ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 517.927

ДИСКРЕТНОЕ ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ РИККАТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. Ф. Долгий, Р. И. Шевченко

Для периодических линейных систем дифференциальных уравнений с последействием задача оптимальной стабилизации описывается в функциональном пространстве. Используется процедура сужения класса допустимых управлений. Допустимые управления формируются по принципу обратной связи в функциональном пространстве состояний. Предполагается кусочно-постоянная периодическая зависимость управлений от времени. Точки разрыва не зависят от выбора состояний. Построена эквивалентная дискретная задача оптимальной стабилизации в функциональном пространстве. Решение неавтономного дискретного операторного уравнения Риккати определяет оптимальное стабилизирующее управление. Дискретная задача стабилизации автономна, если последовательность точек разрыва управлений периодична. Найдено представление решения автономного дискретного операторного уравнения Риккати. Для коэффициентов этого представления получена система интегральных уравнений. Выводится формула, определяющая оптимальное стабилизирующее управление в дискретной задаче.

Ключевые слова: периодическая линейная система с последействием, оптимальная стабилизация, дискретное операторное уравнение Риккати.

Yu. F. Dolgii, R. I. Shevchenko. Discrete operator Riccati equation in an optimal stabilization problem for a periodic linear system with aftereffect.

An optimal stabilization problem for linear periodic systems of differential equations with aftereffect is described in a function space. A procedure that narrows the class of admissible controls is used. Admissible feedback controls are formed in the function state space. We assume a piecewise constant periodic dependence of the controls on time. The breakpoints are independent of the choice of the states. An equivalent discrete problem of optimal stabilization in a function space is constructed. The solution of the nonautonomous discrete operator Riccati equation determines an optimal stabilizing control. The discrete stabilization problem is autonomous if the sequence of breakpoints of the controls is periodic. A representation of solutions of the autonomous discrete operator Riccati equation is found. A system of integral equations is obtained for the coefficients of this representation. A formula for the optimal stabilizing control in the discrete problem is derived.

Keywords: periodic linear system with aftereffect, optimal stabilization, discrete operator Riccati equation.

MSC: 34K06, 34K20, 34K35, 93C23, 93C57

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-105-118

Введение

Проблеме оптимальной стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с последействиями и квадратичными критериями качества посвящено большое число публикаций [1–5]. При решении задачи оптимальной стабилизации удобно использовать функциональное пространство состояний [2; 6]. Задача построения оптимального стабилизирующего управления сводится к нахождению решения автономного операторного уравнения Риккати [6]. Для конечномерных пространств состояний методы определения решения матричного уравнения Риккати описаны в монографии [7]. Проблема нахождения точных решений операторного уравнения Риккати обсуждалась в работе [8]. Возникшие трудности с интегрированием операторного уравнения Риккати стимулировали развитие аппроксимационных методов решения задачи оптимальной стабилизации для линейных автономных систем дифференциальных уравнений с последействиями и квадратичными критериями качества

[6; 9–11]. Проблема оптимальной стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействиями и квадратичными критериями качества недостаточно исследована. Ее решение связано с интегрированием неавтономного операторного уравнения Риккати [6]. При решении указанной задачи трудности возникают уже для конечномерных пространств состояний [7]. Для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействиями использование канонических аппроксимаций позволяет ее заменить приближенно периодической задачей оптимальной стабилизации системы дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве состояний [12]. В данной работе предлагается при решении рассматриваемой задачи сузить класс допустимых управлений, формируемых по принципу обратной связи в функциональном пространстве состояний. Предполагается, что в заданном состоянии периодическая зависимость допустимого управления от времени является кусочно-постоянной, с фиксированными точками разрывов. Это сужение позволяет перейти от непрерывной задачи оптимальной стабилизации к дискретной задаче оптимальной стабилизации в бесконечномерном пространстве состояний. Указанный подход показал свою эффективность для специального класса дифференциальных уравнений с последействиями — линейных периодических дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами [13]. В [13] задача построения оптимального стабилизирующего управления сводилась к нахождению решения автономного дискретного матричного уравнения Риккати. Для конечномерных пространств состояний методы стабилизации систем с дискретным временем хорошо разработаны [14;15]. В настоящей работе строится дискретное операторное уравнение Риккати, решение которого определяет оптимальное стабилизирующее управление в рассматриваемом классе допустимых управлений. Изучается проблема разрешимости автономного дискретного операторного уравнения Риккати.

1. Постановка задачи

Объект стабилизации описывается периодической линейной системой дифференциальных уравнений с последействием запаздывающего типа

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\tau}^{0} [d_\vartheta \eta(t,\vartheta)] x(t+\vartheta) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty). \tag{1.1}$$

Здесь $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $0 < \tau \leq \omega$; матричнозначная функция η ω-периодична по первому аргументу, $\eta(\cdot, 0) = 0$, матричнозначная функция B ω-периодична и интегрируема по Лебегу на $[0, \omega]$. Полагаем, что функция η измерима по Лебегу на множестве $[0, \omega] \times [-\tau, 0]$, при фиксированном $t \in [0, \omega]$ функция $\eta(t, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию на $[-\tau, 0]$, функция $Var_{[-\tau,0]}\eta(t, \cdot)$, $t \in [0, \omega]$, интегрируема по Лебегу на $[0, \omega]$.

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1.1) и минимизирует критерий качества переходных процессов

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(x^\top(t) C_x(t) x(t) + u^\top(t) C_u(t) u(t) \Big)\, dt, \tag{1.2}$$

где матричнозначные функции C_x, C_u непрерывны и ω-периодичны, а их значения — самосопряженные положительно определенные матрицы.

При решении задачи оптимальной стабилизации удобно использовать ее формализацию в гильбертовом пространстве состояний [2; 6]. Последнее возможно при выполнении условий, указанных в [16, теорема 1], которые обеспечивают принадлежность начальной функции $\varphi(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, и отрезков решений системы (1) $\mathbf{x}_t(\vartheta, \varphi) = x(t+\vartheta, \varphi)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $t \in \mathbb{R}^+$, гильбертову пространству состояний $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2\left([-\tau, 0), \mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle_H = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta$, $\varphi \in \mathbb{H}$, $\psi \in \mathbb{H}$.

