ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 512.567

О РЕШЕТКАХ МАКСИМАЛЬНЫХ АНТИЦЕПЕЙ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

И. А. Дерендяев

Настоящая статья посвящена решеткам максимальных антицепей конечных частично упорядоченных (ч.у.) множеств произвольной высоты. Решетки максимальных антицепей конечных ч.у. множеств высоты 1 хорошо изучены и применяются, например, в анализе формальных понятий. Однако существует множество общих свойств, присущих конечным ч.у. множествам любой высоты. Для произвольного элемента x некоторого ч.у. множества мы вводим понятие наименьшей (наибольшей) максимальной антицепи, содержащей x, обозначаемой как m_x (M_x). Мы доказываем, что для любой максимальной антицепи A справедливо равенство $A = \bigvee_{x \in A} m_x = \bigwedge_{x \in A} M_x$. Это соотношение позволяет описать все неразложимые элементы решеток максимальных антицепей. Основным результатом статьи является описание всех конечных ч.у. множеств, решетка максимальных антицепей которых изоморфна некоторой заранее заданной решетке. Неразложимые элементы в этом описании играют ключевую роль.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, максимальная антицепь, решетка максимальных антицепей.

I. A. Derendiaev. On maximal antichain lattices of finite posets.

This paper is devoted to maximal antichain lattices of posets of arbitrary length. Maximal antichain lattices of finite posets of length 1 have been well studied and are applied, for example, in formal concept analysis. However, there are many general properties inherent in finite posets of any length. For an arbitrary element x of some poset, we introduce the notions of smallest and largest maximal antichains containing x, which are denoted by m_x and M_x, respectively. We prove that the equality $A = \bigvee_{x \in A} m_x = \bigwedge_{x \in A} M_x$ holds for any maximal antichain A. This equality allows us to describe all irreducible elements of maximal antichain lattices. The main result of this paper is a description of all finite posets whose maximal antichain lattice is isomorphic to a given lattice. Irreducible elements play a key role in this description.

Keywords: poset, maximal antichain, maximal antichain lattice.

MSC: 06B15, 06A05, 06A11

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-95-104

Введение

Частично упорядоченные (ч.у.) множества относятся к числу основных математических объектов и изучаются с различных точек зрения. В частности, рассматриваются антицепи в конечных ч.у. множествах. Напомним, что *антицепью* называется подмножество ч.у. множества, в котором все элементы попарно несравнимы. На множестве всех антицепей произвольного конечного ч.у. множества можно ввести отношение частичного порядка, причем таким образом, что антицепи образуют дистрибутивную решетку; более того, всякую конечную дистрибутивную решетку можно представить как решетку антицепей подходящего ч.у. множества [1].

В данной статье рассматриваются максимальные антицепи конечных ч.у. множеств. Антицепь максимальна, если она не является собственным подмножеством никакой другой антицепи. На множестве всех максимальных антицепей произвольного конечного ч.у. множества также можно ввести отношение частичного порядка (см. разд. 1), которое превращает его в решетку; более того, любую конечную решетку можно представить как решетку максимальных антицепей некоторого подходящего ч.у. множества (см. [2]). В работе [2], кроме того, был найден способ построения конечного ч.у. множества с данной конечной решеткой максимальных антицепей, причем построенное таким образом ч.у. множество всегда имеет высоту 1 (напомним, что ч.у. множество имеет высоту n, если число элементов в его самой длинной цепи равно $n+1$).

Для ч.у. множеств высоты 1 были получены условия, при которых решетка максимальных антицепей модулярна [3] и дистрибутивна [3; 4]. Была найдена связь между решетками максимальных антицепей и решетками так называемых формальных понятий [5]. Решетки максимальных антицепей были применены также для исследования моделей параллельных вычислений [6].

В перечисленных статьях все исследования касались только ч.у. множеств высоты 1. Оставалось невыясненным, какие решетки представимы в виде решеток максимальных антицепей ч.у. множеств высоты больше единицы, какую наибольшую высоту может иметь ч.у. множество с данной решеткой максимальных антицепей и как связаны между собой два различных ч.у. множества с одинаковыми решетками максимальных антицепей.

Эти вопросы можно объединить в следующую задачу.

З а д а ч а. По данной конечной решетке L описать все частично упорядоченные множества, решетка максимальных антицепей которых изоморфна L.

Сформулированная задача решается в разд. 3. В разд. 1 приведены основные определения и некоторые вспомогательные утверждения. Раздел 2 посвящен свойствам элементов-близнецов частично упорядоченных множеств, которые играют существенную роль в доказательстве основного результата.

1. Предварительные сведения

Условимся о следующих обозначениях: для любого ч.у. множества P, если иные обозначения не оговорены, соответствующее отношение частичного порядка будем обозначать символом $\leq_P$, строгое неравенство — символом $<_P$, а отношение “быть несравнимыми” — символом $||_P$.

