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$.*

Кроме того, $R_k(q) = R_{k_1}(q_1)$ для любого k такого, что $4 \le k < [(n+1)/2]$ и $\nu(k_1) = k$.

Теорема 3. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$ и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно, где $n \geq 9$, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то $G_1 = A_{n-1}^{\pm}(q_1)$ и выполняется один из 19 случаев, указанных в теоремах 1 и 2.*

Из теорем 1–3 вытекают следствия.

Следствие 1. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$ и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно, где $9 \le n \not\equiv 2 \pmod 3$, qq_1 нечетно, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то n делится на два различных нечетных простых числа.*

Следствие 2. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$ и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно с условием $GK(G) = GK(G_1)$, где $9 \le n \not\equiv 2 \pmod 3$, n делится ровно на два различных нечетных простых числа, qq_1 нечетно, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$. Тогда G_1 либо не существует, либо единственна.*

Следствие 3. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$ и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно, где $n \geq 9$, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$. Тогда число групп G с условием $GK(G) = GK(G_1)$ конечно.*

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \ldots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. В [8; 9] описаны связные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [6; 7] получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Индуцированный подграф в графе называется его *кокликой*, если его вершины попарно несмежны. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком*. *Максимальной кокликой* будем называть коклику, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(q, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число q.

Лемма 1 (теорема Жигмонди [10]). *Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.*

По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует, за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n.

Далее $q = p^f$ и $q_1 = {p_1}^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа.

Лемма 2 [5, теорема 2]. *Пусть G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно. Если $G \in \mathcal{M}$ и графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\{G, G_1\} = \{A^{\varepsilon}_{n-1}(q), A^{\varepsilon_1}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где* $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$ *и* $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+, -\}$*;*

(2) $\{G, G_1\}$ *— одна из пар* $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, *где либо n четно, либо $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 нечетно;*

(3) $\{G, G_1\} = \{D^{\varepsilon}_n(q), D^{\varepsilon}_n(q_1)\}$, *где n четно и* $\varepsilon \in \{+, -\}$.

При доказательстве лемм 3–19 используются [6, предл. 2.1, 2.2, 4.1, 4.2, табл. 4, 6, 8].

Лемма 3. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, причем $R_i(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$, $R_j(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$, где $i, j, k, l \geq n/2$, $i \neq j$, $k \neq l$, $(k, l), (i, j) \notin \{(n/2, n), (n, n/2)\}$ и $GK(G) = GK(G_1)$. Тогда либо $R_i(q) \subseteq R_k(q_1)$ и $R_j(q) \subseteq R_l(q_1)$, либо $R_i(q) \subseteq R_l(q_1)$ и $R_j(q) \subseteq R_k(q_1)$.*

Доказательство. Пусть $r \in R_i(q)$, $s \in R_j(q)$. Заметим, что r и s несмежны в $GK(G)$. Предположим, что $r \in R_k(q_1)$. Если $s \in R_k(q_1)$, то r и s смежны в $GK(G_1)$; противоречие. Значит, $s \in R_l(q_1)$. Пусть $r_1 \neq r \in R_i(q) \cap R_l(q_1)$. Тогда r и r_1 смежны в $GK(G)$ и несмежны в $GK(G_1)$; противоречие. Таким образом, если $r \in R_k(q_1)$, то $R_i(q) \subseteq R_k(q_1)$, $R_j(q) \subseteq R_l(q_1)$. Аналогично, если $r \in R_l(q_1)$, то $R_i(q) \subseteq R_l(q_1)$, $R_j(q) \subseteq R_k(q_1)$. □

Лемма 4. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, причем $R_i(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$, $R_j(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$, где $i, j, \nu(k), \nu(l) \geq n/2$, $i \neq j$, $k \neq l$, $(i, j), (\nu(k), \nu(l)) \notin \{(n/2, n), (n, n/2)\}$ и $GK(G) = GK(G_1)$. Тогда либо $R_i(q) \subseteq R_k(q_1)$ и $R_j(q) \subseteq R_l(q_1)$, либо $R_i(q) \subseteq R_l(q_1)$ и $R_j(q) \subseteq R_k(q_1)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. □

2. Доказательство теорем

Лемма 5. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, где qq_1 нечетно, $n \equiv 1 \pmod 6$, $n \geq 13$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 1 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 7 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Обозначим через A множество троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ и троек $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$. Обозначим через B множество троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ и троек $\{r_1(q_1),$

$r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$. Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_n(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$, и пар $\{r_2(q_1), r_n(q_1)\}$.