Объект стабилизации описывается в пространстве $\mathbb{H}$ периодическим линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{B}(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.3}$$

Здесь неограниченный оператор $\mathbf{A}(t)$ задается формулами

$$(\mathbf{A}(t)\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{A}(t)\mathbf{x})(0) = \int\limits_{-r}^{0} [d_s\eta(t, s)]\mathbf{x}(s)$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}(t)) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H} : \mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^1\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\right)\}$, а ограниченный оператор $\mathbf{B}(t) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{H}$ — формулами

$$(\mathbf{B}(t)u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{B}(t)u)(0) = B(t)u.$$

Критерий качества переходных процессов уравнения (1.3) имеет вид

$$\mathbf{J} = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\langle \mathbf{C}_x(t)\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle_H + u^\top(t)\mathbf{C}_u(t)u(t)\Big)\, dt, \tag{1.4}$$

где линейный ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{C}_x(t) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ периодически зависит от t с периодом ω и определяется формулами

$$(\mathbf{C}_x(t)\mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{C}_x(t)\mathbf{x})(0) = C_x(t)\mathbf{x}(0),$$

линейный ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор $\mathbf{C}_u(t)$: $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ периодически зависит от t с периодом ω и определяется формулой $\mathbf{C}_u(t)u = C_u(t)u$.

Множество допустимых управлений, для которого решается задача оптимальной стабилизации, состоит из линейных непрерывных отображений $\mathbf{u}[t, \cdot] : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, периодически зависящих от $t \in \mathbb{R}^+$. Если задача (1.3), (1.4) стабилизируема, то оптимальное стабилизирующее управление, определяется формулой [6]

$$u^0[t, \mathbf{x}] = -C_u^{-1}(t)B^\top(t)(\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(0),$$

в которой $\mathbf{U}$ — операторнозначное ω-периодическое решение дифференциального операторного уравнения Риккати [6]

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{U}\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^*(t)\mathbf{U} + \mathbf{C}_x(t) - \mathbf{U}\mathbf{D}(t)\mathbf{U} = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

значения которого являются самосопряженными положительными операторами, $\mathbf{D}(t) = \mathbf{B}(t)\times$ $\mathbf{C}_u(t)\mathbf{B}^*(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Сужение класса допустимых управлений позволяет перейти от непрерывной к дискретной задаче оптимальной стабилизации в бесконечномерном пространстве состояний. При этом дифференциальное уравнение Риккати с неограниченными операторами заменяется дискретным уравнением Риккати с ограниченными операторами.

2. Дискретная задача оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний

Выберем периодическое разбиение числовой оси точками $t_k = t_{k+p} - \omega$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p-1} < t_p = \omega$, и опишем сужение множества допустимых управлений, для которого решается задача оптимальной стабилизации в данной работе.

Множество допустимых управлений состоит из линейных непрерывных отображений $u[t,\cdot] : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, периодически зависящих от t с периодом ω, которые являются кусочно-постоянными функциями аргумента t с фиксированными точками разрыва в точках заданного разбиения числовой оси, т. е. $u[t, \mathbf{x}_t] = u_k[\mathbf{x}_{t_k}]$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k \geq 0$, где линейные отображения $u_k[\cdot] : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, $k \geq 0$, непрерывны и периодически зависят от индекса с периодом p.

Для произвольного допустимого управления $u[t,\cdot]$ система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} [d_\vartheta \eta(t,\vartheta)] x(t+\vartheta) + B(t) u[t, \mathbf{x}_t]$$

имеет единственное решение задачи Коши $x(t,\varphi)$, $t \geq -r$, $\mathbf{x}_0(\varphi) = \varphi$, $\varphi \in \mathbb{H}$. При $t_k \leq t < t_{k+1}$ имеем $u[t, \mathbf{x}_t(\varphi)] = u_k[\mathbf{x}_{t_k}(\varphi)] = u_k$, $k \geq 0$. Используя формулу общего решения [16, формула 1.11], находим

$$x(t,\varphi) = V(t,t_k)x(t_k,\varphi) + \int_{-\tau}^{0} \hat{V}_k(t,s) x(t_k+s,\varphi) ds$$

$$+ \int_{t_k}^{t} V(t,s)B(s) ds u_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k \geq 0. \tag{2.1}$$

Здесь матричнозначная функция $V(\cdot,\cdot)$ при каждом фиксированном значении второго аргумента $s \in [0,+\infty)$ локально абсолютно непрерывна по первому аргументу t на $[s,+\infty)$, при каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in (0,+\infty)$ имеет конечную вариацию по второму аргументу s на $[0,t]$. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V(t,s)}{\partial t} = \int_{-\tau}^{0} [d_\vartheta \eta(t,\vartheta)] V(t+\vartheta, s), \quad 0 \leq s < t < +\infty,$$

и начальным условиям $V(t,s) = 0$, $t \in [s-\tau, s)$, $V(s,s) = I_n$, $s \in \overline{\mathbb{R}}^+$. При каждом фиксированном значении $t \in (0,+\infty)$ с помощью формулы $\eta(t,\vartheta) = \eta(t,-\tau)$ определены значения функции η при $\vartheta \in (-\infty,-\tau)$. Для единичной матрицы размерности $n \times n$ используется обозначение I_n. Матричнозначные функции $\hat{V}_k(\cdot,\cdot)$ определяются формулами

$$\hat{V}_k(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} \int_{0}^{\tau} V(t, t_k+z) \eta(t_k+z, s-z) dz, \quad -\tau \leq s \leq 0,\ t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Последовательность функций

$$\mathbf{x}_k(\vartheta,\varphi) = x(t_k+\vartheta,\varphi), \quad \vartheta \in [-\tau,0], \quad k \geq 0, \tag{2.2}$$

определяет решение управляемого дискретного уравнения в гильбертовом пространстве состояний $\mathbb{H}$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k u_k, \quad k \geq 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{A}_k : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\mathbf{B}_k : \mathbb{R}^r \to \mathbb{H}$ — линейные ограниченные операторы, периодически зависящие от индекса k с периодом p, определяются формулами

$$(\mathbf{A}_k\mathbf{x})(\vartheta) = \mathbf{x}(\vartheta + t_{k+1} - t_k), \quad -\tau \le \vartheta \le t_k - t_{k+1},$$

$$(\mathbf{A}_k\mathbf{x})(\vartheta) = V(t_{k+1} + \vartheta, t_k)\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} \hat{V}_k(t_{k+1} + \vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad t_k - t_{k+1} \le \vartheta \le 0,$$

$$(\mathbf{B}_k u)(\vartheta) = 0, \quad -\tau \le \vartheta \le t_k - t_{k+1},$$

$$(\mathbf{B}_k u)(\vartheta) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}+\vartheta} V(t_{k+1} + \vartheta, s)B(s)dsu, \quad t_k - t_{k+1} \le \vartheta \le 0.$$

Для периодического дискретного уравнения (2.3) в качестве допустимых управлений будем выбирать линейные непрерывные отображения $u_k[\cdot] : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, $k \ge 0$, периодически зависящие от индекса с периодом p.