Зафиксируем произвольное конечное ч.у. множество P. Все следующие утверждения этого раздела будут посвящены свойствам его максимальных антицепей.

В дальнейшем множество всех максимальных антицепей ч.у. множества P будем обозначать символом $AntP$. На этом множестве естественным образом можно ввести отношение частичного порядка: для любых максимальных антицепей $A, B \in AntP$ будем считать, что A предшествует B тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ найдется такой элемент $b \in B$, что выполнено неравенство $a \leq_P b$. Условимся частичный порядок на $AntP$ обозначать специальным символом $\trianglelefteq$; для строго неравенства будем использовать символ $\triangleleft$, для отношения “быть несравнимыми” — символ $||$.

Следующее утверждение в принципе хорошо известно. Оно показывает, как условие максимальности антицепей влияет на свойства частичного порядка $\trianglelefteq$.

Лемма 1. *Пусть $A, B \in AntP$. Следующие условия равносильны*:

1) $A \trianglelefteq B$, *т. е. для любого элемента $a \in A$ найдется элемент $b \in B$ такой, что $a \leq_P b$*;

2) *для любого элемента $b \in B$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $a \leq_P b$*;

3) *для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ справедлива импликация: если a и b сравнимы, то $a \leq_P b$.*

В дальнейшем точную верхнюю (нижнюю) грань максимальных антицепей A и B будем обозначать как $A \vee B$ ($A \wedge B$) и называть *объединением* (*пересечением*) *максимальных антицепей* A и B.

Пусть $A, B \in AntP$. Введем следующие обозначения:

$$Up(A,B) = \{x \in A \cup B \mid \exists y \in A \cup B : y <_P x\} \cup (A \cap B),$$
$$Down(A,B) = \{x \in A \cup B \mid \exists y \in A \cup B : x <_P y\} \cup (A \cap B).$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Для любых максимальных антицепей $A, B \in AntP$ выполнены включения $Up(A, B) \subseteq A \vee B$ и $Down(A, B) \subseteq A \wedge B$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения легко следует из построения операций $\vee$ и $\wedge$ в решетке $AntP$ (см. [2]). $\square$

Перечислим несколько следствий леммы 2.

Следствие 1. *Для любых максимальных антицепей $A, B \in P$ и для любого элемента $x \in A \cap B$ выполнены включения $x \in A \vee B$ и $x \in A \wedge B$.*

Следствие 2. *Для любого элемента $x \in P$ множество всех максимальных антицепей, содержащих x, является интервалом в $AntP$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in P$. По следствию 1 множество всех максимальных антицепей, содержащих x, замкнуто относительно объединений и пересечений, т. е. является подрешеткой решетки $AntP$. Покажем, что эта подрешетка является интервалом. Предположим, что $A, B, C \in AntP$, при этом $x \in A \cap B$, а C удовлетворяет двойному неравенству $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$. Докажем, что x лежит в C. Поскольку $x \in A$ и $A \trianglelefteq C$, найдется такой элемент $c \in C$, что $x \leq_P c$. С другой стороны, поскольку $x \in B$ и $C \trianglelefteq B$, найдется такой элемент $c' \in C$, что $c' \leq_P x$. Тогда выполнено двойное неравенство $c' \leq_P x \leq_P c$. Получаем, что элементы c и c' сравнимы и лежат в антицепи C. Следовательно, $c = c'$, откуда $c' = x = c$, а значит, $x \in C$. $\square$

Следствие 3. *Для любого элемента $x \in P$ среди всех максимальных антицепей, содержащих x, существуют наибольшая и наименьшая максимальные антицепи.*

В дальнейшем наибольшую (наименьшую) максимальную антицепь, содержащую элемент x, будем для краткости называть *наибольшей* (*наименьшей*) *для* x и обозначать символом M_x (m_x). Максимальные антицепи, наибольшие или наименьшие для элементов, играют ключевую роль в решении поставленной задачи. Продемонстрируем несколько их основных свойств.

Лемма 3. *Пусть $x, y \in P$ и $x \leq_P y$. Тогда $M_x \trianglelefteq M_y$ и $m_x \trianglelefteq m_y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим неравенство $M_x \trianglelefteq M_y$. Поскольку $x \leq_P y$, элемент y содержится во множестве $Up(M_x, M_y)$. Из леммы 2 следует, что тогда y содержится в максимальной антицепи $M_x \vee M_y$. Поскольку M_y — наибольшая для y максимальная антицепь, справедливо неравенство $M_x \vee M_y \trianglelefteq M_y$, откуда вытекает, что $M_x \trianglelefteq M_y$.

