ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 519.17

АВТОМОРФИЗМЫ $AT4(4,4,2)$-ГРАФА И ОТВЕЧАЮЩИХ ЕМУ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ[1]

К. С. Ефимов

А. А. Махнев, Д. В. Падучих и М. М. Хамгокова классифицировали дистанционно регулярные локально $GQ(5,3)$-графы. В частности, возникает $AT4(4,4,2)$-граф с массивом пересечений $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$ на 644 вершинах. Эти же авторы доказали, что $AT4(4,4,2)$-граф не является локально $GQ(5,3)$-графом. Однако существование $AT4(4,4,2)$-графа, являющегося локально псевдо-$GQ(5,3)$-графом, неизвестно. Антиподальное частное $AT4(4,4,2)$-графа является сильно регулярным графом с параметрами (322, 96, 20, 32). Оба этих графа являются локально псевдо-$GQ(5,3)$-графами. В работе найдены возможные автоморфизмы указанных графов. Оказалось, что группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$ действует интранзитивно на множестве его антиподальных классов.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

K. S. Efimov. Automorphisms of an $AT4(4,4,2)$-graph and of the corresponding strongly regular graphs.

A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, and M.M. Khamgokova gave a classification of distance-regular locally $GQ(5,3)$-graphs. In particular, there arises an $AT4(4,4,2)$-graph with intersection array $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$ on 644 vertices. The same authors proved that an $AT4(4,4,2)$-graph is not a locally $GQ(5,3)$-graph. However, the existence of an $AT4(4,4,2)$-graph that is a locally pseudo $GQ(5,3)$-graph is unknown. The antipodal quotient of an $AT4(4,4,2)$-graph is a strongly regular graph with parameters (322, 96, 20, 32). These two graphs are locally pseudo $GQ(5,3)$-graphs. We find their possible automorphisms. It turns out that the automorphism group of a distance-regular graph with intersection array $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$ acts intransitively on the set of its antipodal classes.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-119-127

Введение

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в доказательствах теорем. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех его вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup\Gamma(a)$. Если граф Γ фиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Для множества X вершин графа Γ через $X^\perp$ обозначим $\cap_{x\in X}x^\perp$. Если не оговорено противное, то слово "подграф" будет означать "индуцированный подграф".

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ. Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ, то граф Γ назовем *локально Δ-графом.*

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* валентности k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен валентности k, и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 14-11-00061-П (теорема 3 и следствие), и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теоремы 1 и 2).

каждое его ребро лежит ровно в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит ровно μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный многодольный граф с долями $M_1, \ldots, M_n$ порядков $m_1, \ldots, m_n$ соответственно. Если $m_1 = \cdots = m_n = m$, то указанный граф обозначается через $K_{n\times m}$.

Задача классификации локально $GQ(s,t)$-графов является классической. В работе [1] классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(5,3)$-графы.

Предложение. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом, в котором окрестность каждой вершины является обобщенным четырехугольником $GQ(5,3)$. Тогда либо диаметр Γ равен 2 и Γ имеет параметры $(322, 96, 20, 32)$, либо диаметр Γ равен 4 и Γ — граф с массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ на 644 вершинах или с массивом пересечений $\{96, 75, 24, 1; 1, 8, 75, 96\}$ на 1288 вершинах.*

Графы диаметра 4 из предложения являются $AT4(4,4,r)$-графами для r, равного 2 и 4 соответственно. Ввиду [2] $AT4(4,4,4)$-граф не существует, а по теореме из [3] $AT4(4,4,2)$-граф не является локально $GQ(5,3)$-графом. Однако о существовании $AT4(4,4,2)$-графа, являющегося локально псевдо-$GQ(5,3)$-графом, неизвестно.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$. Тогда его антиподальное частное Γ' — сильно регулярный граф с параметрами $(322, 96, 20, 32)$. Оба этих графа являются локально псевдо-$GQ(5,3)$-графами. В работе найдены возможные автоморфизмы указанных графов.