Так как $C = D$, то $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Заметим, что любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$, или $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Также любая тройка $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$, или $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$, поэтому $R_{n-2}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$.

По лемме 3 либо $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ и $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ и $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$. Аналогично можно получить, что либо $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$ и $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$, либо $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ и $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$. Таким образом, либо $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) = R_{n-2}(q_1)$ и $R_{n-2}(q) = R_{n-1}(q_1)$. Так как $\{r_6(q), r_{n-5}(q), r_{n-4}(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\} = \{r_6(q_1), r_{n-5}(q_1), r_{n-4}(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$, то $R_{n-2}(q) \subseteq R_6(q_1) \cup R_{n-5}(q_1) \cup R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$. Отсюда $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ и $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$. Заметим, что множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$. Отсюда $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$. Так как $A = B$, то $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$. Из равенства $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\} = \{r_3(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$ следует, что $R_3(q) = R_3(q_1)$.

Случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ рассматривается аналогично с использованием леммы 4. $\square$

Лемма 6. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^{\pm}(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно,* $n \equiv 3 \pmod 6$, $n \geq 9$. *Если графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$, $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 3 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$, $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 9 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$, $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Обозначим через A множество троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ и троек $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$. Обозначим через B множество троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ и троек $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$. Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_n(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$, и пар $\{r_2(q_1), r_n(q_1)\}$.

Так как $C = D$, то $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Заметим, что любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где

$r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1))$, то $(n+1)/2 = t(r,G) = t(r,G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$. Аналогично $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$. Таким образом, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$. Заметим, что множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(3)}_{1,n}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(3)}_{1,n}(q_1)$. Отсюда $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1)$. Так как $A = B$, то $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$. Из равенства $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ следует, что $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$, то $(n+1)/2 = t(r,G) = t(r,G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$. Аналогично $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$. Таким образом, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$.

Случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ рассматривается аналогично. □

Лемма 7. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно,* $n \equiv 5 \pmod 6$, $n \geq 11$. *Если графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 5 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 11 \pmod{12}$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Обозначим через A множество троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, троек $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$, и троек $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$. Обозначим через B множество троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, троек $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, и троек $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$. Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(1)}_{1,n}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_n(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, и пар $\{r_2(q_1), r_n(q_1)\}$.

Так как $C = D$, то $R^{(1)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Заметим, что любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, или $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $(n+1)/2 = t(r,G) = t(r,G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$. Аналогично $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$. Таким образом, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$. Заметим, что множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(3)}_{1,n}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(3)}_{1,n}(q_1)$. Отсюда $R^{(3)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1)$. Так как $A = B$, то $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$.

Случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ рассматривается аналогично. □

Лемма 8. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно,* $n \equiv 0 \pmod 6$, $n \geq 12$. *Если графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$, *или* $n_2 < (q-1)_2$ *и* $n_2 < (q_1-1)_2$, *или* $n_2 > (q-1)_2$ *и* $n_2 > (q_1-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$, *или* $n_2 < (q-1)_2$ *и* $2 < n_2 < (q_1+1)_2$, *или* $n_2 > (q-1)_2$ *и* $n_2 > (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$,

$R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n_2 < (q-1)_2$ *и* $2 = n_2 \le (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$.

Обозначим через A множество троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ и троек $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$. Обозначим через B множество троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ и троек $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$. Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(3)}_{1,n}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, и $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$.

Предположим, что $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$. По лемме 3 либо $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$. Так как $A = B$, то $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$. Из равенства $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ следует, что $R_{n-1}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Итак, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$, $R_n(q) = R_n(q_1)$ и $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$. Аналогично $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$. Таким образом, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$. Так как $C = D$, то $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(1)}_{1,n}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(1)}_{1,n}(q_1)$. Таким образом, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$.