Неравенство $m_x \trianglelefteq m_y$ проверяется двойственным образом. $\square$

Предложение 1. *Пусть $x, y \in P$. Следующие условия равносильны:*

1) $x <_P y$;

2) *выполнено либо $M_x \vartriangleleft m_y$, либо $M_x \parallel m_y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что условие 1 влечет условие 2. Пусть $x <_P y$. Поскольку $x \in M_x$ и $y \in m_y$, соотношение $m_y \trianglelefteq M_x$ противоречит условию 3 леммы 1. Поэтому либо $M_x \vartriangleleft m_y$, либо $M_x \parallel m_y$.

Предположим теперь, что условие 1 не выполняется, т. е. либо $y \leq_P x$, либо x и y несравнимы. Если $y \leq_P x$, то x содержится в $Up(m_y, M_x)$, а значит, содержится в $m_y \vee M_x$. Тогда справедливо двойное неравенство $m_y \trianglelefteq m_y \vee M_x \trianglelefteq M_x$. Если же x и y несравнимы, то существует максимальная антицепь $A \in AntP$, содержащая как x, так и y, и тогда справедливо двойное неравенство $m_y \trianglelefteq A \trianglelefteq M_x$. В обоих случаях выполняется неравенство $m_y \trianglelefteq M_x$. Отсюда следует, что условие 2 не выполняется.

Итак, если условие 1 истинно, то и условие 2 истинно, а если условие 1 ложно, то и условие 2 ложно. Следовательно, условия 1 и 2 эквивалентны. $\square$

Предложение 2. *Пусть $A \in AntP$. Справедливы следующие равенства:*

$$A = \bigvee_{x \in A} m_x = \bigwedge_{x \in A} M_x. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим равенство $A = \bigvee\limits_{x \in A} m_x$. Ясно, что для любого элемента $x \in A$ справедливо неравенство $m_x \trianglelefteq A$. Следовательно, выполнено неравенство $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq A$.

Пусть теперь $B \in AntP$ и $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq B$. Зафиксируем произвольный элемент $y \in A$. Из неравенства $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq B$ следует неравенство $m_y \trianglelefteq B$. Тогда найдется такой элемент $b \in B$, что $y \leq_P b$. Элемент y был выбран из A произвольно, следовательно, $A \trianglelefteq B$. Максимальная антицепь B также была выбрана произвольно с условием $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq B$. Подставляя вместо антицепи B антицепь $\bigvee\limits_{x \in A} m_x$, получаем $A \trianglelefteq \bigvee\limits_{x \in A} m_x$, откуда следует $A = \bigvee\limits_{x \in A} m_x$.

Двойственным образом проверяется равенство $A = \bigwedge\limits_{x \in A} M_x$. □

Следствие 4. *Пусть $A \in AntP$. Если антицепь A неразложима в объединение (пересечение) как элемент решетки $AntP$, то $A = m_x$ ($A = M_x$) для некоторого элемента $x \in A$.*

Предложение 3. *Пусть $x \in P$ и $A \in AntP$.*

1) *Если $M_x \parallel A$, то $m_x \vartriangleleft A$.*

2) *Если $m_x \parallel A$, то $A \vartriangleleft M_x$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем истинность импликации 1). Пусть $M_x \parallel A$. Предположим, что для любого $y \in A$ выполнено неравенство $m_y \trianglelefteq M_x$. Тогда в силу равенства (1) имеем $A \trianglelefteq M_x$, что противоречит предположению о том, что $M_x \parallel A$. Следовательно, найдется элемент $y' \in A$ такой, что либо $M_x \parallel m_{y'}$, либо $M_x \vartriangleleft m_{y'}$. Тогда по предложению 1 справедливо неравенство $x <_P y'$, откуда $m_x \trianglelefteq m_{y'}$ (по лемме 3). Поскольку $m_{y'} \trianglelefteq A$, имеем $m_x \trianglelefteq A$, а из соотношения $x <_P y'$ вытекает, что максимальные антицепи m_x и A не могут совпадать. Следовательно, $m_x \vartriangleleft A$.

Истинность импликации 2) проверяется двойственным образом. □

2. Элементы-близнецы в частично упорядоченном множестве

В этом разделе мы вводим и изучаем понятие пар близнецов ч.у. множества, которое играет принципиальную роль в формулировке основного результата статьи.

О п р е д е л е н и е. Различные элементы x и y ч.у. множества P называются *близнецами*, если для любого элемента $z \in P$ неравенство $x <_P z$ равносильно неравенству $y <_P z$, а неравенство $z <_P x$ равносильно неравенству $z <_P y$.