Теорема 1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(96, 20, 4, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$ и верно одно из утверждений*:

(1) *Ω является пустым графом, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 16s$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 24t$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $p = 5$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 40s + 20$ или $n = 6$ и $\alpha_1(g) = 40s$, либо $p = 3$, $n = 3$ и $\alpha_1(g) = 24t + 12$ или $n = 6$ и $\alpha_1(g) = 24t$;*

(3) *Ω является l-кокликой, $p = 2$, l четно, $4 \le l \le 16$ и $\alpha_1(g) = 16t - 4l$;*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь и либо*

(*i*) *$p = 3$, $|\Omega| = 3t$, $t = 3, 4, \ldots, 8$, причем в случае $t = 3$ в Ω найдется вершина a степени 8, для которой $\Omega(a)$ является объединением изолированных ребер, либо*

(*ii*) *$p = 2$, $|\Omega| = 2l$, $l = 3, 4, \ldots, 12$, причем в случае $l = 3$ граф Ω — октаэдр.*

Теорема 2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(322, 96, 20, 32)$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(96, 20, 4, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$ и верно одно из утверждений*:

(1) *Ω является пустым графом, либо $p = 23$ и $\alpha_1(g) = 92$, либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 140l - 28$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 40t - 8$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $p = 3$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 60t - 24$ или $n = 4$ и $\alpha_1(g) = 60t - 12$, или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 60t$, либо $p = 5$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 100s + 20$ или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 100s + 40$;*

(3) *Ω является l-кокликой, $p = 2$, l четно, $4 \le l \le 56$ и $\alpha_1(g) = 20m + 12 + 4l$;*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь, степень любой вершины в Ω не больше 24 и либо*

(*i*) *$p = 3$, $|\Omega| = 3n + 1$, $n = 1, 2, \ldots, 37$ и $\alpha_1(g) = 60l + 12n$, либо*

(*ii*) *$p = 2$, $|\Omega| = 2m$, $m = 4, 6, \ldots, 56$ и $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$.*

Следствие 1. *Сильно регулярный граф с параметрами $(322, 96, 20, 32)$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(96, 20, 4, 4)$, не является вершинно транзитивным.*

Теорема 3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,23\}$ *и верно одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф, либо*

(*i*) $p=2$, $\alpha_4(g)=4l$, $\alpha_2(g)=20-20l-80s$, $\alpha_1(g)=56m+18l+40s+32$ *и* $\alpha_3(g)=592+2l+40s-56m$, *либо*

(*ii*) $p=7$, $\alpha_4(g)=0$, $\alpha_1(g)=140-140l+196t$, $\alpha_2(g)=280l+140$ *и* $\alpha_3(g)=364-196t-140l$, *либо*

(*iii*) $p=23$, $\alpha_4(g)=0$, $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=92$ *и* $\alpha_2(g)=460$;

(2) Ω *является объединением двух изолированных* t*-клик, либо* $p=3$, $t=1,4,7$ *и* $\alpha_2(g)=40s-10t-20$, *либо* $p=5$, $t=2,7$ *и* $\alpha_2(g)=200s-10t+20$;

(3) Ω *содержит геодезический* 2*-путь*, $p=2$, $|\Omega|=4m-\alpha_4(g)$, $\alpha_4(g)=14e+2s-78+10n$, $\alpha_1(g)=8s$, $\alpha_2(g)=80n+20-20m$ *и* $\alpha_3(g)=624-80n+16m-8s$.

Ввиду теоремы 3 и следствия группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$ действует интранзитивно на множестве его антиподальных классов.

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в доказательствах теорем.

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ) *и неглавными собственными значениями* r,s, *где* $s<0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s\le d-\frac{w(k-d)}{v-w}\le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из [4, §2].

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i\ge 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w)=i$. Для $u\in\Gamma$ положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$ и $v=|\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u,w смежны, если $(u,w)\in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i>0$ и $A_0=I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j=\sum p^l_{ij}A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij} графа Γ.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0),\ldots,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0=1,\ldots,m_d$ соответственно. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i)=m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенствами $PQ=QP=vI$.

Пусть u_j и w_j — соответственно левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j,w_j\rangle$. Фактически w_j являются столбцами матрицы P и m_ju_j являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, W_1, \ldots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [5, §3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 2. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с i-м целочисленным собственным значением θ_i, ψ — мономиальное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ в группу линейных преобразований пространства $V = \mathbf{C}^v$, χ_i — характер проекции ψ на подпространство W_i размерности m_i, порожденное собственными векторами матрицы смежности графа Γ, отвечающими θ_i. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Q — рациональная матрица, то для элемента g из G имеем $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, взаимно простого с $|g|$*;

(2) *если g — элемент из G простого порядка p, то p делит $m_i - \chi_i(g)$*;

(3) *если g — элемент из G порядка p^2, p — простое число, то p^2 делит $m_i - \chi_i(g^p)$.*

Доказательство вытекает из [6, лемма 1] и [7].