Для любого допустимого управления $u_k[\cdot]$, $k \ge 0$, дискретное уравнение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k u_k[\mathbf{x}_k], \quad k \ge 0. \tag{2.4}$$

имеет единственное решение задачи Коши $\mathbf{x}_k(\varphi)$, $k \ge 0$, $\mathbf{x}_0(\varphi) = \varphi$, $\varphi \in \mathbb{H}$. Если допустимое управление дискретного уравнения порождает выбранное выше допустимое управление системы с последействием и начальные функции решений дискретного уравнения и системы с последействием совпадают, то решение уравнения (2.4) совпадает с последовательностью функций (2.2). Поэтому для множества кусочно-постоянных управлений можно говорить о эквивалентности задач стабилизации для системы с последействием и дискретного уравнения.

Используя формулы (2.1), преобразуем критерий качества (1.2). Имеем

$$\mathbf{J}_d = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\langle \mathbf{C}_{xxk}\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle_H + 2u_k^\top \mathbf{C}_{xuk}^* \mathbf{x}_k + u_k^\top \mathbf{C}_{uuk} u_k \right). \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{C}_{xxk} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\mathbf{C}_{xuk}^* : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, $\mathbf{C}_{uuk} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ — линейные ограниченные операторы, периодически зависящие от индекса k с периодом p, $\mathbf{C}_{xxk}$ — самосопряженные положительные операторы, а $\mathbf{C}_{uuk}$ — самосопряженные положительно определенные операторы. Они определяются формулами

$$(\mathbf{C}_{xxk}\mathbf{x})(\vartheta) = \int\limits_{t_k - t_{k+1}}^{0} \hat{V}_k^\top(t_{k+1} + \alpha, \vartheta)C_x(t_{k+1} + \alpha)V(t_{k+1} + \alpha, t_k)d\alpha\mathbf{x}(0)$$

$$+ \int\limits_{-\tau}^{0} \int\limits_{t_k - t_{k+1}}^{0} \hat{V}_k^\top(t_{k+1} + \alpha, \vartheta)C_x(t_{k+1} + \alpha)\hat{V}_k^\top(t_{k+1} + \alpha, s)d\alpha\mathbf{x}(s)ds, \quad -\tau \le \vartheta < 0,$$

$$(\mathbf{C}_{xxk}\mathbf{x})(0) = \int\limits_{t_k - t_{k+1}}^{0} V^\top(t_{k+1} + \alpha, t_k)C_x(t_{k+1} + \alpha)V(t_{k+1} + \alpha, t_k)d\alpha\mathbf{x}(0)$$

$$+ \int\limits_{-\tau}^{0} \int\limits_{t_k - t_{k+1}}^{0} V^\top(t_{k+1} + \alpha, t_k)C_x(t_{k+1} + \alpha)\hat{V}_k(t_{k+1} + \alpha, s)d\alpha\mathbf{x}(s)ds,$$

$$\mathbf{C}^*_{xuk}\mathbf{x} = \int\limits_{t_k-t_{k+1}}^{0} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}+\alpha} B^\top(s)V^\top(t_{k+1}+\alpha,s)dsC_x(t_{k+1}+\alpha)$$

$$\times\left(V(t_{k+1}+\alpha,t_k)\mathbf{x}(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{V}_k(t_{k+1}+\alpha,s)\mathbf{x}(s)ds\right)d\alpha,\ \mathbf{C}_{uuk}u = C_{uuk}u,$$

$$C_{uuk} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} C_u(t)dt + \int\limits_{t_k-t_{k+1}}^{0} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}+\alpha} B^\top(s)V^\top(t_{k+1}+\alpha,s)dsC_x(t_{k+1}+\alpha)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}+\alpha} V(t_{k+1}+\alpha,s)B(s)dsd\alpha.$$

Приведенные вычисления доказывают справедливость утверждения.

Теорема 1. *При выполнении условий* [16, теорема 1] *задача оптимальной стабилизации системы с последействием* (1.1), (1.2) *с допустимым множеством кусочно-постоянных управлений эквивалентна задаче оптимальной стабилизации дискретного уравнения* (2.3), (2.5).

Теорема 2. *Пусть дискретная задача* (2.3), (2.5) *стабилизируема. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулами*

$$u^0_k[\mathbf{x}_k] = -\left(\mathbf{C}_{uuk}+\mathbf{B}^*_k\mathbf{U}_{k+1}\mathbf{B}_k\right)^{-1}\left(\mathbf{B}^*_k\mathbf{U}_{k+1}\mathbf{A}_k+\mathbf{C}^*_{xuk}\right)\mathbf{x}_k,\quad \mathbf{x}_k\in\mathbb{H},\quad k\geq 0, \tag{2.6}$$

в которых $\mathbf{U}_k$, $k\geq 0$, *— операторнозначное* p*-периодическое решение дискретного периодического операторного уравнения Риккати*

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{A}^*_k\mathbf{U}_{k+1}\mathbf{A}_k - \left(\mathbf{A}^*_k\mathbf{U}_{k+1}\mathbf{B}_k+\mathbf{C}_{xuk}\right)\mathbf{L}^{-1}_k\left(\mathbf{B}^*_k\mathbf{U}_{k+1}\mathbf{A}_k+\mathbf{C}^*_{xuk}\right)+\mathbf{C}_{xxk}, \tag{2.7}$$