Лемма 4. *Пусть x, y — близнецы в конечном ч.у. множестве P. Для любой максимальной антицепи $A \in AntP$ включение $x \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено включение $y \in A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — максимальная антицепь. Покажем, что если x не лежит в A, то и y не может лежать в A. Действительно, если x не лежит в A, то (так как антицепь A максимальна) найдется элемент $a \in A$ такой, что либо $x <_P a$, либо $a <_P x$. Тогда либо $y <_P a$, либо $a <_P y$, что означает, что y не лежит в A. Следовательно, если $y \in A$, то и $x \in A$.

Обратная импликация проверяется аналогично. □

Предложение 4. *Различные элементы x и y конечного ч.у. множества P являются близнецами тогда и только тогда, когда $M_x = M_y$ и $m_x = m_y$.*

Доказательство. Пусть x и y — близнецы. Тогда по лемме 4 $x \in M_y$ и $y \in M_x$, откуда следует, что $M_y \trianglelefteq M_x$ и $M_x \trianglelefteq M_y$, что означает $M_x = M_y$.

Равенство $m_x = m_y$ проверяется аналогично.

Пусть теперь $M_x = M_y$ и $m_x = m_y$, и пусть a — произвольный элемент P. Неравенство $x <_P a$ по предложению 1 эквивалентно тому, что либо $M_x \parallel m_a$, либо $M_x \lhd m_a$, а это, поскольку $M_x = M_y$, эквивалентно неравенству $y <_P a$. Эквивалентность неравенств $a <_P x$ и $a <_P y$ проверяется двойственным образом. А раз x и y различны, они являются близнецами. □

Отметим, что между конечными ч.у. множествами высоты 1 и формальными контекстами существует взаимно однозначное соответствие (см. [5]), причем решетка максимальных антицепей ч.у. множества высоты 1 изоморфна решетке понятий соответствующего контекста, а существование в ч.у. множестве элементов-близнецов равносильно существованию в соответствующем контексте повторяющихся строк или столбцов. В монографии [5] показано, что при "очищении" контекста от повторяющихся столбцов и строк решетка понятий этого контекста остается неизменной. Это равносильно тому, что при "удалении" из ч.у. множества высоты 1 элементов-близнецов решетка максимальных антицепей этого ч.у. множества не меняется.

Покажем, что это справедливо для конечных ч.у. множеств любой высоты. Пусть a — некоторый фиксированный элемент конечного ч.у. множества P и $a' \notin P$. Положим $R = P \cup \{a'\}$ и введем на R отношение частичного порядка $\leq_{R,a}$ следующим способом:

$$\forall x, y \in P \colon x \leq_{R,a} y \Leftrightarrow x \leq_P y;$$
$$\forall x \in R \colon x <_{R,a} a' \Leftrightarrow x <_P a;$$
$$\forall x \in R \colon a' <_{R,a} x \Leftrightarrow a <_P x.$$

Другими словами, ч.у. множество R получается из P добавлением специального элемента a', причем таким образом, чтобы элементы a и a' были близнецами. Оказывается, что при таком "добавлении" близнеца решетка максимальных антицепей не меняется, т. е. справедливо

Предложение 5. *Решетки $AntP$ и $AntR$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть A — максимальная антицепь ч.у. множества P. Если $a \notin A$, то для какого-то элемента $x \in A$ либо $x <_P a$, либо $a <_P x$. Тогда либо $x <_R a'$, либо $a' <_R x$ и A является максимальной антицепью в R. Если же $a \in A$, то a не сравним (в ч.у. множестве P) с каждым элементом из $A \backslash \{a\}$, а значит, a' не сравним с каждым элементом из A (в ч.у. множестве R); это означает, что множество $A \cup \{a'\}$ будет максимальной антицепью в R. Иными словами, для любой максимальной антицепи $A \in AntP$ либо $A \in AntR$, либо $A \cup \{a'\} \in AntR$.

С другой стороны, ясно, что для любой максимальной антицепи $B \in AntR$ выполнено включение $B \backslash \{a'\} \in AntP$. Причем если для каких-то двух максимальных антицепей $B, C \in AntR$ выполнено равенство $B \backslash \{a'\} = C \backslash \{a'\}$, то $B = C$, откуда следует, что отображение $f \colon AntR \to AntP$, действующее по правилу $f(B) = B \backslash \{a'\}$, является биекцией.

Тот факт, что f сохраняет отношение порядка, следует из построения частичного порядка на R и леммы 1.

Итак, f — биекция решетки $AntR$ на решетку $AntP$, сохраняющая частичный порядок. Значит, решетки $AntR$ и $AntP$ изоморфны. □

Таким образом, "добавление" (а значит, и "удаление") близнецов не влияет на решетку максимальных антицепей. Это значит, что для описания всех конечных ч.у. множеств с некоторой заданной решеткой максимальных антицепей достаточно описать только те ч.у. множества, в которых нет близнецов.