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(96, 20, 4, 4)$

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(96, 20, 4, 4)$ и спектром $20^1, 4^{45}, -4^{50}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По [8, теорема 3.2.] имеем $|\Omega| \le 96 \cdot 4/16 = 24$.

Лемма 3. *Пусть χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство W_1 размерности 45. Тогда*

(1) *$\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/8 - 3$ и $\chi_1(g) - 45$ делится на p*;

(2) *если Ω является пустым графом, то либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 16s$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 24t$*;

(3) *если Ω является n-кликой, то либо $p = 5$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 40s + 20$ или $n = 6$ и $\alpha_1(g) = 40s$, либо $p = 3$, $n = 3$ и $\alpha_1(g) = 24t + 12$ или $n = 6$ и $\alpha_1(g) = 24t$*;

(4) *если Ω является l-кокликой, то $p = 2$, l четно, $4 \le l \le 16$ и $\alpha_1(g) = 16t - 4l$.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 45 & 9 & -3 \\ 50 & -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = 1/32(15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_2(g))$. Так как $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, то $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/8 - 3$. Наконец, $\chi_1(g) - 45$ делится на p по лемме 2.

Пусть Ω является пустым графом. Тогда $p \in \{2, 3\}$. Если $p = 2$, то $\chi_1(g)$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 16s$. Если $p = 3$, то $\alpha_1(g) = 24t$.

Пусть Ω является n-кликой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем $n \le 1 + k/m = 6$. Если $n = 1$, то p делит 20 и 75, поэтому $p = 5$, $\chi_1(g) = (4 + \alpha_1(g))/8 - 3$ и $\alpha_1(g) = 40s + 20$. Если $n \ge 2$, то p делит $6 - n$, 15 и 60, поэтому либо $p = 5$, $n = 6$, $\chi_1(g) = (24 + \alpha_1(g))/8 - 3$ и $\alpha_1(g) = 40s$, либо $p = 3$ и $n = 3, 6$. Если $n = 6$, то $\chi_1(g) = (24 + \alpha_1(g))/8 - 3$ и $\alpha_1(g) = 24t$. Если $n = 3$, то $\chi_1(g) = (12 + \alpha_1(g))/8 - 3$ и $\alpha_1(g) = 24t + 12$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l \geq 2$. Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $l \leq vm/(k+m) = 16$. Далее, p делит 4, 16 и $60-l$, поэтому $p=2$, l четно, $\chi_1(g) = (4l+\alpha_1(g))/8-3$ и $\alpha_1(g) = 16t-4l$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 4 и 15, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c. Тогда*

(1) *если Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v',k',4,4)$, то Δ — треугольный граф $T(6)$;*

(2) $p \leq 3$;

(3) *если $p=3$, то $|\Omega| = 3t$, где $t = 3,4,\ldots,8$, причем в случае $t=3$ в Ω найдется вершина a степени 8, для которой $\Omega(a)$ является объединением изолированных ребер*;

(4) *если $p=2$, то $|\Omega| = 2l$, где $l = 3,4,\ldots,12$, причем в случае $l=3$ граф Ω — октаэдр.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v',k',4,4)$. Тогда $n^2 = 4(k'-4)$, $n=2u$, $k'=u^2+4$ и Δ имеет неглавные собственные значения $u,-u$. Далее, кратность u равна $f = (u-1)(u^2+4)(u^2+u+4)/(8u)$, поэтому $u=2$, $f=5$ и $v'=15$.

Если $p \geq 5$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(15,8,4,4)$, поэтому p делит 81 и $p=3$, противоречие.