значения которого являются линейными ограниченными самосопряженными положительными операторами. Здесь обратимые операторы $\mathbf{L}_k:\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^r$ *определяются формулами*

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{C}_{uuk}+\mathbf{B}^*_k\mathbf{U}_{k+1}\mathbf{B}_k,\quad k\geq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используется дискретное неавтономное уравнение Беллмана

$$\mathbf{V}_k(\mathbf{x}) = \min_{u\in\mathbb{R}^r}\{\mathbf{V}_{k+1}(\mathbf{A}_k\mathbf{x}+\mathbf{B}_k)+\langle\mathbf{C}_{xxk}\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+2u^\top\mathbf{C}^*_{xuk}\mathbf{x}+u^\top\mathbf{C}_{uuk}u\},\quad k\geq 0.$$

Функционал Беллмана — Ляпунова выбирается в виде квадратичной формы

$$\mathbf{V}_k(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{U}_k\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_H,\quad \mathbf{x}\in\mathbb{H},$$

порождаемой линейным ограниченным самосопряженным положительным оператором $\mathbf{U}_k$, $k\geq 0$. Из уравнения Беллмана находим формулу, определяющую оптимальное стабилизирующее управление, в которой оператор $\mathbf{U}_k$, $k\geq 0$, удовлетворяет дискретному уравнению Риккати (2.7). Для конечномерного пространства состояний (2.6), (2.7) совпадают с формулами, приведенными в [15, с. 63]. □

3. Дискретное автономное операторное уравнение Риккати

Если при дискретизации задачи стабилизации выбрать специальное разбиение числовой оси точками $t_k = k\omega, k\in\mathbb{Z}$, то получим автономную дискретную задачу оптимальной стабилизации для дискретной системы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k+\mathbf{B}u_k,\quad k\geq 0, \tag{3.1}$$

с дискретным критерием качества

$$\mathbf{J}_{da} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\langle \mathbf{C}_{xx}\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle_H + 2u_k^\top \mathbf{C}_{xu}^* \mathbf{x}_k + u_k^\top \mathbf{C}_{uu} u_k \right). \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{H}$ — линейные ограниченные операторы, определяемые формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = V(\omega+\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0} \hat{V}_0(\omega+\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\tau \le \vartheta \le 0,$$

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = \int_{0}^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s)B(s)dsu, \quad -\tau \le \vartheta \le 0.$$

В критерии качества $\mathbf{C}_{xx} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\mathbf{C}_{xu}^* : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, $\mathbf{C}_{uu} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ — линейные ограниченные операторы, $\mathbf{C}_{xx}$ — положительный самосопряженный оператор, а $\mathbf{C}_{uu}$ — положительно определенный самосопряженный оператор. Они определяются формулами

$$(\mathbf{C}_{xx}\mathbf{x})(\vartheta) = \int_{-\omega}^{0} \hat{V}_0^\top(\omega+\alpha, \vartheta) C_x(\alpha) V(\omega+\alpha, 0) d\alpha \mathbf{x}(0)$$

$$+ \int_{-\tau}^{0}\int_{-\omega}^{0} \hat{V}_0^\top(\omega+\alpha, \vartheta) C_x(\alpha) \hat{V}_0^\top(\omega+\alpha, s) d\alpha \mathbf{x}(s)ds, \quad -\tau \le \vartheta < 0,$$

$$(\mathbf{C}_{xx}\mathbf{x})(0) = \int_{-\omega}^{0} V^\top(\omega+\alpha, 0) C_x(\alpha) V(\omega+\alpha, 0) d\alpha \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\omega}^{0} V^\top(\omega+\alpha, 0) C_x(\alpha) \hat{V}_0(\omega+\alpha, s) d\alpha \mathbf{x}(s)ds,$$

$$\mathbf{C}_{xu}^*\mathbf{x} = \int_{-\omega}^{0}\int_{0}^{\omega+\alpha} B^\top(s) V^\top(\omega+\alpha, s) ds C_x(\alpha) \left(V(\alpha, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0} \hat{V}_0(\alpha, s)\mathbf{x}(s)ds \right) d\alpha,$$

$$\mathbf{C}_{uu}u = C_{uu}u,\ C_{uu} = \int_{-\omega}^{0} \left(C_u(\alpha) + \int_{0}^{\omega+\alpha} B^\top(s) V^\top(\omega+\alpha, s) ds C_x(\alpha) \int_{0}^{\omega+\alpha} V(\omega+\alpha, s) B(s) ds \right) d\alpha.$$

Теорема 3. *Пусть дискретная задача* (3.1), (3.2) *стабилизируема. Тогда оптимальное стабилизирующее управление дискретной задачи определяется формулой*

$$u^0[\mathbf{x}] = -\left(\mathbf{C}_{uu} + \mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{B}\right)^{-1} \left(\mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{C}_{xu}^*\right)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \tag{3.3}$$

в которой $\mathbf{U}$ *— операторнозначное решение автономного дискретного операторного уравнения Риккати*

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{A} - \left(\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{B} + \mathbf{C}_{xu}\right)\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{C}_{xu}^*\right) + \mathbf{C}_{xx}, \tag{3.4}$$

являющееся линейным ограниченным самосопряженным положительным оператором. Здесь обратимый оператор $\mathbf{L} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ *определяется формулой* $\mathbf{L} = \mathbf{C}_{uu} + \mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{B}$.

Доказательство. При доказательстве утверждения используется автономное дискретное уравнение Беллмана

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \min_{u \in \mathbb{R}^r} \Big\{ \mathbf{V}\left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\right) + \langle \mathbf{C}_{xx}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2u^\top \mathbf{C}_{xu}^* \mathbf{x} + u^\top \mathbf{C}_{uu} u \Big\}.$$

Функционал Беллмана — Ляпунова выбирается в виде квадратичной формы $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, порождаемой положительным оператором $\mathbf{U}$. Для конечномерного пространства состояний (3.3), (3.4) совпадают с формулами, приведенными в [15, с. 64]. □

4. Периодическая линейная система с постоянным запаздыванием

Продолжим исследование дискретного автономного операторного уравнения Риккати для периодической линейной системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием следующего вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t-\omega) + B(t)u, \tag{4.1}$$

где матричнозначные функции A, B непрерывны и ω-периодичны.