3. Основной результат

Всюду далее будем считать, что L — произвольная конечная решетка. Символами $Mi(L)$ и $Ji(L)$ будем обозначать множества всех неразложимых в пересечение и объединение элементов решетки L соответственно. Кроме того, будем считать, что 0_L (т. е. наименьший элемент решетки L) не является элементом, неразложимым в объединение, а 1_L (наибольший элемент решетки L) — элементом, неразложимым в пересечение.

Рассмотрим некоторое множество $Q \subseteq L^2$. Потребуем, чтобы Q удовлетворяло следующим свойствам:

I) $\forall (a,b) \in Q\colon a \leq_L b$;

II) $\forall (a,b) \in Q, \forall c \in L\colon c \,||_L\, a \to c <_L b \;\&\; c \,||_L\, b \to a <_L c$;

III) $\forall x \in Mi(L),\ \forall y' \in Ji(L)\colon \exists y \in L\colon (y,x) \in Q \;\&\; \exists x' \in L\colon (y',x') \in Q$.

Отметим, что хотя бы одно множество с такими свойствами найдется. Например, это может быть множество

$$\{(a, 1_L) \mid a \in Ji(L)\} \cup \{(0_L, b) \mid b \in Mi(L)\}.$$

Нетрудно проверить, что это множество удовлетворяет каждому из свойств I–III.

На множестве Q введем отношение частичного порядка:

$$(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \text{ или } a_2 \not\leq_L b_1. \tag{2}$$

Соответствующий строгий порядок будем обозначать символом $<_Q$.

Отметим, что соотношения $a_2 \not\leq_L b_1$ и $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ не могут выполняться одновременно в силу свойства I.

Прежде чем проверить, что отношение $\leq_Q$ действительно является отношением частичного порядка на множестве Q, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Q$ и $(a_1, b_1) <_Q (a_2, b_2)$. Тогда $a_1 <_L a_2$ и $b_1 <_L b_2$.*

Доказательство. Пусть $(a_1, b_1) <_Q (a_2, b_2)$. Тогда либо $b_1 <_L a_2$, либо $b_1 \,||_L\, a_2$. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

Предположим, что $b_1 <_L a_2$. Из свойства I следуют соотношения $a_1 \leq_L b_1 <_L a_2 \leq_L b_2$, откуда $a_1 <_L a_2$ и $b_1 <_L b_2$.

Если же $b_1 \,||_L\, a_2$, то требуемые неравенства вытекают из свойства II. □

Следствие 5. *Если $(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2)$, то $a_1 \leq_L a_2$ и $b_1 \leq_L b_2$.*

Предложение 6. *Бинарное отношение $\leq_Q$ на множестве Q является отношением частичного порядка.*

Доказательство. Рефлексивность отношения $\leq_Q$ вытекает из его определения. Проверим антисимметричность: пусть $(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2)$ и $(a_2, b_2) \leq_Q (a_1, b_1)$. Тогда по следствию 5 справедливы соотношения $b_1 \leq_L b_2$ и $b_2 \leq_L b_1$, откуда $b_1 = b_2$. Аналогично проверяется равенство $a_1 = a_2$.

Проверим транзитивность. Пусть $(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2)$ и $(a_2, b_2) \leq_Q (a_3, b_3)$. Случай, когда хотя бы одно из неравенств обращается в равенство, тривиален, поэтому предположим, что оба неравенства строгие. Тогда по определению отношения $\leq_Q$ либо $b_2 <_L a_3$, либо $b_2 \,||_L\, a_3$. По лемме 5 справедливо соотношение $b_1 \leq_L b_2$. Ясно, что в таком случае неравенство $a_3 \leq_L b_1$ выполняться не может, следовательно, либо $b_1 <_L a_3$, либо $b_1 \,||_L\, a_3$, что по определению отношения $\leq_Q$ означает, что $(a_1, b_1) \leq_Q (a_3, b_3)$. □

Итак, любое множество $Q \subseteq L^2$, удовлетворяющее свойствам I–III, является частично упорядоченным. Оказывается, что решетка максимальных антицепей любого такого ч.у. множества изоморфна исходной решетке L. Более того, любое ч.у. множество без близнецов, решетка максимальных антицепей которого изоморфна L, можно представить в таком виде. Для доказательства этого факта потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6. *Пусть $(a,b),(c,d)$ — элементы множества Q. Следующие условия равносильны:*
1) $(a,b)\ ||_Q\ (c,d)$;
2) $[a,b]\cap[c,d]\neq\varnothing$.

Доказательство. Покажем, что из условия 1 следует условие 2. Если $(a,b)\ ||_Q\ (c,d)$, то по определению частичного порядка $\le_Q$ справедливы неравенства $a\ \le_L\ d$ и $c\ \le_L\ b$. Поскольку $a\le_L b$ и $c\le_L d$, справедливы неравенства $a\le_L b\wedge d\le_L b$ и $c\le_L b\wedge d\le_L d$. Таким образом, выполнено включение $b\wedge d\in[a,b]\cap[c,d]$, откуда очевидна истинность условия 2.