Пусть $p=3$. Тогда $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{1,4\}$, $|\Omega| = 3t$, $t \leq 8$ и степени вершин в Ω равны $2,5,\ldots,20$. Если Ω содержит вершину a степени 20, то для любой вершины $u \in \Gamma - a^\perp$ подграф $[u] \cap \Omega$ содержит 4 вершины из $[a]$. Для $u \notin \Omega$ получим $[u] \cap \Omega = [u] \cap [a]$. Если же $u \in \Omega$, то $[u] - a^\perp$ содержит не более 3 вершин из Ω, противоречие с тем, что u смежна с вершиной из $\Gamma - (a^\perp \cup \Omega)$. Значит, $|\Omega| = 21$ и $\alpha_1(g) = 0$ (иначе для вершины u, смежной с u^g, подграф $[u] \cap [u^g]$ содержит u^{g^2} и 4 вершины из Ω, противоречие). Но $\chi_1(g) = (84+\alpha_1(g))/8-3$ и $\alpha_1(g) = 24l+12$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 6$. Тогда степени вершин b,c в Ω равны 2 и $\Omega(a)$ содержит единственную вершину степени 4, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 9$. Если степень вершины a в Ω равна 8, то $\Omega(a)$ является объединением изолированных ребер, иначе $\Delta = \Omega(a)$ — регулярный граф степени 4, поэтому Δ — кореберно регулярный граф с $\mu(\Delta) = 3$ и число ребер между $\Delta(b)$ и $\Delta_2(b)$ равно $4 \cdot 3 = 9$, противоречие. Если в Ω нет вершин степени 8, то Ω содержит вершину e степени 2. Для $\Omega(e) = \{x,y\}$ вершины x,y смежны и каждая вершина из $\Omega - e^\perp$ смежна точно с одной вершиной из $\{x,y\}$. Далее, $\Omega(x) - \{e,y\}, \Omega(y) - \{e,x\}$ — трехвершинные графы степени 1, противоречие.

Пусть $p=2$. Тогда $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{0,2,4\}$, $|\Omega| = 2l$, $l \leq 12$ и степени вершин в Ω равны $0,2,\ldots,20$. Если Ω содержит вершину a степени 20, то получим противоречие, как и выше.

Если $|\Omega| = 4$, то Ω — четырехугольник, противоречие. Если $|\Omega| = 6$, то либо Ω — октаэдр, либо степени вершин в Ω равны 0 или 2. В последнем случае получим противоречие.

Лемма доказана

Из лемм 3, 4 следует теорема 1.

3. Автоморфизмы графа с параметрами $(322,96,20,32)$

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(322,96,20,32)$ и спектром $96^1, 4^{252}, -16^{69}$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(96,20,4,4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По теореме 3.2. из [8] имеем $|\Omega| \leq 322 \cdot 32/92 = 112$, а применимо к графу $\Gamma(a)$ для вершины $a \in \Omega$, степень любой вершины в графе Ω не превосходит 24.

Лемма 5. *Пусть χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство W_2 размерности* 69. *Тогда*

(1) $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/20 + 23/5$ *и* $\chi_2(g) - 69$ *делится на* p;

(2) *если* Ω *является пустым графом, то либо* $p = 23$, $\alpha_1(g) = 92$, *либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 140l - 28$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 40t - 8$;

(3) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $p = 3$, $n = 1$, $\alpha_1(g) = 60t - 24$ *или* $n = 4$, $\alpha_1(g) = 60t-12$, *или* $n = 7$, $\alpha_1(g) = 60t$, *либо* $p = 5$, $n = 2$, $\alpha_1(g) = 100s+20$ *или* $n = 7$, $\alpha_1(g) = 100s+40$;

(4) *если* Ω *является* l*-кокликой, то* $p = 2$, l *четно,* $4 \le l \le 46$ *и* $\alpha_1(g) = 20m + 12 + 4l$.

Доказательство. Для $i > 1$ положим $\alpha_i(g) = pw_i$. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 252 & 21/2 & -28/5 \\ 69 & -23/2 & 23/5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = 1/70(15\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g)/2 + \alpha_2(g))$. Так как $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, то $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/20 + 23/5$. Наконец, $\chi_2(g) - 69$ делится на p по лемме 2.

Пусть Ω является пустым графом. Тогда $p \in \{2, 7, 23\}$. Если $p = 23$, то $\chi_2(g) = 23(-w_1(g) + 4)/20$, поэтому $\alpha_1(g) = 92$. Если $p = 7$, то $\chi_2(g) = (-7w_1 + 92)/20$ и $\alpha_1(g) = 140l - 28$. Если $p = 2$, то число $\chi_2(g) = (-w_1 + 46)/10$ нечетно и $\alpha_1(g) = 40t - 8$.