Предположим, что $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 < (q_1-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_n(q_1)$. Заметим, что множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(1)}_{1,n}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(1)}_{1,n}(q_1)$. Таким образом, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$. Так как $C = D$, то $R_{n-1}(q) \subseteq R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap (R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1))$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 2$; противоречие. Итак, $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$. Аналогично $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$. Таким образом, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Так как $A = B$, то $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$. Из равенства $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ следует, что $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$. Аналогично $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$. Таким образом, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$.

Предположим, что $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$. Заметим, что тройка $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ не совпадает с тройками $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$; противоречие.

Предположим, что $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1-1)_2$, или $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2 = 2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$. Так как $C = D$, то $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Заметим, что тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1),$
$r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$. Если $r \in R_n(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$. Тройка $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$,

$\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-2}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$.

По лемме 3 либо $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ и $R_n(q) \subseteq R_n(q_1)$, либо $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$ и $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$. Аналогично можно получить, что либо $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ и $R_n(q) \subseteq R_n(q_1)$, либо $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$ и $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$. Таким образом, либо $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$, либо $R_{n-2}(q) = R_n(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-2}(q_1)$. Если $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$, то, рассуждая, как в лемме 5, можно получить, что $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$. Пусть $R_{n-2}(q) = R_n(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-2}(q_1)$. Если $n \equiv 0 \pmod 4$, то $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$; противоречие. Если $n \equiv 2 \pmod 4$, то $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$; противоречие.

Случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ рассматривается аналогично с использованием леммы 4. $\square$

Лемма 9. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, где qq_1 нечетно, $n \equiv 2 \pmod 6$, $n \geq 14$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$, или $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 < (q_1-1)_2$, или $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 2 \pmod{12}$, $n_2 < (q-1)_2$ и $2 = n_2 \leq (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 2 \pmod{12}$, $2 = (q-1)_2 = n_2 \leq (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n/2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{2n-2}(q_1)$;

(4) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 8 \pmod{12}$, $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$, или $n_2 < (q-1)_2$ и $2 < n_2 < (q_1+1)_2$, или $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$.

Обозначим через A множество троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, троек $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$, и троек $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$. Обозначим через B множество троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, троек $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, и троек $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$. Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(3)}_{1,n}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, и $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$.

Предположим, что $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$. По лемме 3 либо $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$. Так как $A = B$, то $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$. Из равенства $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ следует, что $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Итак, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$, $R_n(q) = R_n(q_1)$. Так как $C = D$, то $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Заметим, что множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(1)}_{1,n}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(1)}_{1,n}(q_1)$. Отсюда $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$.

Предположим, что $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 < (q_1-1)_2$. Рассуждая, как в лемме 8, получаем, что $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Так как $A = B$, то $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$.

Предположим, что $n_2 < (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$. Но $\{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\} \neq \{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$; противоречие.

Предположим, что $n_2 > (q-1)_2$ и $n_2 > (q_1-1)_2$, или $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2 = 2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$. Так как $C = D$, то $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$.

Заметим, что тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_n(q_1)$. Если $r \in R_n(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_n(q) \subseteq R_n(q_1)$. Аналогично $R_n(q_1) \subseteq R_n(q)$. Таким образом, $R_n(q) = R_n(q_1)$. Рассуждая, как в случае $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$, можно получить, что $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$.

Случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ рассматривается аналогично. □

Лемма 10. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно,* $n \equiv 4 \pmod 6$, $n \geq 10$. *Если графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$, *или* $n_2 < (q-1)_2$ *и* $n_2 < (q_1-1)_2$, *или* $n_2 > (q-1)_2$ *и* $n_2 > (q_1-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 4 \pmod{12}$, $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$, *или* $n_2 < (q-1)_2$ *и* $2 < n_2 < (q_1+1)_2$, *или* $n_2 > (q-1)_2$ *и* $n_2 > (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, $n \equiv 10 \pmod{12}$, $n_2 < (q-1)_2$ *и* $2 = n_2 \leq (q_1+1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ *и* $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.