Для системы (4.1) операторы дискретной задачи оптимизации в пространстве состояний $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2\left([-\omega, 0), \mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^n$, $\tau = \omega$, определяются формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\omega}^{\vartheta} A(s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\omega \le \vartheta \le 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = \widehat{B}(\vartheta)u, \quad -\omega \le \vartheta \le 0, \quad \mathbf{C}_{uu}u = C_{uu}u, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$

$$(\mathbf{C}_{xx}\mathbf{x})(\vartheta) = C_{xx}(\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\omega}^{0} C_{xx}(\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\omega \le \vartheta \le 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

$$\mathbf{C}_{xu}^{*}\mathbf{x} = C_{xu}^{*}(0)\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\omega}^{0} C_{xu}^{*}(s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

Здесь

$$\widehat{B}(\vartheta) = \int\limits_{-\omega}^{\vartheta} B(s)ds, \quad -\omega \le \vartheta \le 0; \quad C_{xx}(\vartheta, s) = C_{xx}^{\top}(s, \vartheta), \quad C_{xx}(0,0) = \int\limits_{-\omega}^{0} C_x(\alpha)d\alpha,$$

$$C_{xx}(\vartheta, 0) = A^{\top}(\vartheta)\int\limits_{\vartheta}^{0} C_x(\alpha)d\alpha, \quad C_{xx}(\vartheta, s) = A^{\top}(\vartheta)\int\limits_{\vartheta}^{0} C_x(\alpha)d\alpha A(s), \quad -\omega \le \vartheta, \quad s < 0;$$

$$C_{xu}^{*}(0) = \int\limits_{-\omega}^{0} \widehat{B}^{\top}(\alpha)C_x(\alpha)d\alpha, \quad C_{xu}^{*}(s) = \int\limits_{s}^{0} \widehat{B}^{\top}(\alpha)C_x(\alpha)d\alpha A(s), \quad -\omega \le s < 0;$$

$$C_{uu} = \int\limits_{-\omega}^{0} C_x(\alpha)d\alpha + \int\limits_{-\omega}^{0} \widehat{B}^{\top}(\alpha)C_x(\alpha)\widehat{B}(\alpha)d\alpha.$$

Находим операторы, входящие в дискретное операторное уравнение Риккати (3.4):

$$(\mathbf{A}^{*}\mathbf{y})(\vartheta) = A^{\top}(\vartheta)\left(\mathbf{y}(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} \mathbf{y}(s)ds\right), \quad -\omega \le \vartheta < 0, \quad (\mathbf{A}^{*}\mathbf{y})(0) = \mathbf{y}(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} \mathbf{y}(s)ds, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H},$$

$$\mathbf{B}^{*}\mathbf{y} = \widehat{B}^{\top}(0)\mathbf{y}(0) + \int\limits_{-\omega}^{0} \widehat{B}^{\top}(s)\mathbf{y}(s)ds, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}, \quad (\mathbf{C}_{xu}u)(\vartheta) = C_{xu}^{*\top}(\vartheta)u, \ -\omega \le \vartheta \le 0, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$

Лемма 1. *Пусть для системы* (4.1) *соответствующая дискретная задача* (3.1), (3.2) *стабилизируема. Тогда решение дискретного уравнения Риккати* (3.4) *определяет ограниченный самосопряженный положительный оператор, допускающий представление*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})(\vartheta) = K(\vartheta,0)\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\omega}^{0} K(\vartheta,s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\omega \le \vartheta \le 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \tag{4.2}$$

удовлетворяющее условиям:

1) $K^{\top}(0,0) = K(0,0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

2) *при фиксированном* $\vartheta \in [-\omega, 0)$ *имеем* $K^{\top}(0,\vartheta) = K(\vartheta,0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и функция* $K(\cdot,0) \in \mathbb{C}([-\omega,0),\mathbb{R}^{n\times n})$;

3) *при фиксированных* $(\vartheta,s) \in [-\omega,0)\times[-\omega,0)$ *имеем* $K^{\top}(s,\vartheta) = K(\vartheta,s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и функция* $K(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}([-\omega,0)\times[-\omega,0),\mathbb{R}^{n\times n})$.

Доказательство. Из представлений операторов $\mathbf{A}, \mathbf{A}^*, \mathbf{B}, \mathbf{B}^*, \mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xu}, \mathbf{C}^*_{xu}, \mathbf{C}_{uu}$ и ограниченности оператора $\mathbf{U}$ следуют конечномерность оператора $\mathbf{L}$, справедливость для каждого слагаемого в правой части дискретного уравнения Риккати формы представления (4.2) и выполнение для каждого оператора, входящего в сумму, условий 1)–3). $\square$

Самосопряженный конечномерный оператор $\mathbf{L} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ допускает представление $\mathbf{L}u = Lu$, $u \in \mathbb{R}^r$, где матрица L размерности $r \times r$, $\det L \ne 0$ определяется формулой $L = C_{uu} + \widehat{B}^{\top}(0)K(0,0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^{0}\Big(\widehat{B}^{\top}(0)K(0,s)\widehat{B}(s) + \widehat{B}^{\top}(s)K(s,0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^{0}\widehat{B}^{\top}(\vartheta)K(\vartheta,s)d\vartheta\widehat{B}(s)\Big)ds$.