Пусть Ω является n-кликой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем $n \le 1 + k/m = 7$. Если $n = 1$, то p делит 96 и 225, поэтому $p = 3$, $\chi_2(g) = 3(32 - w_1)/20$ и $\alpha_1(g) = 60t - 24$. Если $n \ge 2$, то p делит $22 - n$ и 75, поэтому либо $p = 5$, $n = 2$, число $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 5$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 100s + 20$ или $n = 7$, число $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 6$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 100s + 40$, либо $p = 3$ и $n = 4, 7$. Если $n = 4$, то $\chi_2(g) = 3(36 - w_1)/20$ и $\alpha_1(g) = 60t - 12$. Если $n = 7$, то $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 6$ и $\alpha_1(g) = 60t$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l \ge 2$. Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $l \le vm/(k + m) = 46$. Далее, p делит 32 и $162 - l$, поэтому $p = 2$, l четно, число $\chi_2(g) = (l + 23 - \alpha_1(g)/4)/5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 20m + 12 + 4l$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 32 и 75, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c. *Тогда*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 20, 32)$;

(2) *подграф* $[a]$ *не содержится в* Ω *для любой вершины* a;

(3) *если* $p = 3$, *то* $|\Omega| = 3n + 1$, $n = 1, 2, \dots, 37$ *и* $\alpha_1(g) = 60l + 12n$;

(4) *если* $p = 2$, *то* $|\Omega| = 2m$, $m = 4, 6, \dots, 56$ *и* $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$.

Доказательство. Допустим, что Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 20, 32)$. Тогда $n^2 = 144 + 4(k' - 32)$, $n = 2u$, $k' = u^2 - 4$ и Δ имеет неглавные собственные значения $u - 6, -(u + 6)$. Далее, кратность $u - 6$ равна $f = (u + 5)(u^2 - 4)(u^2 + u + 2)/(64u)$, поэтому $u = 5$, $k = 21$, противоречие.

Так как степень вершины в графе Ω не превосходит 24, то $[a]$ не содержится в Ω для любой вершины a.

Ввиду теоремы 1 имеем $p = 2, 3, 5$.

Пусть $p = 5$. Тогда по теореме 1 подграф $\Omega(a)$ является n-кликой, противоречие.

Пусть $p = 3$. Тогда по теореме 1 имеем $|\Omega(a)| = 3t$, $t = 1, 2, \dots, 8$, $\chi_2(g) = (4|\Omega| + 92 - \alpha_1(g))/20$ и $\alpha_1(g) = 60l + 4|\Omega| - 8$.

Пусть $p = 2$. Тогда по теореме 1 имеем $|\Omega(a)| = 2l$, $l = 2, 3, \dots, 12$, число $\chi_2(g) = (4|\Omega| + 92 - \alpha_1(g))/20$ нечетно и $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$.

Лемма доказана.

Из лемм 5, 6 следует теорема 2.

Лемма 7. *Пусть группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* f *— элемент из* G *порядка* 23, *то* $C_G(f) = \langle f\rangle$;

(2) $S(G) = O_2(G)$;

(3) *если* $\bar{T}$ *— цоколь группы* $\bar{G} = G/O_2(G)$, *то* $|\bar{T}|$ *делится на* 11.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — элемент из G порядка 23 и g — элемент из $C_G(f)$ порядка $p < 23$. По теореме 2 $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф и $\alpha_1(f) = 92$. Ввиду теоремы 2 из действия f на Ω следует, что либо Ω — пустой граф, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 40t - 8$ делится на 23, либо $p = 3$, $|\Omega| = 3n + 2$, $n = 7, 30$ и $\alpha_1(g) = 60l + 12n$ делится на 23, либо $p = 2$, $|\Omega| = 2m$, $m = 23, 46$ и $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$ делится на 23. В первом случае $40t - 8$ не делится на 23. Во втором случае $n = 7$ и $60l + 84$ не делится на 23. В третьем случае $40s - 8$ не делится на 23. В любом случае получаем противоречие.

Так как $v = 2 \cdot 7 \cdot 23$, то $Q = O_p(G) \neq 1$ влечет $p = 2, 7, 13$. Ввиду утверждения (1) имеем $p = 2$. Далее, длины Q-орбит на множестве вершин графа Γ равны 2.

Положим $\bar{G} = G/O_2(G)$. Ввиду таблицы 1 из [9] порядок цоколя $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ делится на 11.

Лемма доказана.

Так как по теореме 2 $|G|$ не делится на 11, то G действует интранзитивно на множестве вершин графа Γ. Следствие доказано.

4. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$

До конца работы предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ и спектром $96^1, 24^{46}, 4^{252}, -4^{276}, -16^{69}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 8. *Пусть* χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство* W_1 *размерности* 46, χ_4 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство* W_4 *размерности* 69. *Тогда*

(1) $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g))/56$ *и* $\chi_1(g) - 46$ *делится на* p;

(2) $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/40 - 23/2$ *и* $\chi_4(g) - 69$ *делится на* p;

(3) *если* Ω *является пустым графом, то либо*

(*i*) $p = 2$, $\alpha_4(g) = 4l$, $\alpha_2(g) = 20 - 20l - 80s$, $\alpha_1(g) = 56m + 18l + 40s + 32$ *и* $\alpha_3(g) = 592 + 2l + 40s - 56m$, *либо*

(*ii*) $p = 7$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 140-140l+196t$, $\alpha_2(g) = 280l+140$ *и* $\alpha_3(g) = 364-196t-140l$, *либо*

(*iii*) $p = 23$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 92$ *и* $\alpha_2(g) = 460$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 46 & 23/2 & 0 & -23/2 & -46 \\ 252 & 21/2 & -28/5 & 21/2 & 252 \\ 276 & -23/2 & 0 & 23/2 & -276 \\ 69 & -23/2 & 23/5 & -23/2 & 69 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g))/56$ и $\chi_1(g) - 46$ делится на p. Аналогично, $\chi_4(g) = (6\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 2\alpha_2(g)/5 - \alpha_3(g) + 6\alpha_4(g))/56$. Так как $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, то $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/40 - 23/2$, $\chi_4(g) - 69$ делится на p.

Пусть Ω является пустым графом. Тогда $p \in \{2, 7, 23\}$. Если $p = 2$, то $\alpha_4(g) = 4l$, $\chi_4(g) = (\alpha_2(g) + 20l - 460)/40$, число $\chi_4(g)$ нечетно и $\alpha_2(g) = 20 - 20l - 80s$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 624+$

$20l+80s$ и число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g)-312-18l-40s)/28$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 56m+18l+40s+32$ и $\alpha_3(g) = 592 + 2l + 40s - 56m$.

Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/40-23/2$ и $\alpha_2(g) = 280l+140$. Далее, $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 504 - 280l$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 252 + 140l)/28$ и число $\chi_1(g)$ сравнимо с 4 по модулю 7, поэтому $\alpha_1(g) = 140 - 140l + 196t$ и $\alpha_3(g) = 364 - 196t - 140l$.

Если $p = 23$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/40-23/2$ и $\alpha_2(g) = 460$. Далее, $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 184$ и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 92)/28$, поэтому $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 92$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Элемент g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа Γ' и выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф*;

(2) Ω *является объединением двух изолированных t-клик, либо $p = 3$, $t = 1, 4, 7$ и $\alpha_2(g) = 40s - 10t - 20$, либо $p = 5$, $t = 2, 7$ и $\alpha_2(g) = 200s - 10t + 20$*;

(3) Ω *содержит геодезический 2-путь, $p = 2$, $|\Omega| = 4m-\alpha_4(g)$, $\alpha_4(g) = 14e+2s-78+10n$, $\alpha_1(g) = 8s$, $\alpha_2(g) = 80n + 20 - 20m$ и $\alpha_3(g) = 624 - 80n + 16m - 8s$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного Γ', то $p = 2$ и $\alpha_4(g) = v$. Противоречие с леммой 9.

По теореме 2 либо Ω' — пустой граф и $p = 2, 7, 23$, либо Ω' является кликой или $2l$-кокликой, либо Ω' содержит геодезический 2-путь.

Если Ω' — пустой граф, то и Ω — пустой граф.

Если Ω' является t-кликой, то по теореме 2 $p = 3, 5$ и Ω является объединением двух изолированных t-клик. В этом случае по теореме 2 имеем $\alpha_4(g) = 0$ и либо $p = 3$, $t = 1, 4, 7$, либо $p = 5$ и $t = 2, 7$.

Если $p = 3$, то $\chi_4(g) = (10t-460+\alpha_2(g))/40$, поэтому $\alpha_2(g) = 40s-10t-20$, а если $p = 5$, то число $\chi_4(g) = (10t-460+\alpha_2(g))/40$ сравнимо с 4 по модулю 5, поэтому $\alpha_2(g) = 200s-10t+20$.