Лемма 11. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, *где* $n \geq 9$. *Если графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *совпадают, то* $R_k(q) = R_k(q_1)$ *для любого* k *такого, что* $4 \leq k < [(n+1)/2]$.

Доказательство. Так как $k \geq 4$, то $\{r_k(q), r_{n-k+1}(q), ..., r_j(q), ..., r_n(q)\} = \{r_k(q_1), r_{n-k+1}(q_1), ..., r_j(q_1), ..., r_n(q_1)\}$, где k не делит j и $j \in \{n-k+1, ..., n\}$. Отсюда $R_k(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_{n-k+1}(q_1) \cup ... \cup R_n(q_1)$. Если $r \in R_k(q) \cap R_i(q_1)$, где $i \in \{n-k+1, .., n\}$, и k не делит i, то $k = t(r, G) \neq t(r, G_1) = [(n+1)/2]$; противоречие. Итак, $R_k(q) \subseteq R_k(q_1)$. Аналогично $R_k(q_1) \subseteq R_k(q)$. Таким образом, $R_k(q) = R_k(q_1)$. □

Лемма 12. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, *где* $n \geq 9$. *Если графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *совпадают, то* $R_k(q) = R_{k_1}(q_1)$ *для любого* k *такого, что* $4 \leq k < [(n+1)/2]$ *и* $\nu(k_1) = k$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 11. □

Лемма 13. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно,* n *нечетно,* $n_1 \neq n$, $n \geq 9$. *Тогда* $GK(G) \neq GK(G_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$. Так как $(n+1)/2 = t(G) = t(G_1) = [(n_1+1)/2]$ и $n_1 \neq n$, то $n_1 = n+1$. Если $2 < (n_1)_2 = (n+1)_2 = (q_1-1)_2$, то $3 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 2$; противоречие.

Предположим, что $(n_1)_2 = (n+1)_2 < (q_1-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n+1}(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_{n+1}(q_1)$. Если $n \equiv 3 \pmod 4$, то $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$; противоречие. Значит $n \equiv 1 \pmod 4$. Отсюда $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-2}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap R_4(q_1)$, то $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 4$; противоречие. Отсюда $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$. Аналогично $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$. По лемме 3 либо $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ и $R_{n-3}(q) \subseteq R_n(q_1)$, либо $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$ и $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$.

Заметим, что любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n+1}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ при $n \equiv 0 \pmod 3$ или $\{r_3(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ при $n \equiv 1 \pmod 3$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n+1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_n(q_1)$ при $n \equiv 0 \pmod 3$ и $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n+1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_n(q_1)$ при $n \equiv 1, 2 \pmod 3$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n+1}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1) \cup R_n(q_1)$ при $n \equiv 0 \pmod 3$ и $R_{n-1}(q) \subseteq R_n(q_1)$ при $n \equiv 1, 2 \pmod 3$.

Пусть $r \in R_{n-1}(q) \cap R_n(q_1)$. Если $R_{n-3}(q) \subseteq R_n(q_1)$, то r и $r_1 = r_{n-3}(q)$ несмежны в $GK(G)$ и смежны в $GK(G_1)$; противоречие. Если $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$, то r и $r_1 = r_{n-2}(q)$ несмежны в $GK(G)$ и смежны в $GK(G_1)$; противоречие. Значит, $R_{n-1}(q) \cap R_n(q_1) = \varnothing$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ и $n \equiv 0 \pmod 3$. Заметим, что любая тройка $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ не совпадает с тройками $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n+1}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$; противоречие.

Предположим, что $(n_1)_2 = (n+1)_2 > (q_1-1)_2$ или $(n_1)_2 = (n+1)_2 = (q_1-1)_2 = 2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда $\{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\} = \{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$. Отсюда $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_4(q) \cup R_{n-3}(q) \cup R_{n-2}(q)$. Если $r \in R_{n+1}(q_1) \cap R_4(q)$, то $(n+1)/2 = t(r, G_1) = t(r, G) = 4$; противоречие. Итак, $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-3}(q) \cup R_{n-2}(q)$. Заметим, что любая тройка $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ совпадает с одной из троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$, $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$ при $n \equiv 1 \pmod 3$ или $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ при $n \equiv 2 \pmod 3$, поэтому $R_{n+1}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-2}(q) \cup R_{n-1}(q)$ при $n \equiv 1 \pmod 3$ и $R_{n+1}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-1}(q)$ при $n \equiv 0, 2 \pmod 3$. Так как $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-3}(q) \cup R_{n-2}(q)$, то $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ и $n \equiv 1 \pmod 3$. Любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n+1}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n+1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n+1}(q_1)$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n+1}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$; противоречие.