Теперь покажем, что из условия 2 следует условие 1. Пусть $x\in[a,b]\cap[c,d]$. Тогда выполнены неравенства $a\le_L x\le_L b$ и $c\le_L x\le_L d$, откуда $a\le_L d$ и $c\le_L b$. Следовательно, по определению порядка на множестве Q выполнено соотношение $(a,b)\ ||_Q\ (c,d)$. □

Следствие 6. *Пусть x — произвольный элемент решетки L. Тогда множество*

$$\{(a,b)\in Q\mid x\in[a,b]\}$$

является антицепью ч.у. множества Q.

Доказательство легко следует из леммы 6. □

Всюду далее для любого элемента $x\in L$ множество $\{(a,b)\in Q\mid x\in[a,b]\}$ будем обозначать символом $A(x)$.

Лемма 7. *Пусть $A=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)\}$ — произвольная антицепь ч.у. множества Q $(n>0)$. Тогда множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ непусто.*

Доказательство. Поскольку любые два различных элемента множества A несравнимы, для любых k,j таких, что $1\le k<j\le n$, выполнены соотношения $a_k\le_L b_j$ и $a_j\le_L b_k$. Тогда для любого k такого, что $1\le k\le n$, выполнено неравенство $a_j\le_L\bigwedge\limits_{i=1}^{n}b_i\le_L b_j$, откуда следует, что множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ содержит элемент $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}b_i$, т.е. непусто. □

Лемма 8. *Для любого элемента $x\in L$ множество $A(x)$ является максимальной антицепью ч.у. множества Q.*

Доказательство. Сперва заметим, что для любой пары $(a,b)\in A(x)$ справедливо соотношение $a\le_L x\le_L b$, откуда вытекает двойное неравенство

$$\bigvee_{(a,b)\in A(x)}a\le_L x\le_L\bigwedge_{(a,b)\in A(x)}b. \qquad (3)$$

Пусть $x=a_1\vee a_2\vee\dots\vee a_n$, причем элементы a_i, $i=1,2,\dots,n$, неразложимы в объединение и попарно несравнимы (ясно, что если x разложим в объединение, то такие элементы в силу конечности решетки L найдутся; если x неразложим в объединение, то $n=1$ и $x=a_1$). В силу свойства III найдутся элементы $b_1,b_2,\dots,b_n$ такие, что $(a_i,b_i)\in Q$ для любого $i=1,2,\dots,n$. Покажем, что для любого i, где $1\le i\le n$, выполнено включение $x\in[a_i,b_i]$. Если $n=1$, то $a_1=x$ и $x\in[a_1,b_1]$. Поэтому предположим, что $n>1$. Для любых i,j таких, что $1\le i<j\le n$, в силу соотношения $a_i\ ||_L\ a_j$ справедливы неравенства $a_i\le_L b_j$ и $a_j\le_L b_i$. Кроме того, в силу свойства I для любого $i=1,2,\dots,n$ имеет место неравенство $a_i\le_L b_i$. Отсюда следует, что для любого $i=1,2,\dots,n$ выполнено неравенство $a_i\le_L\bigwedge\limits_{j=1}^{n}b_j$. Следовательно, выполнено соотношение $x=\bigvee\limits_{i=1}^{n}a_i\le_L\bigwedge\limits_{j=1}^{n}b_j$, откуда, в частности, следует, что $x\le_L b_j$ для

любого $j = 1, 2, \ldots, n$. С другой стороны, для любого $j = 1, 2, \ldots, n$ имеет место соотношение $a_j \leq_L x$, откуда $x \in [a_j, b_j]$ для любого $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $(a_j, b_j) \in A(x)$.

Из включения $(a_j, b_j) \in A(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, вытекает неравенство

$$x = \bigvee_{i=1}^{n} a_i \leq_L \bigvee_{(a,b)\in A(x)} a.$$

С учетом неравенства (3) отсюда следует, что $x = \bigvee\limits_{(a,b)\in A(x)} a$. Двойственными рассуждениями проверяется равенство $x = \bigwedge\limits_{(a,b)\in A(x)} b$. Поскольку

$$\bigcap_{(a,b)\in A(x)} [a,b] = \Bigg[\bigvee_{(a,b)\in A(x)} a, \bigwedge_{(a,b)\in A(x)} b \Bigg],$$

имеем $\bigcap\limits_{(a,b)\in A(x)} [a,b] = \{x\}$.