Теорема 4. *Пусть для системы* (4.1) *соответствующая дискретная задача* (3.1), (3.2) *стабилизируема. Тогда коэффициенты представления оператора* (4.2) *удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$K(\vartheta,s) - A^{\top}(\vartheta)\Big[K(0,0) + \int\limits_{s}^{0} K(0,s_1)ds_1 + \int\limits_{\vartheta}^{0} K(s_1,0)ds_1$$

$$+ \int\limits_{\vartheta}^{0}\int\limits_{s}^{0} K(s_1,s_2)ds_2ds_1\Big]A(s) + \Big(C^{*\top}_{xu}(\vartheta) + \widehat{A}(\vartheta)\Big)L^{-1}$$

$$\times\Big(C^{*}_{xu}(s) + \widehat{A}^{\top}(s)\Big) - A^{\top}(\vartheta)\int\limits_{\vartheta}^{0} \chi_{(s,0)}(\alpha)C_x(\alpha)d\alpha A(s) = 0, \quad \vartheta, s \in [-\omega, 0), \tag{4.3}$$

$$K(\vartheta,0) - A^{\top}(\vartheta)\Big[K(0,0) + \int\limits_{-\omega}^{0} K(0,s)ds + \int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(K(s,0) + \int\limits_{-\omega}^{0} K(s,s_1)ds_1\Big)ds\Big]$$

$$+ \Big(C^{*\top}_{xu}(\vartheta) + \widehat{A}(\vartheta)\Big)L^{-1}\Big(C^{*}_{xu}(0) + \widehat{A}^{\top}(0)\Big) - A^{\top}(\vartheta)\int\limits_{\vartheta}^{0} C_x(\alpha)d\alpha = 0, \quad \vartheta \in [-\omega, 0), \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(K(0,s) + K(s,0) + \int\limits_{-\omega}^{0} K(s,s_1)ds_1\Big)ds + \int\limits_{-\omega}^{0} C_x(\alpha)d\alpha$$

$$- \Big(C^{*\top}_{xu}(0) + \widehat{A}(0)\Big)L^{-1}\Big(C^{*}_{xu}(0) + \widehat{A}^{\top}(0)\Big) = 0. \tag{4.5}$$

Здесь $\chi_E(\cdot)$ *— индикатор множества* E,

$$\widehat{A}(\vartheta)=A^{\top}(\vartheta)\Big(K(0,0)\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}K(0,s)\widehat{B}(s)ds\Big)+A^{\top}(\vartheta)\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(K(s,0)\widehat{B}(0)$$

$$+\int\limits_{-\omega}^{0}K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1\Big)ds,\quad -\omega\le\vartheta<0,$$

$$\widehat{A}(0)=K(0,0)\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(K(0,s)\widehat{B}(s)+K(s,0)\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1\Big)ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя представления операторов $\mathbf{U},\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$, находим значения оператора

$$\big(\mathbf{A}^*\mathbf{UAx}\big)(\vartheta)=A^{\top}(\vartheta)\Big\{\Big[K(0,0)+\int\limits_{-\omega}^{0}K(0,s)ds+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(K(s,0)+\int\limits_{-\omega}^{0}K(s,s_1)ds_1\Big)ds\Big]\mathbf{x}(0)$$

$$+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big[K(0,0)+\int\limits_{s}^{0}K(0,s_1)ds_1+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(K(s_1,0)+\int\limits_{s}^{0}K(s_1,s_2)ds_2\Big)ds_1\Big]A(s)\mathbf{x}(s)ds\Big\},\quad -\omega\le\vartheta<0,$$

$$\big(\mathbf{A}^*\mathbf{UAx}\big)(0)=\Big[K(0,0)+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(K(0,s)+K(s,0)+\int\limits_{-\omega}^{0}K(s,s_1)ds_1\Big)ds\Big]\mathbf{x}(0)$$

$$+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big[K(0,0)+\int\limits_{s}^{0}K(0,s_1)ds_1+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(K(s_1,0)+\int\limits_{s}^{0}K(s_1,s_2)ds_2\Big)ds_1\Big]A(s)\mathbf{x}(s)ds.$$

Используя представления операторов $\mathbf{A}^*,\mathbf{U}$ и $\mathbf{B}$, находим значения оператора

$$\big(\mathbf{A}^*\mathbf{UB}u\big)(\vartheta)=A^{\top}(\vartheta)\Big[K(0,0)\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}K(0,s)\widehat{B}(s)ds+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(K(s,0)\widehat{B}(0)$$

$$+\int\limits_{-\omega}^{0}K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1\Big)ds\Big]u=\widehat{A}(\vartheta)u,\quad -\omega\le\vartheta<0,$$

$$\big(\mathbf{A}^*\mathbf{UB}u\big)(0)=\Big[K(0,0)\widehat{B}(0)$$

$$+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(K(0,s)\widehat{B}(s)+K(s,0)\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1\Big)ds\Big]u=\widehat{A}(0)u.$$

Используя найденные представления операторов в операторном уравнении Риккати (3.4), получим определяющую систему уравнений (4.3)–(4.5). □

Рассмотрим гибридную систему уравнений, определяющую матричнозначные функции $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$ и матрицу K_0. Она содержит матричные интегральные уравнения

$$X_1(\vartheta)=A^{\top}(\vartheta)\Big\{\Big[K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}X_1^{\top}(s)ds+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(X_1(s)+X_3(s)+C_x(s)\Big)ds\Big]-\Big[K_0\widehat{B}(0)$$

$$+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(X_1^\top(s)\widehat{B}(s)ds+X_{12}(s)\Big)ds\Big]L^{-1}\Big[\widehat{B}^\top(0)K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(X_{12}^\top(s)+\widehat{B}^\top(s)X_1(s)\Big)ds\Big]\Big\}, \qquad (4.6)$$

$$X_2(\vartheta)=A^\top(\vartheta)\int\limits_{-\omega}^{0}\Big[K_0+\int\limits_{s}^{0}X_1^\top(s_1)ds_1+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(X_1(s_1)+\chi_{(s,0)}(s_1)C_x(s_1)\Big)ds_1\Big]A(s)\widehat{B}(s)ds$$

$$-A^\top(\vartheta)\Big[K_0\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}X_1^\top(s)\widehat{B}(s)ds+\int\limits_{\vartheta}^{0}X_{12}(s_1)ds_1\Big]L^{-1}\int\limits_{-\omega}^{0}\Big[\widehat{B}^\top(0)K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}\widehat{B}^\top(s)X_1(s)ds$$

$$+\int\limits_{s}^{0}X_{12}^\top(s_1ds_1\Big]A(s)\widehat{B}(s)ds+A^\top(\vartheta)\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{-\omega}^{0}\int\limits_{\vartheta}^{0}\int\limits_{s}^{0}A_m^\top(\vartheta,\zeta)\Big\{K_0+\int\limits_{\eta}^{0}X_1^\top(s_1)ds_1+\int\limits_{\zeta}^{0}\big(X_1(s_1)$$

$$+\chi_{(\eta,0)}(s_1)C_x(s_1)\big)ds_1-\Big[K_0\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}X_1^\top(s)\widehat{B}(s)ds+\int\limits_{\zeta}^{0}X_{12}(s_1)ds_1\Big]L^{-1}\Big[\int\limits_{-\omega}^{0}\widehat{B}^\top(s)X_1(s)ds$$

$$+\widehat{B}^\top(0)K_0+\int\limits_{\eta}^{0}X_{12}^\top(s_1)ds_1\Big]\Big\}A_m(s,\eta)d\eta d\zeta A(s)\widehat{B}(s)ds, \quad \vartheta\in[-\omega,0), \qquad (4.7)$$