Пусть $n \equiv 3 \pmod 4$. Тогда $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap R_4(q_1)$, то $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 4$; противоречие. Отсюда $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Заметим, что любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n+1}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ при $n \equiv 2 \pmod 3$ или $\{r_3(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ при $n \equiv 1 \pmod 3$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n+1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_{n+1}(q_1)$ при $n \equiv 2 \pmod 3$ и $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n+1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n+1}(q_1)$ при $n \equiv 0, 1 \pmod 3$. Так как $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$, то $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ и $n \equiv 2 \pmod 3$. Любая тройка $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ совпадает с одной из троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где

$r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$, $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $R_{n+1}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-1}(q)$. Если $r \in R_{n+1}(q_1) \cap (\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q))$, то $(n+1)/2 = t(r,G) = t(r,G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$; противоречие.

В случае $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n_1-1}(q_1)\}$, используя лемму 4, аналогично получаем противоречие. $\square$

Лемма 14. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где* qq_1 *четно,* n *нечетно,* $n_1 \neq n$, $n \geq 9$. *Тогда* $GK(G) \neq GK(G_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$. Если $G = A_8(2)$, то по [5, лемма 6] $GK(G) \neq GK(G_1)$. Если q_1 четно и q нечетно, то $3 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 2$; противоречие. Значит, q четно и q_1 нечетно. Так как $[(n_1+1)/2] = t(G_1) = t(G) = (n+1)/2$, то $n_1 = n+1$. Так как $t(2,G) = 3 = t(2,G_1)$, то $2 < (n+1)_2 = (q_1-1)_2$ и $n \equiv 3 \pmod 4$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$. По лемме 3 либо $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n+1}(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) = R_{n+1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$. Так как $n \equiv 3 \pmod 4$, то $\{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\} = \{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$; противоречие.

В случае $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n_1-1}(q_1)\}$ аналогично получаем противоречие. $\square$

Лемма 15. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно,* n *четно,* $n_1 \neq n$, $n \geq 10$. *Тогда* $GK(G) \neq GK(G_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$. Так как $[(n_1+1)/2] = t(G_1) = t(G) = n/2$, то $n_1 = n-1$.

Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(3)}_{1,n}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_{n-2}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(3)}_{1,n-1}(q_1)$.

Предположим, что $n_2 < (q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$. Если $n \equiv 0 \pmod 4$, то $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$; противоречие. Значит, $n \equiv 2 \pmod 4$. Отсюда $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-4}(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$. Если $r \in R_{n-1}(q) \cap R_4(q_1)$, то $n/2 = t(r,G) = t(r,G_1) = 4$; противоречие. Отсюда $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$. Так как $C = D$, то $R_{n-1}(q) \subseteq R^{(3)}_{1,n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$; противоречие с $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$.

Предположим, что $n_2 > (q-1)_2$ или $n_2 = (q-1)_2 = 2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$.

Пусть $n \equiv 2 \pmod 4$. Тогда $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-4}(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_n(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$. Если $r \in R_n(q) \cap R_4(q_1)$, то $n/2 = t(r,G) = t(r,G_1) = 4$; противоречие. Отсюда $R_n(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$. Заметим, что любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n-1}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ при $n \equiv 0 \pmod 3$, или $\{r_3(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ при $n \equiv 2 \pmod 3$, поэтому $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n-1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ при $n \equiv 2 \pmod 3$ и $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n-1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ при $n \equiv 0, 1 \pmod 3$. Так как $R_n(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$, то $R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$ и $n \equiv 2 \pmod 3$. Любая тройка $\{p_1, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ совпадает с одной из троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$, $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $R_{n-2}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) \cup R_n(q)$. Если $r \in R_{n-2}(q_1) \cap (\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q))$, то $n/2 = t(r, G_1) = t(r,G) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$; противоречие.