Раз $A(x)$ — антицепь, найдется максимальная антицепь $B \in AntQ$ такая, что $A(x) \subseteq B$. По лемме 7 множество $\bigcap\limits_{(c,d)\in B} [c,d]$ непусто. С другой стороны, поскольку $A(x) \subseteq B$, справедливо включение

$$\bigcap_{(c,d)\in B} [c,d] \subseteq \bigcap_{(a,b)\in A(x)} [a,b] = \{x\}.$$

Следовательно, $\bigcap\limits_{(c,d)\in B} [c,d] = \{x\}$; это означает, что для любой пары $(c,d) \in B$ выполнено $x \in [c,d]$. Тогда $B \subseteq A(x)$, откуда вытекает, что $A(x)$ — максимальная антицепь. ☐

Следствие 7. *Для любого элемента $x \in L$ справедливы следующие равенства:*

$$x = \bigvee_{(a,b)\in A(x)} a = \bigwedge_{(a,b)\in A(x)} b; \qquad \{x\} = \bigcap_{(a,b)\in A(x)} [a,b].$$

Следствие 8. *Для любых элементов $x, y \in L$ если $A(x) = A(y)$, то $x = y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 7 имеет место равенство $\bigcap\limits_{(a,b)\in A(x)} [a,b] = \{x\}$. Если $A(x) = A(y)$, то $\{x\} = \{y\}$, откуда $x = y$. ☐

Лемма 9. *Для любой максимальной антицепи $B \in AntQ$ существует элемент $x \in L$ такой, что $B = A(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B \in AntQ$. По лемме 7 множество $\bigcap\limits_{(a,b)\in B} [a,b]$ непусто. Пусть $x \in \bigcap\limits_{(a,b)\in B} [a,b]$. Тогда для любой пары $(a,b) \in B$ выполнено включение $x \in [a,b]$, откуда $B \subseteq A(x)$. Но B — максимальная антицепь, а значит, $B = A(x)$. ☐

Предложение 7. *Ч.у. множество Q не содержит близнецов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что (a,b) и (c,d) — близнецы в Q.

Рассмотрим максимальную антицепь $A(b)$. Поскольку $b \in [a,b]$, имеем $(a,b) \in A(b)$. Отсюда, так как (a,b) и (c,d) являются близнецами в Q, получаем, что $(c,d) \in A(b)$, т. е. $b \in [c,d]$. Аналогичным образом можно показать, что $d \in [a,b]$, откуда получаем, что $b = d$. Двойственным образом можно проверить равенство $a = c$. Отсюда следует равенство $(a,b) = (c,d)$; это противоречит предположению о том, что (a,b) и (c,d) — близнецы в Q. ☐

Теперь можно сформулировать окончательный результат.

Теорема. *Пусть L — конечная решетка.*

1) *Для любого ч.у. множества $Q \subseteq L^2$, удовлетворяющего свойствам* I–III*, с частичным порядком $\leq_Q$, заданным по правилу* (2)*, решетки $AntQ$ и L изоморфны.*

2) *Для любого конечного ч.у. множества P без близнецов с решеткой максимальных антицепей, изоморфной L, существует ч.у. множество $Q \subseteq L^2$ с частичным порядком $\leq_Q$, заданным по правилу* (2)*, удовлетворяющее свойствам* I–III *и изоморфное ч.у. множеству P.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $Q \subseteq L^2$ удовлетворяет свойствам I–III. Построим изоморфизм f между решетками L и $AntQ$ следующим образом: для любого $x \in L$ положим $f(x) = A(x)$. Согласно лемме 8 для любого $x \in P$ множество $A(x)$ является максимальной антицепью в Q; в силу леммы 9 и следствия 8 отображение f биективно. Проверим, что f сохраняет порядок.

Пусть $x \leq_L y$. Покажем, что тогда $A(x) \trianglelefteq A(y)$. Для этого достаточно проверить выполнение п. 3 леммы 1. Пусть $(a,b) \in A(x), (c,d) \in A(y)$ и пары (a,b) и (c,d) сравнимы в Q. Поскольку $a \leq_L x \leq_L y \leq_L d$, выполнено неравенство $a \leq_L d$. Отсюда следует, что неравенство $(c,d) <_Q (a,b)$ невозможно, а значит, выполнено неравенство $(a,b) \leq_Q (c,d)$.

Пусть теперь $x, y \in L$ и $A(x) \trianglelefteq A(y)$. Покажем, что тогда $x \leq_L y$. Пусть $(a,b) \in A(x)$ и $(c,d) \in A(y)$. Неравенство $A(x) \trianglelefteq A(y)$ означает, что либо $(a,b) \leq_Q (c,d)$, либо $(a,b) \,||_Q\, (c,d)$. В обоих случаях с учетом леммы 5, свойства II ч.у. множества Q и неравенств $a \leq_L b,\ c \leq_L d$ получаем, что $a \leq_L d$.