и матричное уравнение

$$\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(X_1^\top(s)+X_1(s)+X_3(s)+C_x(s)\Big)ds-\Big[K_0\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}\big(X_1^\top(s)\widehat{B}(s)+X_{12}(s)\big)ds\Big]L^{-1}$$

$$\times\Big[\widehat{B}^\top(0)K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}\big(\widehat{B}^\top(s)X_1(s)+X_{12}^\top(s)\big)ds\Big]=0, \qquad (4.8)$$

Здесь $A_1(s,\eta)=A(\eta)$, $A_{m+1}(s,\eta)=\int_s^\eta A_m(s_1,\eta)A(s_1)ds_1$, $s,\eta\in[-\omega,0)$, $m\geq 1$, $L=C_{uu}+\widehat{B}^\top(0)K_0\widehat{B}(0)+\int_{-\omega}^0\Big(\widehat{B}^\top(0)X_1^\top(s)\widehat{B}(s)+\widehat{B}^\top(s)X_1(s)\widehat{B}(0)+\widehat{B}^\top(s)X_2(s)\Big)\,ds$, вспомогательные матричные функции $X_{12}(\cdot)$, $X_3(\cdot)$ выражаются через матричные функции $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$, матрицу K_0 и определяются формулами $X_{12}(\vartheta)=C_x^\top(\vartheta)\widehat{B}(\vartheta)+X_1(\vartheta)\widehat{B}(0)+X_2(\vartheta)$,

$$X_3(\vartheta)=A^\top(\vartheta)\int\limits_{-\omega}^{0}\Big[K_0+\int\limits_{s}^{0}X_1^\top(s_1)ds_1+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(X_1(s_1)+\chi_{(s,0)}(s_1)C_x(s_1)\Big)ds_1\Big]A(s)ds$$

$$-A^\top(\vartheta)\Big[K_0\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}X_1^\top(s)\widehat{B}(s)ds+\int\limits_{\vartheta}^{0}X_{12}(s_1)ds_1\Big]L^{-1}\int\limits_{-\omega}^{0}\Big[\widehat{B}^\top(0)K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}\widehat{B}^\top(s)X_1(s)ds$$

$$+\int\limits_{s}^{0}X_{12}^\top(s_1)ds_1\Big]A(s)ds+A^\top(\vartheta)\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{-\omega}^{0}\int\limits_{\vartheta}^{0}\int\limits_{s}^{0}A_m^\top(\vartheta,\zeta)\Big\{K_0+\int\limits_{\eta}^{0}X_1^\top(s_1)ds_1+\int\limits_{\zeta}^{0}\Big(X_1(s_1)$$

$$+\chi_{(\eta,0)}(s_1)C_x(s_1)\Big)(s_1)ds_1-\Big[K_0\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}X_1^\top(s)\widehat{B}(s)ds+\int\limits_{\zeta}^{0}X_{12}(s_1)ds_1\Big]L^{-1}\Big[\widehat{B}^\top(0)K_0$$

$$+\int\limits_{-\omega}^{0}\widehat{B}^{\top}(s)X_1(s)ds+\widehat{B}^{\top}(0)\int\limits_{\eta}^{0}X_{12}^{\top}(s_1)ds_1\Big]\Big\}A_m(s,\eta)d\eta d\zeta A(s)ds,\quad \vartheta\in[-\omega,0).$$

Лемма 2. *Пусть для системы* (4.1) *соответствующая дискретная задача* (3.1), (3.2) *стабилизируема. Тогда решение определяющей системы уравнений* (4.3)–(4.5) *задается формулами* $K(0,0)=K_0$, $K(\vartheta,0)=X_1(\vartheta)$,

$$K(\vartheta,s)=A^{\top}(\vartheta)\Big[F(\vartheta,s)+\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{\vartheta}^{0}\int\limits_{s}^{0}A_m^{\top}(\vartheta,\zeta)F(\zeta,\eta)A_m(s,\eta)d\eta d\zeta\Big]A(s),\quad \vartheta,s\in[-\omega,0),\tag{4.9}$$

$$F(\vartheta,s)=K_0+\int\limits_{s}^{0}X_1^{\top}(s_1)ds_1+\int\limits_{\vartheta}^{0}\Big(X_1^{\top}(s_1)+\chi_{(s,0)}(s_1)C_x(s_1)\Big)ds_1-\Big[K_0\widehat{B}(0)+\int\limits_{-\omega}^{0}X_1^{\top}(s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1$$

$$+\int\limits_{\vartheta}^{0}X_{12}(s_1)ds_1\Big]L^{-1}\Big[\widehat{B}^{\top}(0)K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}\widehat{B}^{\top}(s_1)X_1(s_1)ds_1+\int\limits_{s}^{0}X_{12}^{\top}(s_1)ds_1\Big],\quad \vartheta,s\in[-\omega,0).\tag{4.10}$$

Здесь матричнозначные функции $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$ *и матрица* K_0 *определяются системой уравнений* (4.6)–(4.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения $X_1(\vartheta)=K(\vartheta,0)$, $X_2(\vartheta)=\int_{-\omega}^{0}K(\vartheta,s)\widehat{B}(s)ds$, $X_3(\vartheta)=\int_{-\omega}^{0}K(\vartheta,s)ds$, $\vartheta\in[-\omega,0)$, $K_0=K(0,0)$. Рассмотрим вспомогательное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$K(\vartheta,s)=A^{\top}(\vartheta)\Big[F(\vartheta,s)+\int\limits_{\vartheta}^{0}\int\limits_{s}^{0}K(s_1,s_2)ds_2ds_1\Big]A(s),\quad \vartheta,s\in[-\omega,0),\tag{4.11}$$