Пусть $n \equiv 0 \pmod 4$. Тогда $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, поэтому $R_{n-2}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap R_4(q_1)$, то $n/2 = t(r,G) = t(r,G_1) = 4$; противоречие. Отсюда $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Аналогично

$R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. По лемме 3 либо $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ и $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$, либо $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$ и $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$. Заметим, что любая тройка $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с одной из троек $\{p_1, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n-1}(q_1)$, $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ при $n \equiv 0 \pmod 3$ или $\{r_3(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ при $n \equiv 2 \pmod 3$, поэтому $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n-1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ при $n \equiv 2 \pmod 3$ и $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n-1}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ при $n \equiv 0, 1 \pmod 3$. Если $r \in R_n(q) \cap (\{p_1\} \cup R^{(2)}_{1,n-1}(q_1) \cup R_3(q_1))$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Отсюда $R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ при $n \equiv 2 \pmod 3$ и $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ при $n \equiv 0, 1 \pmod 3$.

Пусть $r \in R_n(q) \cap R_{n-2}(q_1)$. Если $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ и $r_1 = r_{n-2}(q)$, то r и r_1 несмежны в $GK(G)$, r и r_1 смежны в $GK(G_1)$; противоречие. Если $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ и $r_1 = r_{n-3}(q)$, то r и r_1 несмежны в $GK(G)$, r и r_1 смежны в $GK(G_1)$; противоречие. Значит, $R_n(q) \cap R_{n-2}(q_1) = \varnothing$, $R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$. Пусть $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$. Если $r \in R_n(q)$ и $r_1 \in R_{n-3}(q)$, то r и r_1 несмежны в $GK(G)$, r и r_1 смежны в $GK(G_1)$; противоречие. Пусть $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$. Если $r \in R_n(q)$ и $r_1 \in R_{n-2}(q)$, то r и r_1 несмежны в $GK(G)$, r и r_1 смежны в $GK(G_1)$; противоречие.

Если $2 < n_2 = (q-1)_2$, то $3 = t(2, G) \neq t(2, G_1) = 2$; противоречие.

В случае $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n_1-1}(q_1)\}$, используя лемму 4, аналогично получаем противоречие. □

Лемма 16. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, где qq_1 четно, n нечетно или n четно, $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \geq 9$. Тогда $GK(G) \neq GK(G_1)$.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$. Если $G = A_8(2)$, то по [5, лемма 6] $GK(G) \neq GK(G_1)$. Без ограничения общности можно считать, что q_1 четно и q нечетно. Тогда $3 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 2$; противоречие. В случае $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n_1-1}(q_1)\}$ аналогично получаем противоречие. □

Лемма 17. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, где qq_1 четно, $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$, $n \geq 12$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, q нечетно, q_1 четно, $2 < n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, q нечетно, q_1 четно, $2 < n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = R^{(2)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, q четно, q_1 нечетно, $2 < n_2 = (q_1+1)_2$, $\{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) = R^{(2)}_{1,n}(q)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_3(q) = R_6(q_1)$, $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, где q нечетно, q_1 четно и $n \equiv 0 \pmod{12}$. Так как $t(2, G_1) = 3 = t(2, G)$, то $2 < n_2 = (q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$. По лемме 3 либо $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$.

Обозначим через A множество троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ и троек $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$. Обозначим через B множество троек $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$. Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(3)}_{1,n}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, и $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$.

Заметим, что $A = B$. Отсюда $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) = R^{(2)}_{1,n}(q_1)$. Из равенства $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ следует, что $R_{n-1}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Итак, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$, $R_n(q) = R_n(q_1)$ и $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$. Если $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$, то $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$; противоречие. Итак, $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$. Аналогично $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$. Таким образом, $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$, $R_3(q) = R_3(q_1)$. Так как $C = D$, то $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(1)}_{1,n}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(1)}_{1,n}(q_1)$. Таким образом, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$.