Если Ω' является $2l$-кокликой, то по теореме 2 $p = 2$, $\alpha'_1(g) = 20m+12+4l$ и $|\Omega| = 4l-\alpha_4(g)$. Далее, число $\chi_4(g) = (20l - 460 + \alpha_2(g))/40$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 80m - 20l + 20$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 564 + 16l - 80m$, поэтому $282 + 8l - 40m = 20m + 12 + 4l$, противоречие.

Пусть Ω' содержит геодезический 2-путь. Тогда по теореме 2 либо

(i) $[\bar{a}] \subset \Omega'$ для некоторой вершины $\bar{a}$ и $p = 3, 5$, либо

(ii) $p = 3$, $|\Omega'| = 3n + 1$, $n = 1, 2, \ldots, 37$, $\alpha'_1(g) = 60l + 12n$, либо

(iii) $p = 2$, $|\Omega'| = 2m$, $m = 4, 6, \ldots, 56$, $\alpha'_1(g) = 40s + 8m - 8$.

В случае (i) для вершины $u \in \Gamma_2(a)$ имеем $|[u]\cap\Omega| = 32$, противоречие. В случае (ii) имеем $\alpha_4(g) = 0$, число $\chi_4(g) = (30n-450+\alpha_2(g))/40$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 120m-30n-30$. С другой стороны, $\alpha'_2(g) = 321 - 60l - 15n$ и $60m - 15 = 321 - 60l$, противоречие.

В случае (iii) имеем $|\Omega| = 4m-\alpha_4(g)$. Далее, число $\chi_4(g) = (20m-460+\alpha_2(g))/40$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 80n + 20 - 20m$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 624 - 80n + 16m$. Теперь число $\chi_1(g) = (16m + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 8\alpha_4(g))/56$ четно, поэтому $2\alpha_1(g) - (624 - 80n) - 8\alpha_4(g) = -112e$, $\alpha_1(g) = 8s$ и $\alpha_4(g) = 14e + 2s - 78 + 10n$.

Лемма доказана.

Из лемм 8, 9 следует теорема 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М.** О вполне регулярных локально $GQ(5,3)$-графах // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 6. С. 744–747.
2. **Jurisic A., Koolen J.** Classification of the family $AT4(qs, q, q)$ of antipodal tight graphs // J. Comb. Theory. 2011. Vol. 118, no. 3. P. 842–852.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М.** О локально $GQ(5,3)$-графах // Тез. докл. Междунар. конф. “Алгебра и комбинаторика”, посвящен. 60-летию А.А. Махнева. Екатеринбург, 2013. С. 64–66.

4. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs. NY: Springer, 2012. P. 1–20. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6_1 .
5. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Part of the Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete book series (MATHE3, vol. 18). Berlin: Springer, 1989. P. 391–412. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2_13 .
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **MacKay M., Siran J.** Search for properties of the missing Moore graph // Linear algebra and its applications. 2010. Vol. 432. P. 2381–2398.
8. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2-3. P. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
9. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Ефимов Константин Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
Уральский федеральный университет,
Уральский государственный экономический университет,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com

REFERENCES

1. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Khamgokova M.M. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 82, no. 7, pp. 967–970. doi: 10.1134/S1064562410060335 .
2. Jurisic A., Koolen J. Classification of the family $AT4(qs,q,q)$ of antipodal tight graphs. *J. Comb. Theory*, 2011, vol. 118, no. 3, pp. 842–852. doi: 10.1016/j.jcta.2010.10.001 .
3. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Khamgokova M.M. On locally $GQ(5,3)$-graphs. In: *Algebra and combinatorics*: Abstr. internat. conf. dedicated to A.A. Makhnev's 60th Birthday, Ekaterinburg, Russia, 2013 (UMTs-UPI, Ekaterinburg, 2013), pp. 64–66 (in Russian).
4. Brouwer A.E., Haemers W.H. Graph Spectrum. In: *Spectra of Graphs*. Universitext. Springer, New York. 2012, pp. 1–20. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6_1 .
5. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Sporadic graphs. In: *Distance-regular graphs*. Part of the Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete book series (MATHE3, vol. 18), Berlin, Heidelberg, Springer, 1989, pp. 391–412. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2_13 .
6. Gavrilyuk A.L., Makhnev, A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56,45,1;1,9,56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
7. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, no. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
8. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on September 1, 2017.

Konstantin Sergeevich Efimov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia; Ural State University of Economics, Ekaterinburg, 620144 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com .