где $F^{\top}(s,\vartheta)=F(\vartheta,s)$, функция $F(\cdot,\cdot)\in\mathbb{C}([-\omega,0)\times[-\omega,0),\mathbb{R}^{n\times n})$. Уравнение (4.11) имеет единственное решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что оно допускает представление (4.9). Уравнение (4.3) совпадает с (4.11), если функция F определяется формулой (4.10). Учитывая введенные обозначения, из уравнения (4.4) получим (4.6), а из (4.5)–(4.8). Учитывая определение функции $X_2(\cdot)$ и формулу (4.9), получим уравнение (4.6). □

Теорема 5. *Пусть для системы* (4.1) *соответствующая дискретная задача* (3.1), (3.2) *стабилизируема. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой*

$$u^0[\mathbf{x}]=-L^{-1}\Big\{\Big[\widehat{B}^{\top}(0)K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big(\widehat{B}^{\top}(s_1)X_1(s_1)+X_{12}^{\top}(s_1)\Big)ds_1\Big]\mathbf{x}(0)$$

$$+\int\limits_{-\omega}^{0}\Big[\widehat{B}^{\top}(0)K_0+\int\limits_{-\omega}^{0}\widehat{B}^{\top}(s_1)X_1(s_1)ds_1+\int\limits_{\vartheta}^{0}X_{12}^{\top}(s_1)ds_1\Big]A(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta\Big\},\quad \mathbf{x}\in\mathbb{H}.\tag{4.12}$$

Значение критерия качества (3.2) *для оптимального управления* (4.12) *и решения системы* (3.1) *с начальной функцией* φ *определяется формулой* $\mathbf{J}_{da}=\langle\mathbf{U}\varphi,\varphi\rangle_H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При нахождении оптимального управления дискретной задачи используются формула (3.3) и представления операторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{A}+\mathbf{C}_{xu}^*$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 39–51.
2. **Красовский Н.Н.** Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздыванием времени // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
3. **Янушевский Р.Т.** Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 410 с.
4. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88. doi: 10.1137/0313004 .
5. **Kushner H.J, Barnea D.I.** On the control of a linear functional-differential equation with qvadratic cost // SIAM J. Control. 1970. Vol. 8, no. 2. P. 257–272. doi: 10.1137/0308019 .
6. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optimiz. 1983. Vol. 21, no. 5. P. 95–135. doi: 10.1137/0321006 .
7. **Егоров А.И.** Уравнения Риккати. М.: СОЛОН-Пресс, 2017. 447 p.
8. **Долгий Ю.Ф.** Точные решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 124–135.
9. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 716–724.
10. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
11. **Быков Д.С., Долгий Ю.Ф.** Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 38–47.
12. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
13. **Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.** Использование конечномерных аппроксимаций в задаче стабилизации периодических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 29–45.
14. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 656 p.
15. **Фомин В.Н.** Методы управления линейными дискретными объектами. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1985. 336 p.
16. **Долгий Ю.Ф.** Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 85–96.

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Первого президента России Б. Н. Ельцина
e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Поступила 25.10.2017

Шевченко Роман Иванович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: oma170@hotmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags. *J. Appl. Math. Mech.*, 1962, vol. 26, no. 1, pp. 50–67. doi: 10.1016/0021-8928(62)90101-6 .
2. Krasovskii N.N. Optimum control in linear systems with time lag. *Select. Transl. Math. Stat. Probab.*, 1966, vol. 6, pp. 189–197.
3. Yanushevsky R.T. *Upravlenie ob"ektami s zapazdyvaniem* [Control of Plants with Time-Lag]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 410 p.

4. Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K. Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 48–88. doi: 10.1137/0313004 .
5. Kushner H.J, Barnea D.I. On the control of a linear functional-differential equation with qvadratic cost. *SIAM J. Control*, 1970, vol. 8, no. 2, pp. 257–272. doi: 10.1137/0308019 .
6. Gibson J.S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations. *SIAM J. Control optimiz.*, 1983, vol. 21, no. 1, pp. 95–139. doi: 10.1137/0321006 .
7. Egorov A.I. *Riccati equations.* Sofia, Pensoft, 2007, Ser. Russian Acad. Monographs, no. 5, 383 p. ISBN: 9789546422965 . Original Russian text (2nd ed.) published in A.I. Egorov *Uravneniya Rikkati*, Moscow, SOLON-Press, 2017, 448 p.
8. Dolgii Yu.F. Exact solutions of an optimal stabilization problem for systems of differential equations with aftereffect. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 124–135 (in Russian).
9. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. J. Appl. Math. Mech., 1964, vol. 28, no. 4, pp. 876–885. doi: 10.1016/0021-8928(64)90073-5 .
10. Osipov Yu.S. Stabilization of control systems with delays. *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 5, pp. 605–618 (in Russian).
11. Bykov D.S., Dolgii Yu.F. Error estimate for approximations of an optimal stabilizing control in a delay system. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 38–47 (in Russian).
12. Krasovskii N.N., Osipov, Yu.S. On the stabilization of motions of a plant with delay in a control system. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1963, no. 6, pp. 3–15 (in Russian).
13. Dolgii Y.F., Koshkin E.V. Use of finite-dimensional approximations in a problem of stabilization of periodic systems with aftereffect. *Russ Math.*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 24–38. doi: 10.3103/S1066369X1501003X .
14. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems.* NY etc.: Wiley-Interscience, 1972, 575 p. ISBN: 0-471-51110-2 . Translated to Russian under the title *Lineinye optimal'nye sistemy upravleniya*, Moscow, Mir Publ. 1977, 653 p.
15. Fomin V.N. *Discrete linear control systems.* Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ, 1991, 302 p. doi: 10.1007/978-94-011-3248-0 .
16. Dolgii Yu.F. Characteristic equation in the problem of asymptotic stability in periodic systems with aftereffect. *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), Dynamical Systems and Control Problems, 2005, suppl. 1, pp. S82–S94.

The paper was received by the Editorial Office on October 25, 2017.

Yurii Filippovich Dolgii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru .

Roman Ivanovich Shevchenko, doctoral student, Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: oma170@hotmail.com .