Случаи $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, где $n \equiv 4 \pmod{12}$, и $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ рассматриваются аналогично с использованием лемм 3 и 4. □

Лемма 18. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n-1}(q_1)\}$, где qq_1 четно, $n \equiv 8 \pmod{12}$, $n \geq 20$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнен один из следующих случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, q нечетно, q_1 четно, $2 < n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, q нечетно, q_1 четно, $2 < n_2 = (q-1)_2$, $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$, q четно, q_1 нечетно, $2 < n_2 = (q_1+1)_2$, $R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R^{(2)}_{2,n}(q_1) \cup R_6(q_1)$, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{2,n}(q_1)$, $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{2,n}(q_1) \cup R_1(q_1)$, $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$, где q нечетно, q_1 четно. Так как $t(2, G_1) = 3 = t(2, G)$, то $2 < n_2 = (q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$. По лемме 3 либо $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_n(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$.

Обозначим через A множество троек $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, троек $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(2)}_{1,n}(q)$, и троек $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$. Обозначим через B множество троек $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(2)}_{1,n}(q_1)$, и троек $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$. Обозначим через C множество пар $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(3)}_{1,n}(q)$, и пар $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$. Обозначим через D множество пар $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(3)}_{1,n}(q_1)$, и $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$.

Заметим, что $A = B$. Отсюда $\{p\} \cup R^{(2)}_{1,n}(q) \cup R_3(q) = R^{(2)}_{1,n}(q_1) \cup R_3(q_1)$. Из равенства $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ следует, что $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$. Итак, $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$, $R_n(q) = R_n(q_1)$. Так как $C = D$, то $R^{(3)}_{1,n}(q) \cup R_2(q) = R^{(3)}_{1,n}(q_1) \cup R_2(q_1)$. Множество пар $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $r_1(q) \in R^{(1)}_{1,n}(q)$, совпадает с множеством пар $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \in R^{(1)}_{1,n}(q_1)$. Таким образом, $R^{(1)}_{1,n}(q) = R^{(1)}_{1,n}(q_1)$.

Случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ рассматривается аналогично с использованием леммы 4. □

Лемма 19. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A^{\pm}_{n_1-1}(q_1)\}$, где qq_1 четно, n четно, $n_1 \neq n$, $n \geq 10$. Тогда $GK(G) \neq GK(G_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$. Так как $[(n_1+1)/2] = t(G_1) = t(G) = n/2$, то $n_1 = n-1$. Предположим, что q четно. Тогда $3 = t(2, G) = t(2, G_1) = 2$; противоречие. Значит, q_1 четно. Так как $t(2, G_1) = 3 = t(2, G)$, то $2 < n_2 = (q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$. По лемме 3 либо $R_{n-1}(q) = R_{n-2}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$, либо $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ и $R_n(q) = R_{n-2}(q_1)$. Так как $n \equiv 0 \pmod 4$, то $\{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\} \neq \{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$; противоречие.

В случае $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n_1-1}(q_1)\}$, используя лемму 4, аналогично получаем противоречие. □

Из лемм 5–19 следует заключение теорем 1 и 2.

Теорема 3 следует из леммы 2 и теорем 1 и 2.

3. Доказательство следствий

Следствие 1 вытекает непосредственно из теорем 1 и 2.

Докажем следствие 2. Пусть $G = A_{n-1}(q)$ и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно, где $9 \leq n \not\equiv 2 \pmod 3$, qq_1 нечетно, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$, n делится ровно на два различных нечетных простых числа и графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают. Так как $n \not\equiv 2 \pmod 3$, то из теорем 1 и 2 следует, что $\pi(q(q^2-1)) = \pi(q_1(q_1^2-1))$ и n делится на p и p_1. Так как p известно, то p_1 известно, поэтому $\pi(q_1^2-1)$ известно. Предположим, что существуют натуральные числа l и m такие, что $l > m$ и $\pi(p_1^{2l}-1) = \pi(q_1^2-1) = \pi(p_1^{2m}-1)$. По лемме 1 существует $t \in \pi(p_1^{2l}-1) \setminus \pi(p_1^{2m}-1)$; противоречие. Значит, q_1 не может принимать два и более значений. Таким образом, G_1 либо не существует, либо единственна.