Таким образом, для любых пар $(a,b) \in A(x)$ и $(c,d) \in A(y)$ выполнено неравенство $a \leq_L d$. Следовательно, выполнено неравенство

$$\bigvee_{(a,b)\in A(x)} a \leq_L \bigwedge_{(c,d)\in A(y)} d.$$

По следствию 7 выполнены равенства

$$x = \bigvee_{(a,b)\in A(x)} a, \qquad y = \bigwedge_{(c,d)\in A(y)} d,$$

откуда $x \leq_L y$.

Итак, f — биеция между L и $AntQ$, сохраняющая порядок, т. е. L и $AntQ$ изоморфны как ч.у. множества. Тогда они изоморфны как решетки. Кроме того, по предложению 7 Q — ч.у. множество без близнецов.

2) Пусть P — конечное ч.у. множество без близнецов и с решеткой максимальных антицепей, изоморфной решетке L. Рассмотрим множество пар

$$Q = \{(m_x, M_x) \mid x \in P\} \subseteq (AntP)^2.$$

Так как для любого $x \in P$ выполнено неравенство $m_x \trianglelefteq M_x$, множество Q удовлетворяет свойству I. По предложению 3 и следствию 4 Q удовлетворяет свойствам II и III соответственно. Зададим на Q частичный порядок $\leq_Q$ по правилу (2). Поскольку P — ч.у. множество без близнецов, для любых элементов $x, y \in P$ равенство $(m_x, M_x) = (m_y, M_y)$ равносильно равенству $x = y$, а по определению отношения $<_Q$ и по предложению 1 неравенство $(m_x, M_x) <_Q (m_y, M_y)$ равносильно неравенству $x <_L y$. Следовательно, отображение $f\colon P \to Q$, действующее по правилу $f(x) = (m_x, M_x)$, является биекцией, сохраняющей порядок, а значит, является изоморфизмом ч.у. множеств P и Q. Поскольку решетки $AntP$ и L изоморфны, можно считать, что $Q \subseteq L^2$. На этом доказательство теоремы завершается. $\square$

Таким образом, все конечные частично упорядоченные множества с решеткой максимальных антицепей, изоморфной конечной решетке L, — это в точности все подмножества множества L^2, удовлетворяющие свойствам I–III с частичным порядком $\leq_Q$ либо полученные из таких добавлением некоторого числа близнецов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Birkhoff G.** Rings of sets// Duke Math. J. 1937. Vol. 3, no. 3. P. 443–454.
2. **Behrendt G.** Maximal antichains in partially ordered sets // Ars Combin. 1988. No. 25C. P. 149–157.
3. **Reuter K.** The jump number and the lattice of maximal antichains // Discrete Math. 1991. Vol. 88, iss. 2–3. P. 289–307.
4. **Morvan M., Nourine L.** Simplicial elimination schemes, extremal lattices and maximal antichain lattices // Order. 1996. Vol. 13, iss. 2. P. 159–173. doi: 10.1007/BF00389839 .
5. **Ganter B., Wille R.** Formal concept analysis: Mathematical foundations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 284 p. doi: 10.1007/978-3-642-59830-2 .
6. **Garg V.** Maximal antichain lattice algorithms for distributed computations // Internat. Conf. on Distributed Computing and Networking. 2013. P. 240–254. (Lecture Notes Comp. Sci., vol. 7730.) doi: 10.1007/978-3-642-35668-1_17 .

Дерендяев Илья Александрович
магистрант
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: ilia.derendiaev@yandex.ru

Поступила 19.05.2017

REFERENCES

1. Birkhoff G. Rings of sets. *Duke Math. J.*, 1937, vol. 3, no. 3, pp. 443–454.
2. Behrendt G. Maximal antichains in partially ordered sets. *Ars Combin.*, 1988, no. 25C, pp. 149–157.
3. Reuter K. The jump number and the lattice of maximal antichains. *Discrete Math.*, 1991, vol. 88, iss. 2-3, pp. 289–307.
4. Morvan M., Nourine L. Simplicial elimination schemes, extremal lattices and maximal antichain lattices. *Order*, 1996, vol. 13, iss. 2, pp. 159–173. doi: 10.1007/BF00389839 .
5. Ganter B., Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical foundations.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, 284 p. doi: 10.1007/978-3-642-59830-2 .
6. Garg V. Maximal antichain lattice algorithms for distributed computations. Internat. Conf. on Distributed Computing and Networking, 2013, Ser. Lecture Notes Comp. Sci., vol. 7730, pp. 240–254. doi: 10.1007/978-3-642-35668-1_17 .

The paper was received by the Editorial Office on May 19, 2017.

Ilia Aleksandrovich Derendiaev, graduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: ilia.derendiaev@yandex.ru .