Докажем следствие 3. Пусть $G = A_{n-1}(q)$ и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно, где $9 \leq n \not\equiv 2 \pmod 3$, qq_1 нечетно, $q = p^f$, $q_1 = {p_1}^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $f, f_1 \in \mathbb{N}$.

Пусть $n \not\equiv 2 \pmod 3$ и q нечетно. Из теорем 1 и 2 следует, что $\pi(q(q^2-1)) = \pi(q_1(q_1^2-1))$. Поскольку $\pi(q(q^2-1))$ конечно, то число возможностей для p_1 конечно. Если p_1 фиксировано, то, рассуждая, как в доказательстве следствия 2, можно показать, что q_1 либо не существует, либо единственно. Значит, число возможностей для q_1 конечно.

Пусть $n \not\equiv 2 \pmod 3$ и q четно. Из теорем 1 и 2 следует, что $\pi(q^2-1) = \pi(q_1(q_1^2-1))$. Поскольку $\pi(q(q^2-1))$ конечно, то число возможностей для p_1 конечно. Если p_1 фиксировано, то, рассуждая, как в доказательстве следствия 2, можно показать, что q_1 либо не существует, либо единственно. Значит, число возможностей для q_1 конечно.

Пусть $n \equiv 2 \pmod 3$ и q нечетно. Из теорем 1 и 2 следует, что $\pi(q(q^2-1)(q^3-1)) = \pi(q_1(q_1^2-1)(q_1^3-1))$. Если q известно, то число возможностей для p_1 конечно и $\pi(q_1(q_1^2-1)(q_1^3-1))$ известно. Пусть p_1 фиксировано. Предположим, что существуют натуральные числа l и m такие, что $l > m$ и $\pi((p_1^{2l}-1)(p_1^{3l}-1)) = \pi((q_1^2-1)(q_1^3-1)) = \pi((p_1^{2m}-1)(p_1^{3m}-1))$. По лемме 1 существует $t \in \pi(p_1^{3l}-1) \setminus \pi((p_1^{2m}-1)(p_1^{3m}-1))$; противоречие. Значит, если p_1 фиксировано, то q_1 не может принимать два и более значений. Итак, число возможностей для q_1 конечно.

Пусть $n \equiv 2 \pmod 3$ и q четно. Из теорем 1 и 2 следует, что $\pi((q^2-1)(q^3-1)) = \pi(q_1(q_1^2-1)(q_1^3-1))$. Если q известно, то, рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что число возможностей для q_1 конечно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. V. 31, no. 9. P. 4405–4424.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Зиновьева М.Р.** Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 168–183.

5. **Зиновьева М.Р.** О конечных простых классических группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 101–116.
6. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
8. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
9. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
10. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.

Зиновьева Марианна Рифхатовна Поступила 23.08.2017
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

REFERENCES

1. Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook. 18th Edition. Inst. Math. SO RAN. Novosibirsk, 2014. 253 p. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf .
2. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra.*, 2003, vol. 31, no. 9, pp. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
3. Zvezdina M. A. On nonabelian simple groups having the same prime graph as an alternating group. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 47-55. doi: 10.1134/S0037446613010072 .
4. Zinov'eva M.R. Finite simple groups of Lie type over a field of the same characteristic with the same prime graph. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 168–183. (in Russian)
5. Zinov'eva On Finite Simple Classical Groups over Fields of Different Characteristics with Coinciding Prime Graphs. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, Suppl. 1, pp. 223–239. doi: 10.1134/S0081543817050248 .
6. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. An Adjacency Criterion for the Prime Graph of a Finite Simple Group. *Algebra Logic*, 2005, vol. 44, no. 6, pp. 381–406. doi: 10.1007/s10469-005-0037-5 .
7. Vasil'ev A.V. Vdovin E.P. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group. *Algebra Logic*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 291–322. doi: 10.1007/s10469-011-9143-8 .
8. Kondrat'ev A.S Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363 .
9. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .
10. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444 .

The paper was received by the Editorial Office on August 23, 2017.

Marianna Rifkhatovna Zinov'eva, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru .