ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.956.45, 517.968.74

УРАВНЕНИЕ АГРЕГАЦИИ С АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИЕЙ[1]

В. Ф. Вильданова

Работа посвящена изучению смешанной задачи для уравнения агрегации с анизотропной вырождающейся диффузией. Единственность решения доказана методом энергетических оценок. При этом строится специальная пробная функция как решение вспомогательной эллиптической задачи. Предварительно изучается задача с гладкими данными, в которой нелокальный член со сверткой заменяется гладким вектором. Для нее устанавливаются неотрицательность решения и оценка сверху роста решения. Существование решения сначала доказывается для невырожденного уравнения комбинированием методов итераций и сжимающих отображений. Затем осуществляется предельный переход от решений u_ε приближающего уравнения к решению предельной вырожденной задачи. При этом используется принцип компактности в L_1, близкий к разработанному в известной работе Альта и Лукхауса. Исследуемые в статье уравнения возникают в моделях биологической агрегации.

Ключевые слова: уравнение агрегации, анизотропная диффузия, существование решения, единственность решения.

V. F. Vil'danova. Aggregation equation with anisotropic diffusion.

A mixed problem for the aggregation equation with anisotropic degenerating diffusion is studied. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy estimates. For this, a special test function is constructed as a solution of an auxiliary elliptic problem. Preliminarily, we study a problem with smooth data, where the nonlocal term with convolution is replaced by a smooth vector. For this problem, we establish the nonnegativity of the solution and find an upper bound for its growth. The existence of the solution is first proved for the nondegenerate equation by a combination of the iteration method and the method of contracting mappings. Passing to the limit, we obtain a solution of the degenerate limit problem from solutions u_ε of the approximating equation. Here, we apply the compactness principle in L_1, which is similar to the principle developed in the known paper by Alt and Luckhaus. The equations under consideration appear in biological aggregation models.

Keywords: aggregation equation, anisotropic diffusion, solution existence, uniqueness of solution.

MSC: 35K20, 35K55, 35K65

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-58-73

Введение

Пусть Ω — выпуклая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с границей класса C^3. Рассмотрим в цилиндрической области $D^T = \Omega \times (0,T)$ уравнение

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j A(u)) + \operatorname{div}(u\nabla K * u) = 0 \tag{0.1}$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

$$\sum_{i=1}^{d}\Big(-\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_j A(u) + u\partial_i K * u\Big)\nu_i = 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Omega \times (0,T), \tag{0.3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-41-020195 р-а).

где ν — вектор внешней нормали. Оператор свертки определяется формулой $K * u(x,t) = \int_\Omega K(x-y)u(y,t)dy$.

На симметричные коэффициенты $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$ накладывается условие равномерной эллиптичности: существуют положительные постоянные γ, Γ такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^d$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\gamma|y|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)y_i y_j \leq \Gamma|y|^2. \tag{0.4}$$

Предполагается, что нечетная функция $A(s) \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$A'(s) > 0, \quad s > 0. \tag{0.5}$$

Функция $K(x)$ подчиняется условиям

$$K \in C^2(\mathbb{R}^d), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(x)dx = 1, \tag{0.6}$$

$$\frac{\partial K(x-y)}{\partial \nu_x} \leq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \tag{0.7}$$

Эти условия выполнены при выпуклой области Ω, если, например, $K(x) = \widetilde{K}(|x-y_0|)$, $y_0 \in \Omega$, $\widetilde{K}(s) \in C^2(\mathbb{R})$ [1].

В последние 15 лет появилось большое число исследований, посвященных изучению явлений агрегации в биологических системах. Был предложен ряд нелокальных моделей (см.[2–6] и имеющиеся там ссылки). Модели агрегации без диффузии изучались в работе [7].

В [8] приведен вывод одномерного уравнения агрегации, кроме того, для этого уравнения найдены стабильные состояния и изучены их свойства.

В настоящей публикации доказываются существование и единственность решений смешанной задачи для вырождающегося параболического уравнения с нелокальностью в виде свертки. Такое уравнение близко к моделям, которые были введены в работах [2; 6].

В [1] доказаны существование и единственность слабого решения смешанной задачи для уравнения

$$u_t - \triangle A(u) + \operatorname{div}(u\nabla K * u) = 0$$

с условиями (0.2), (0.3). В этой статье ядро K имеет вид $K(x) = K(|x|)$, область Ω выпукла и функция $A(s)$ удовлетворяет условию (0.5).

Отметим интересную работу [9], в которой изучается задача для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \operatorname{div}[\nabla u^m(x,t) - u(x,t)\nabla\phi(x,t)], \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 3, \quad m > 1, \\ -\triangle\phi(x,t) = u(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Здесь показано, что при $m = 2(n-1)/n$ существует критическое значение M_c массы $M = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx$ такое, что если $0 < M < M_c$, то решение существует глобально, а если $M > M_c$, то решение “взрывается” за конечное время.

В работе [10] для уравнения агрегации с диффузией изучаются вопросы, связанные с выяснением условий, при которых устанавливается равновесие между притяжением частиц, которое моделируется нелинейной диффузией, и отталкиванием в виде нелокального оператора свертки. Показано, что баланс между притяжением и отталкиванием приводит к радиально симметричным равновесным конфигурациям с компактным носителем при любой массе.

Доказано существование глобального минимизанта свободной энергии среди этих состояний равновесия. В двумерном случае с ньютоновским взаимодействием при $A(u) = u^m$ и любой массе доказаны единственность равновесного состояния с точностью до трансляций и сходимость решений уравнения агрегации к этому равновесному состоянию.

Стабилизация решений к равновесному состоянию для нелинейных параболических уравнений в неограниченных областях изучалась в исследовании [11].

1. Доказательство единственности решения

Всюду предполагается, что $u_0 \in L_\infty(\Omega)$ — неотрицательная функция.

Определение 1. Функция $u\colon D^T \to [0,\infty)$ называется слабым решением задачи (0.1)–(0.3), если $u \in L_\infty(D^T)$, $A(u) \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ и для всех пробных функций $\phi \in C^\infty(\overline{D^T})$ таких, что $\phi(x,T) = 0$, выполнено равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Big(-u\phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_j A(u)\partial_i\phi - u(\nabla K * u)\cdot\nabla\phi\Big)dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx. \tag{1.1}$$

Отметим, что поскольку $K \in C^2(\mathbb{R}^d)$, то $\nabla K * u(t) \in C^1(\mathbb{R}^d)$ при почти всех $t \in (0,T)$.

Определение 2. Будем говорить, что функции $u, u_1\colon D^T \to [0,\infty)$ являются итерационной парой, если $u, u_1 \in L_\infty(D^T)$, $A(u), A(u_1) \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$,

$$\int\limits_\Omega u(x,t)dx = \int\limits_\Omega u_1(x,t)dx = \int\limits_\Omega u_0(x)dx$$

для почти всех $t \in (0,T)$ и для всех пробных функций $\phi \in C^\infty(\overline{D^T})$ таких, что $\phi(x,T) = 0$, выполнено равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Big(-u\phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_j A(u)\partial_i\phi - u(\nabla K * u_1)\cdot\nabla\phi\Big)dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx. \tag{1.2}$$

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,t)$ — слабое решение задачи* (0.1)–(0.3). *Тогда при всех $\tau \in [0,T]$*

$$\int\limits_\Omega u(x,\tau)dx = \int\limits_\Omega u_0(x)dx.$$

Доказательство. Подставляя в (1.1) $\phi = \phi(t) \in C_0^\infty(0,T)$, получаем, что

$$\int\limits_0^T \phi'(t)\int\limits_\Omega u(x,t)dxdt = 0.$$

Это значит, что $\int_\Omega u(x,t)dx$ не зависит от t. Поэтому, чтобы завершить доказательство леммы, достаточно выбрать пробную функцию $\phi_\varepsilon = \eta\Big(\dfrac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)$, где $\eta(t) = \min(1, \max(0,-t))$, и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана.

Очевидно, что если $u(x,t)$ — слабое решение задачи (0.1)–(0.3), то пара функций $u, u_1 := u$ является итерационной парой.

Следующее утверждение будет использоваться в доказательстве существования и единственности решения.

Лемма 2. *Пусть* u, u_1 *и* v, v_1 *— две итерационные пары. Пусть* $A'(s) \geq \varepsilon > 0, \quad s \in \mathbb{R}$. *Тогда при малом* $\tau = \tau(\varepsilon)$

$$\|u - v\|_{L_2(D_0^\tau)} \leq q\|u_1 - v_1\|_{L_2(D_0^\tau)}, \quad q < 1, \quad D_0^\tau = \Omega \times (0, \tau).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в (1.2) $\phi \in C_0^\infty(D^T)$, устанавливаем, что в смысле обобщенных функций выполнено равенство

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j A(u)) + \operatorname{div}(u\nabla K * u_1) = 0.$$

Поскольку

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j A(u)) \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \nabla u \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ и } \nabla K * u_1 \in L_\infty(D^T),$$

то $u_t \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Поэтому $u, v \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Определим функцию $\varphi(x, t)$ при фиксированном $t \in (0, T)$ как решение задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j\varphi(x, t)\right) = u(x, t) - v(x, t), \quad x \in \Omega; \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\nu_i\partial_j\varphi = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Условием разрешимости этой задачи является ортогональность в $L_2(\Omega)$ правой части уравнения решениям однородного уравнения (см., например, [12, гл. III, § 6; 13, гл. II, теорема 5.2]). Решениями задачи для однородного уравнения являются только константы. По определению 2 имеем $\int_\Omega (u(x, t) - v(x, t))dx = 0$, т. е. условие разрешимости задачи выполнено. Можно считать при этом, что $\int_\Omega \varphi(x, t)dx = 0$. Поскольку $u - v \in L_\infty(D^T) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$, то $\varphi \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega))$ (см., например, [13, гл. II, теорема 5.1]). Тогда $\nabla\varphi \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Дифференцируя (1.3) по t, имеем (в слабом смысле)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j\varphi_t\right) = u_t - v_t \quad \text{в} \quad D^T, \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\nu_i\partial_j\varphi_t = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Тогда

$$-\int_0^\tau \langle u_t - v_t, \varphi\rangle dt = \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_i\varphi_t\partial_j\varphi dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_i\varphi\partial_j\varphi\Big|_0^\tau dx. \tag{1.4}$$

Отметим, что $u(x, 0) = v(x, 0) = u_0(x)$, поэтому $\varphi(x, 0) = 0$.

Запишем соотношение (1.2) для пары функций v, v_1 при условии $\phi(x, 0) = \phi(x, T) = 0$:

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(-v\phi_t + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_j A(v) \cdot \partial_i\phi - v(\nabla K * v_1) \cdot \nabla\phi\Big)dxdt = 0.$$

Вычитая из (1.2) последнее соотношение и интегрируя по частям в одном из слагаемых, будем иметь

$$-\int_0^T \langle u_t - v_t, \phi\rangle dt = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_j(A(u) - A(v))\partial_i\phi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \big((\nabla K * u_1)u - (\nabla K * v_1)v\big) \cdot \nabla\phi dxdt$$

Пусть $\chi(0 \le t \le \tau)$ — характеристическая функция отрезка $[0,\tau]$. Выбирая последовательность ϕ_m, сходящуюся к $\phi = \varphi\chi(0 \le t \le \tau)$ в пространстве $L_2(0,T;H^2(\Omega))$, после предельного перехода $m \to \infty$ получим с учетом (1.4)

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(x,\tau)\partial_j\phi(x,\tau)dx \le \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_j(A(u)-A(v))\partial_i\phi dxdt$$

$$-\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega ((\nabla K * u_1)u - (\nabla K * v_1)v)\cdot\nabla\phi dxdt = I_1 + I_2. \tag{1.5}$$

Поскольку $A(u)-A(v) \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ и функция A возрастает, то, пользуясь (1.3) и условием леммы, можно записать соотношение

$$I_1 = -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (A(u)-A(v))(u-v)dxdt \le -\varepsilon\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u-v)^2 dxdt.$$

Перепишем интеграл I_2 в виде

$$I_2 = -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i\phi)(\nabla K * u_1)\cdot\nabla\phi dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega v(\nabla K * (u_1 - v_1))\cdot\nabla\phi dxdt = I_3 + I_4.$$

Интегрируя по частям в первом слагаемом, получим

$$I_3 = \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{jl}K * u_1)\partial_l\phi dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial_l K * u_1)\partial^2_{lj}\phi dxdt = I_5 + I_6.$$

Применим формулу Гаусса — Остроградского к интегралу I_6 :

$$I_6 = -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d \partial_l(a_{ij}(x)\partial_i\phi)(\partial_l K * u_1)\partial_j\phi dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{ll}K * u_1)\partial_j\phi dxdt$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi\partial_j\phi(\partial_l K * u_1)\nu_l dSdt.$$

Из (0.7) следует, что

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi\partial_j\phi(\partial_l K * u_1)\nu_l dSdt \le 0,$$

поэтому

$$2I_6 \le -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d \partial_l(a_{ij}(x))\partial_i\phi(\partial_l K * u_1)\partial_j\phi dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{ll}K * u_1)\partial_j\phi dxdt = I_7 + I_8.$$

Всюду в дальнейшем C, C_i обозначают положительные постоянные.

Очевидно, что

$$\max|\partial^2_{jl}K * u_1| \le \|\partial^2_{jl}K\|_{L_\infty(\Omega+\Omega)}\|u_0\|_{L_1(\Omega)} \le C,$$

где $\Omega + \Omega = \{x - y \,|\, x, y \in \Omega\}$. Поэтому

$$I_5 = \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{jl}K * u_1)\partial_l\phi dxdt \le C\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Интеграл I_8 оценивается аналогично:

$$I_8 \le C \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

При оценке интеграла I_7 воспользуемся неравенствами $|\partial_l(a_{ij}(x))| \le C$, $i,j,l = 1,\dots,d$. Тогда

$$I_7 \le C \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Полученные оценки для I_5–I_8 подставим в I_3 :

$$I_3 \le C \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Далее, пусть ϕ_1 — решение задачи (1.3) с правой частью $u_1 - v_1$, т. е. $\sum_{i,j=1}^d \partial_i a_{ij}(x)\partial_j\phi_1 = u_1 - v_1$. Тогда

$$I_4 = -\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega v(x,t)\nabla\phi(x,t)\cdot \int\limits_\Omega \nabla K(x-y)(u_1(y,t)-v_1(y,t))dydxdt$$

$$= -\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega v \sum_{i,j,l=1}^n \partial_l\phi \int\limits_\Omega \partial^2_{lj}K(x-y)a_{ij}(y)\partial_i\phi_1(y,t)dydxdt = -\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d v\partial_l\phi(\partial^2_{lj}K * a_{ij}\partial_i\phi_1)dxdt.$$

Поэтому в силу неравенства Юнга для свёрток [14, гл. I, 4.3]

$$|I_4| \le \Gamma |v|_{L_\infty(D^T)} \sum_{i,j,l=1}^d \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left|(\partial^2_{lj}K * a_{ij}\partial_i\phi_1)\partial_l\phi\right| dxdt$$

$$\le C \sum_{i,j,l=1}^d \big\| \, |\partial^2_{lj}K| * |\partial_i\phi_1| \, \big\|_{L_2(D_0^\tau)} \|\partial_l\phi\|_{L_2(D_0^\tau)} \le C\|\nabla\phi_1\|_{L_2(D_0^\tau)}\|\nabla\phi\|_{L_2(D_0^\tau)}.$$

Полагая $\eta(\tau) = \|\nabla\phi\|_{D_0^\tau}$, $\eta(0) = 0$, из (0.4), (1.5) и предыдущих оценок получаем

$$\frac{\gamma}{2}\int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2(\tau)dx + \varepsilon \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega (u-v)^2 dxdt \le C(\eta_1(\tau)\eta(\tau) + \eta^2(\tau)). \tag{1.6}$$

Поскольку $(\eta^2(\tau))' = \int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2(\tau)dx$, то из (1.6) следует неравенство $\eta'(\tau) \le C\left(\eta_1(\tau) + \eta(\tau)\right)$, или, после интегрирования по τ, при малых τ имеем

$$\eta(\tau) \le C\left(\eta_1(\tau) + \eta(\tau)\right)\tau, \quad \eta(\tau) \le 2C\eta_1(\tau)\tau. \tag{1.7}$$

Из (1.3) при помощи неравенства Пуанкаре устанавливаем, что

$$\eta_1(\tau) \le C_\Omega \|u_1 - v_1\|_{L_2(D_0^\tau)}.$$

Поэтому из (1.6), (1.7) вытекает, что при достаточно малом τ выполнено неравенство

$$\varepsilon \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega (u-v)^2 dxdt \le C_1\tau \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega (u_1-v_1)^2 dxdt.$$

Лемма доказана.

Отметим, что (1.6) справедливо с $\varepsilon = 0$ и при ослабленном условии леммы $A'(s) \ge 0$.

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in L_\infty(\Omega)$ неотрицательно. Тогда существует не более одного решения задачи* (0.1)–(0.3).

Доказательство. Пусть u и v — решения задачи (0.1)–(0.3), тогда (u, u) и (v, v) являются итерационными парами. Применив неравенство (1.6) из доказательства леммы 2, получим, что

$$(\eta^2(\tau))' \le C_2\eta^2(\tau),$$

поскольку $\eta_1(t)$ совпадает с $\eta(t)$. Отсюда с помощью неравенства Гронуолла выводим, что $\eta(t) = 0$ для всех $0 \le t < T$. Поэтому $u \equiv v$. Теорема доказана.

2. Существование решения

Пусть $\varepsilon > 0$ и $a_\varepsilon(z)$ — гладкая четная функция такая, что

$$A'(z) + \varepsilon \le a_\varepsilon(z) \le A'(z) + 2\varepsilon \quad \text{при} \quad z \ge 0. \tag{2.1}$$

Положим

$$A_\varepsilon(z) = \int\limits_0^z a_\varepsilon(s)ds, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Продолжим коэффициенты a_{ij} вне Ω по формуле $a_{ij} = \gamma\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символы Кронекера. Пусть $a^\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon^{-d}a_{ij}(x) * \rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, ρ — ядро осреднения. Тогда справедливы неравенства

$$\gamma|y|^2 \le \sum_{i,j=1}^d a^\varepsilon_{ij}(x)y_iy_j \le \Gamma|y|^2.$$

В дальнейшем будем писать $\widetilde{A}(z)$ вместо $A_\varepsilon(z)$ и $\widetilde{a_{ij}}(x)$ вместо $a^\varepsilon_{ij}(x)$.

Пусть V — гладкое векторное поле на $\overline{D^T}$. Рассмотрим уравнение

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^d \partial_i \Big(\widetilde{a_{ij}}(x)\partial_j\widetilde{A}(u)\Big) + \mathrm{div}(uV) = 0 \tag{2.2}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=1}^d \Big(- \sum_{j=1}^d \widetilde{a_{ij}}(x)\partial_j\widetilde{A}(u) + uV_i\Big)\nu_i = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) — равномерно параболическое и квазилинейное с гладкими коэффициентами. Существование гладкого (класса $C^{2,1}(\overline{D^T})$) решения задачи (2.2), (0.2), (2.3) известно (см.[15, гл. 5, теорема 7.4]).

Лемма 3. *Пусть $u \in C^{2,1}(\overline{D^T})$ — решение задачи* (2.2), (0.2), (2.3) *с гладкой неотрицательной ограниченной начальной функцией u_0. Пусть $-\mathrm{div}V \le \mu$ в D^T, $\mu > 0$, и*

$$V \cdot \nu \le 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.4}$$

Тогда функция $u(x,t)$ неотрицательна в D^T и

$$\|u(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \le e^{\mu t}\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Доказательство. Умножим уравнение (2.6) на $w = \max(0, -u)$ и проинтегрируем по D_0^τ. Имеем с учетом краевого условия (2.3)

$$\int\limits_{D_0^\tau} \Big(wu_t + \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{a_{ij}}(x) \widetilde{A}'(u) \partial_j u \partial_i w - uV \cdot \nabla w \Big) dxdt = 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{D_0^\tau} \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{a_{ij}}(x) \widetilde{A}'(u) \partial_j u \partial_i w dxdt \le 0.$$

Пользуясь (2.4), запишем соотношения

$$-\int\limits_{D_0^\tau} uV \cdot \nabla w dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{D_0^\tau} V \cdot \nabla w^2 dxdt \le -\frac{1}{2} \int\limits_{D_0^\tau} w^2 \mathrm{div} V dxdt \le \frac{\mu}{2} \int\limits_{D_0^\tau} w^2 dxdt.$$

Поскольку $w(x, 0) = 0$, $wu_t = -ww_t$, то из (2.5) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x, \tau) dx \le \mu \int\limits_{D_0^\tau} w^2 dxdt.$$

По лемме Гронуолла получаем, что $w = 0$. Неотрицательность функции u доказана.

Покажем ограниченность решения. Сделав замену $u = ve^{\mu t}$ в уравнении (2.2) получим

$$\mu v + \partial_t v - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(\widetilde{a_{ij}}(x) e^{-\mu t} \partial_j \widetilde{A}(ve^{\mu t}) \right) + \mathrm{div}(vV) = 0. \tag{2.6}$$

Пусть $k = \max u_0(x)$. Свойства срезки $v^{(k)} = \max(0, v - k)$ хорошо известны (см., например, [16].) Умножим уравнение (2.6) на $v^{(k)}$ и проинтегрируем по D^T. Получим с учетом краевого условия (2.3)

$$\int\limits_{D^T} \Big[v^{(k)} v_t + \mu v v^{(k)} + \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{a_{ij}}(x) \widetilde{A}'(e^{\mu t} v) \partial_j v \partial_i v^{(k)} - vV \cdot \nabla v^{(k)} \Big] dxdt = 0. \tag{2.7}$$

Заметим, что $v^{(k)} v_t = v^{(k)} (v^{(k)} + k)_t = v^{(k)} v_t^{(k)}$, $v^{(k)}(0) = 0$, $v \nabla v^{(k)} = (v^{(k)} + k) \nabla v^{(k)} = \nabla ((v^{(k)})^2/2 + kv^{(k)})$. Поэтому

$$\int\limits_{D^T} vV \cdot \nabla v^{(k)} dxdt = \int\limits_{D^T} V \cdot \nabla \Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)} \Big) dxdt$$

$$= -\int\limits_{D^T} \Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)} \Big) \mathrm{div} V dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)} \Big) V \nu ds dt \le \mu \int\limits_{D^T} \Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)} \Big) dxdt.$$

Тогда из (2.7) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{(v^{(k)}(T))^2}{2} \Big) dx \le -\mu \int\limits_{D^T} \Big(vv^{(k)} - \frac{(v^{(k)})^2}{2} - kv^{(k)} \Big) dxdt \le 0.$$

Отсюда заключаем, что $v^{(k)} \equiv 0$, или $v \le k$. Лемма доказана.

Как и в лемме 1, устанавливается равенство

$$\int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx,$$

которое ниже будет использоваться без ссылок.

Доказательство следующего утверждения использует идею из работы [17, Lemma 1.8].

Лемма 4. *Пусть A удовлетворяет условию* (0.5). *Пусть $M > 0$ и $\delta > 0$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство неотрицательных функций из $L_\infty(\Omega)$ таких, что*

$$\|A(f)\|_{H^1(\Omega)} \le M \quad \text{и} \ \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \le M \quad \text{для любого} \quad f \in \mathcal{F}. \tag{2.8}$$

Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{M},\delta)$ обозначает множество пар функций $(f_1, f_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, для которых выполнено неравенство

$$\int_\Omega (A(f_2) - A(f_1))(f_2 - f_1)dx \le \delta.$$

Тогда

$$\omega_M(\delta) = \sup_{\mathcal{F}(\mathcal{M},\delta)} \|A(f_2) - A(f_1)\|_{L_1(\Omega)} \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует $k > 0$ и последовательность функций $f_{1,m}$, $f_{2,m}$ из $\mathcal{F}$ такая, что

$$\int_\Omega \big(A(f_{2,m}) - A(f_{1,m})\big)(f_{2,m} - f_{1,m})dx \le \frac{1}{m} \tag{2.9}$$

и при этом

$$\int_\Omega |A(f_{2,m}) - A(f_{1,m})|dx \ge k. \tag{2.10}$$

Из условий (2.8) вытекает, что из последовательностей $f_{1,m}$, $f_{2,m}$ можно выделить такие подпоследовательности (сохраняя за ними старые обозначения), что $A(f_{1,m}) \to A(f_1)$, $A(f_{2,m}) \to A(f_2)$ в $L_2(\Omega)$ при $m \to \infty$. Можно считать при этом, что $A(f_{1,m}) \to A(f_1)$ п.в. в Ω. Тогда из условия монотонности (0.5) функции A следует, что $f_{1,m} \to f_1$ и $f_{2,m} \to f_2$ п.в. в Ω. Поэтому, переходя к пределу в (2.9) по подходящей подпоследовательности, устанавливаем, что

$$\int_\Omega (A(f_2) - A(f_1))(f_2 - f_1)dx = 0.$$

В силу возрастания функции $A(r)$ отсюда выводим, что $f_1 = f_2$ п.в. в Ω. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (2.10), получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $u \in L_\infty(D^T)$ – гладкое решение задачи* (2.2), (0.2), (2.3). *Тогда существует постоянная C, зависящая только от γ, T, $\|V\|_{L_\infty(D^T)}$, $\|u\|_{L_\infty(D^T)}$, $\|u_0\|_{L_1(\Omega)}$ и $\widetilde{A}(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)})$, такая что*

$$\|\nabla \widetilde{A}(u)\|_{L_2(D^T)} \le C.$$

Умножим уравнение (2.2) на пробную функцию $\widetilde{A}(u)$ и проинтегрируем по D^T. После интегрирования по частям будем иметь

$$\int_{D^T} u_t \widetilde{A}(u)dxdt = -\int_{D^T} \sum_{i,j=1}^d \widetilde{a_{ij}}(x)\partial_i \widetilde{A}(u)\partial_j \widetilde{A}(u)dxdt + \int_{D^T} uV \cdot \nabla \widetilde{A}(u)dxdt.$$

Отметим, что

$$\int\limits_{D^T} uV\cdot\nabla\widetilde{A}(u)dxdt \le \gamma^{-1}\int\limits_{D^T} u^2|V|^2dxdt + \frac{\gamma}{4}\int\limits_{D^T}|\nabla\widetilde{A}(u)|^2dxdt.$$

Положим $F(z) = \int_0^z \widetilde{A}(s)ds$. Очевидно, что

$$F(u(x,0)) \le \int\limits_0^{u_0(x)} \widetilde{A}(\sup u_0)ds = \widetilde{A}(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)})u_0(x).$$

Пользуясь последним неравенством и очевидным равенством

$$\int\limits_\Omega \big(F(u(x,T)) - F(u(x,0))\big)dx = \int\limits_{D^T} u_t\widetilde{A}(u(x,t))dxdt,$$

получим

$$\frac{3}{4}\gamma\int\limits_{D^T}|\nabla\widetilde{A}(u)|^2dxdt \le \int\limits_\Omega F(u(x,0))dx + \gamma^{-1}\int\limits_{D^T}u^2|V|^2dxdt$$

$$\le \|u_0\|_{L_1(\Omega)}\widetilde{A}(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}) + \gamma^{-1}T\|V\|^2_{L_\infty(D^T)}\|u\|_{L_\infty(D^T)}\|u_0\|_{L_1(\Omega)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Отметим, что из последнего неравенства вытекает, что

$$uV \in L_2(D^T). \tag{2.11}$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $V\in L_\infty(D^T)$. Пусть A удовлетворяет условию* (0.5). *Пусть u — решение задачи* (2.2), (0.2), (2.3) *с начальной функцией из $L_\infty(\Omega)$.*

Тогда существует постоянная C, зависящая только от T, $\|uV\|_{L_2(D^T)}$ и $\|\nabla\widetilde{A}(u)\|_{L_2(D^T)}$ такая, что

$$\int\limits_0^{T-h}\int\limits_\Omega (u(x,t+h)-u(t,x))(\widetilde{A}(u(x,t+h)) - \widetilde{A}(u(t,x)))dxdt \le Ch$$

для всех $h\in[0,T/2]$.

Доказательство. При фиксированном $t\in(0,T-h)$, умножим уравнение (2.2) на функцию $v(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по $\tau\in(t,t+h)$, $x\in\Omega$:

$$\int\limits_\Omega \big(u(x,t+h)-u(t,x)\big)v(x)dx = -\int\limits_{D_t^{t+h}}\Big(\sum_{i,j=1}^d \widetilde{a_{ij}}(x)\partial_i\widetilde{A}(u)\partial_j v(x) - uV\cdot\nabla v\Big)dxd\tau$$

$$= -h\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^d(\widetilde{a_{ij}}\partial_i\widetilde{A})_h\partial_j v - (uV)_h\cdot\nabla v\Big)dx,$$

где f_h обозначает осреднение Стеклова $f_h(x,t) = \dfrac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} f(x,\tau)d\tau$. Подставим в эту формулу вместо $v(x)$ функцию $v(x) = \widetilde{A}(u(x,t+h)) - \widetilde{A}(u(x,t))$. Ясно, что это можно сделать при п.в. $t\in(0,T-h)$. После интегрирования по $t\in(0,T-h)$ получим

$$\int\limits_{D^{T-h}}(u(x,t+h)-u(x,t))\big(\widetilde{A}(u(x,t+h)) - \widetilde{A}(u(x,t))\big)dxd\tau$$

$$= -h \int\limits_{D^{T-h}} \Big(\sum_{i,j=1}^{d} \big((\widetilde{a_{ij}}\partial_i \widetilde{A})_h - (uV_j)_h\big)\partial_j\big(\widetilde{A}(u(x,t+h)) - \widetilde{A}(u(x,t))\big)\Big)dxdt$$

$$\le 2h\Gamma \left(\|\nabla \widetilde{A}_h\|_{L_2(D^{T-h})} + \|(uV)_h\|_{L_2(D^{T-h})}\right) \|\nabla \widetilde{A}\|_{L_2(D^T)}$$

$$\le 2h \left(\|\nabla \widetilde{A}\|_{L_2(D^T)} + \|uV\|_{L_2(D^T)}\right) \|\nabla \widetilde{A}\|_{L_2(D^T)} \le Ch.$$

В последнем неравенстве использовано условие леммы и (2.11). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству существования решения уравнения

$$\partial_t u_\varepsilon - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j(a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i A_\varepsilon(u_\varepsilon)) + \operatorname{div}(u_\varepsilon \nabla K * u_\varepsilon) = 0 \tag{2.12}$$

с начальным и краевым условиями (0.2), (0.3).

Теорема 2. *Пусть функция A удовлетворяет условию* (0.5), *а функция K — условиям* (0.6) *и* (0.7). *Пусть $\varepsilon > 0$ и u_0 — неотрицательная гладкая функция на $\overline{\Omega}$.*

Тогда задача (2.12), (0.2), (0.3) *имеет слабое решение u в D^T.*

Доказательство. Решение получим посредством итерационного процесса. В качестве начального приближения положим $u^1(x,t) = u_0(x)$ при всех $(x,t) \in D^T$. Пусть u^k при $k > 1$ является решением уравнения

$$u_t^k - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j(a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i A_\varepsilon(u^k)) + \operatorname{div}(u^k \nabla(K * u^{k-1})) = 0 \tag{2.13}$$

с начальной функцией $u^k(0,x) = u_0(x)$, вектором $V = \nabla(K * u^{k-1})$ и краевым условием (2.3).

По лемме 3 устанавливаем неотрицательность функций u^k и оценку

$$\|u^k\|_{L_\infty(D^T)} \le e^{M_k T}\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{2.14}$$

где $M_k = \|\triangle K * u_{k-1}(t)\|_{L_\infty(D^T)}$. При этом

$$M_k \le \sup_{t\in[0,T]} \|\triangle K\|_{L_\infty(\Omega+\Omega)}\|u_{k-1}(t)\|_{L_1(\Omega)} \le M.$$

Действуя, как при доказательстве леммы 1, устанавливаем равенства

$$\int\limits_\Omega u^k(x,t)dx = \int\limits_\Omega u_0(x)dx.$$

Применив лемму 2 для функций $u = u^{k+1}$, $v = u^k$, $u_1 = u^k$, $v_1 = u^{k-1}$, получим, что $\|u^{k+1} - u^k\|_{L_2(D_0^\tau)} \to 0$ при $k \to \infty$ как геометрическая прогрессия. Отсюда вытекает, что последовательность u^k имеет предел u в $L_2(D_0^\tau)$. Докажем, что этот предел является решением задачи (2.12), (0.2), (0.3) в цилиндре D_0^τ. Выбирая подпоследовательность, можно считать, что $u^k \to u$ п.в. в D_0^τ. Для функции u из (2.14) следует оценка $\|u\|_{L_\infty(D_0^\tau)} \le e^{M\tau}\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}$. Тогда из ограниченности производной $A'_\varepsilon(s)$ на конечном отрезке выводим также сходимость

$$A_\varepsilon(u^k) \to A_\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad L_2(D_0^\tau).$$

По лемме 5 устанавливаем слабую сходимость градиентов

$$\nabla A_\varepsilon(u^k) \rightharpoonup \nabla A_\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad L_2(D_0^\tau).$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\|\nabla K * u^{k-1} - \nabla K * u\|_{L_2(0,\tau,L_\infty(\Omega))} \le \|\nabla K\|_{L_2(\Omega+\Omega)} \|u^{k-1} - u\|_{L_2(D_0^\tau)}.$$

Поэтому

$$u^k \nabla K * u^{k-1} \to u \nabla K * u \quad \text{в} \ \ L_1(D_0^\tau).$$

Запишем для решения уравнения (2.13) интегральное соотношение

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big(- u^k \phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i A_\varepsilon(u^k) \partial_j \phi - u^k (\nabla K * u^{k-1}) \cdot \nabla \phi \Big) dx dt = \int\limits_\Omega u_0(x) \phi(x,0) dx.$$

В результате предельного перехода $k \to \infty$ будем иметь

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big(- u \phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i A_\varepsilon(u) \partial_j \phi - u (\nabla K * u) \cdot \nabla \phi \Big) dx dt = \int\limits_\Omega u_0(x) \phi(x,0) dx.$$

Тем самым существование решения доказано в достаточно малом цилиндре D_0^τ. Далее, взяв $\widetilde{u}_0(x) = u(\tau, x)$ в качестве нового начального условия, найдем решение в цилиндре $D_\tau^{\tau+2\tau}$. “Склеивая” построенные решения, найдем решение во всем цилиндре D^T. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть функция A удовлетворяет условию* (0.5)*, функция K удовлетворяет условиям* (0.6) *и* (0.7)*. Пусть u_0 — неотрицательная функция в $L_\infty(\Omega)$.*

Тогда задача (0.1)–(0.3) *имеет слабое решение в D^T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть u_0^ε — гладкие неотрицательные приближения для начальной функции u_0 такие, что $\|u_0^\varepsilon\|_{L_1(\Omega)} = \|u_0\|_{L_1(\Omega)}$, $\|u_0^\varepsilon\|_{L_\infty(\Omega)} \le 2\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}$ и $u_0^\varepsilon \to u_0$ в $L_p(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $p \in [1, \infty)$. По теореме 2 существует неотрицательное решение u_ε задачи (2.12), (0.2), (0.3) с начальной функцией u_0^ε. При этом справедливы равномерные по ε оценки норм

$$\|A_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u_\varepsilon\|_{L_\infty(D^T)} \le C. \tag{2.15}$$

Можно считать, что $\|A(u_\varepsilon)\|_{L_1(D^T)} \le M$. Из (2.15) и (2.1) следует, что

$$\|A(u_\varepsilon)\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \le M. \tag{2.16}$$

Поэтому найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что $A(u_{\varepsilon_n}) \rightharpoonup w$ (слабо) в $L_2(0,T;H^1(\Omega))$. В силу (2.15) можно считать также, что

$$A_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) \rightharpoonup w_1 \quad \text{(слабо) в} \ \ L_2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Отметим, что u_ε является слабым решением (2.2) с $V = \nabla K * u_\varepsilon$. Поскольку $(A_\varepsilon)'_s \ge A'_s$, то $A(s_1) - A(s_2) \le A_\varepsilon(s_1) - A_\varepsilon(s_2)$ при всех $\varepsilon > 0$ и $s_1 > s_2 \ge 0$, $x \in \Omega$. Поэтому из леммы 6 получаем, что

$$\int\limits_0^{T-h} \int\limits_\Omega \big(u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(x,t)\big)\big(A(u_\varepsilon(x,t+h)) - A(u_\varepsilon(x,t))\big) dx dt \le Ch \tag{2.17}$$

при всех $h \in [0, T/2]$. Для доказательства компактности в $L_1(D^T)$ семейства $\{z_\varepsilon = A(u_\varepsilon(x,t)\}$, воспользуемся критерием Рисса — Фреше — Колмогорова [18, Ch. IV, (26)]. Напомним два условия этого критерия.

У с л о в и е 1. При всех $\theta > 0$ существует $h_0 \in (0, \theta]$ такое, что при всех $\varepsilon > 0$ и $0 < h \le h_0$

$$\int\limits_0^{T-\theta} \int\limits_\Omega |z_\varepsilon(x, t+h) - z_\varepsilon(x,t)| dxdt \le \theta.$$

У с л о в и е 2. При любом единичном векторе e выполнено неравенство

$$\int\limits_0^{T} \int\limits_{\Omega^\theta} |z_\varepsilon(x+he, t) - z_\varepsilon(x,t)| dxdt \le \theta,$$

где $\Omega^\theta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \theta\}$.

Установим справедливость первого условия. Рассмотрим для $h \in (0, \theta)$ и $\lambda > 1$ следующее множество:

$$E_\lambda(h) = \Big\{ t \in [0, T-\theta] \colon \|z_\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega)} \le M\sqrt{\lambda},\ \|z_\varepsilon(t+h)\|_{H^1(\Omega)} \le M\sqrt{\lambda},$$

$$I(t) = \int\limits_\Omega \big(u_\varepsilon(x, t+h) - u_\varepsilon(x,t)\big)\big(z_\varepsilon(t+h) - z_\varepsilon(t)\big) dx < C\lambda h \Big\}.$$

Пусть $E^c_\lambda(h) = [0, T-\theta] \setminus E_\lambda(h)$. Отметим, что $|E^c_\lambda(h)| \le 3/\lambda$, поскольку каждое из неравенств не может нарушаться на множестве меры больше, чем $1/\lambda$. Действительно, из (2.16) имеем

$$M^2 \ge \int\limits_0^T \|z_\varepsilon(t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt \ge \int\limits_0^T M^2 \lambda \chi\Big(\|z_\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega)} > M\sqrt{\lambda}\Big) dt.$$

Аналогично из (2.17) следует, что

$$Ch \ge \int\limits_0^{T-h} I(t) dt \ge \int\limits_0^{T-h} Ch\lambda \chi\Big(I(t) > Ch\lambda\Big) dt.$$

Пусть $\omega_{M\sqrt{\lambda}}$ — функция из леммы 4, тогда ввиду (2.17) выводим

$$\int\limits_0^{T-\theta} \int\limits_\Omega \big|A(u_\varepsilon(x, t+h)) - A(u_\varepsilon(x,t))\big| dxdt \le T\omega_{M\sqrt{\lambda}}(C\lambda h) + 2M\frac{3}{\lambda}.$$

Положим $\lambda = \max\{12M/\theta, 1\}$. Выберем $h_0 > 0$ так, чтобы неравенство $T\omega_{M\sqrt{\lambda}}(C\lambda h_0) < \theta/2$ обеспечило выполнение условия 1.

Перейдем к условию 2. Отметим, что при $h \in (0, \theta)$

$$\int\limits_0^{T} \int\limits_{\Omega^\theta} |z_\varepsilon(x+he, t) - z_\varepsilon(x,t)| dxdt \le h \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega^\theta} |\nabla z_\varepsilon(x + she, t)| dxdtds \le Ch\|A(u_\varepsilon)\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))}.$$

Условие 2 будет выполнено, если взять h_0 достаточно малым. Итак, найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что

$$A(u_{\varepsilon_n}(x,t)) \to z \quad \text{в} \ \ L_1(D^T).$$

Тогда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.в. в D^T. В силу строгой монотонности функции A имеем сходимость u_{ε_n} п.в. в D^T. Это вместе с ограниченностью последовательности функций u_{ε_n} в D^T влечет сходимость $u_{\varepsilon_n} \to u$ в $L_p(D^T)$ при любом $p \geq 1$. Тогда $z = w = w_1 = A(u)$. Очевидна оценка

$$\|\nabla K * (u_{\varepsilon_n} - u)\|_{L_2(0,T,L_\infty(\Omega))} \leq C\|\nabla K\|_{L_\infty(\Omega+\Omega)}\|u_{\varepsilon_n} - u\|_{L_2(D^T)}.$$

Это дает сходимость

$$V_n = (\nabla K * u_{\varepsilon_n}) \to (\nabla K * u) \quad \text{в} \ L_2(D^T).$$

Следовательно, в формуле

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_{\varepsilon_n}\phi_t - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i A_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})\partial_j\phi + u_{\varepsilon_n}(\nabla K * u_{\varepsilon_n})\nabla\phi dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx$$

можно перейти к пределу и получить (1.1). Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bertozzi A., Slepcev D.** Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion // Comm. Pur. Appl. Anal. 2010. Vol. 6, no. 9. P. 1617–1637. doi:10.3934/cpaa.2010.9.1617.
2. **Boi S., Capasso V., Morale D.** Modeling the aggregative behavior of ants of the species polyergus rufescens // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2000. Vol. 1, no. 1. P. 163–176. doi: 10.1016/S0362-546X(99)00399-5.
3. Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals / R. Eftimie, G. Vries, M.A. Lewis, F. Lutscher // Bull. Math. Biol. 2007. Vol. 146, iss. 69. P. 1537–1565. doi: 10.1007/s11538-006-9175-8.
4. **Milewski P.A., Yang X.** A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing // Commun. Math. Sci. 2008. Vol. 6, no. 2. P. 397–416. doi:10.4310/CMS.2008.v6.n2.a7.
5. **Morale D., Capasso V., Oelschlager K.** An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations // J. Math. Biol. 2005. Vol. 50, no. 1. P. 49–66. doi:10.1007/s00285-004-0279-1.
6. **Topaz C.M., Bertozzi A.L., Lewis M.A.** A nonlocal continuum model for biological aggregation // Bull. Math. Biol. 2006. Vol. 68, no. 7. P. 1601–1623. doi:10.1007/s11538-006-9088-6.
7. **Topaz C.M.,Bertozzi A.L.** A swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups // SIAM J. Appl. Math. 2004. Vol. 65, no. 1. P. 152–174. doi:10.1137/S0036139903437424.
8. **Burger M., Fetecau R. C., Huang Y.** A Stationary states and asymptotic behavior of aggregation models with nonlinear local repulsion // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2014. Vol. 13, iss. 1. P. 397–424. doi:10.1137/130923786.
9. **Blanchet A., Carrillo J. A., Laurencot P.** Critical mass for a Patlak–Keller–Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions // Calc. Var. Partial Differential Equations. 2009. Vol. 35, no. 2. P. 133–168. doi:10.1007/s00526-008-0200-7.
10. Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics / J.A. Carrillo, S. Hittmeir, B. Volzone, Y. Yao. arXiv:1603.07767v1[math.ap]. 2016. 47 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1603.07767.pdf.
11. **Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х.** Существование и качественные свойства решения первой смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нестепенной нелинейностью // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 1. С. 3–44.
12. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
13. **Лионс Ж.-Л.,Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

14. **Stein E.M., Weiss G.** Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. 312 p.
15. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
16. **Гущин А.К.** Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения // Мат. сб. 1975. Т. 97, № 2 (6). С. 242–261.
17. **Alt H.W., Luckhaus S.** Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. 1983. Vol. 183, no. 3. P. 311–341.
18. **Brezis H.** Analyze functionally [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Paris, Masson, 1983. ISBN: 2225771987 .

Вильданова Венера Фидарисовна
кан. физ.-мат. наук, доцент
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы
e-mail: gilvenera@mail.ru

Поступила 16.03.2017

REFERENCES

1. Bertozzi A., Slepcev D. Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion. *Comm. Pur. Appl. Anal.*, 2010, vol. 6, no. 9, pp. 1617–1637. doi: 10.3934/cpaa.2010.9.1617 .
2. Boi S., Capasso V., Morale D. Modeling the aggregative behavior of ants of the species polyergus rufescens. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2000, vol. 1, no. 1, pp. 163–176. doi: 10.1016/S0362-546X(99)00399-5 .
3. Eftimie R., Vries G., Lewis M.A., Lutscher F. Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals. *Bull. Math. Biol.*, 2007, vol. 146, no. 69, pp. 1537–1565. doi: 10.1007/s11538-006-9175-8 .
4. Milewski P.A., Yang X. A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing. *Commun. Math. Sci.*, 2008, vol. 6, no. 2, pp. 397–416. doi: 10.4310/CMS.2008.v6.n2.a7 .
5. Morale D., Capasso V., Oelschlager K. An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations. *J. Math. Biol.*, 2005, vol. 50, no. 1, pp. 49–66. doi: 10.1007/s00285-004-0279-1 .
6. Topaz C.M., Bertozzi A.L., Lewis M.A. A nonlocal continuum model for biological aggregation. *Bull. Math. Biol.*, 2006, vol. 68, no. 7, pp. 1601–1623. doi: 10.1007/s11538-006-9088-6 .
7. Topaz C.M.,Bertozzi A.L. A swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups. *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, vol. 65, no. 1, pp. 152–174. doi: 10.1137/S0036139903437424 .
8. Burger M., Fetecau R. C., Huang Y. A Stationary States and Asymptotic Behavior of Aggregation Models with Nonlinear Local Repulsion. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2014, vol. 13, iss. 1, pp. 397–424. doi: 10.1137/130923786 .
9. Blanchet A., Carrillo J. A., Laurencot P. Critical mass for a Patlak- Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2009, vol. 35, no. 2, pp. 133–168. doi: 10.1007/s00526-008-0200-7 .
10. Carrillo J.A., Hittmeir S., Volzone B., Yao Y. Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics. *arXiv*:1603.07767v1[math.ap]. 2016. Available at: https://arxiv.org/pdf/1603.07767.pdf .
11. Andriyanova E.R., Mukminov F.Kh. Existence and qualitative properties of a solution of the first mixed problem for a parabolic equation with non-power-law double nonlinearity. *Mat. Sb.*, 2016, vol. 207, no. 1, pp. 3–44. doi: 10.4213/sm8484 .
12. Ladyzhenskaya O.A. Ural'tseva, N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 576 p.
13. Lions J.L., Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol.* 1. Paris, Dunod, 1968, 372 p. Translated to Russian under the title *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya.* Moscow, Mir Publ., 1971, 371 p.
14. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 069108078X .

15. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov, V.A. Ural'tseva, N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1968, Ser. Translations of Mathematical Monographs, 23, 648 p. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa.* Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p.
16. Guščin A.K. Some properties of a generalized solution of the second boundary-value problem for a parabolic equation. *Math. of the USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, no. 2, pp. 225–244. doi: 10.1070/SM1975v026n02ABEH002478 .
17. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 1983, vol. 183, pp. 311–341. doi: 10.1007/BF01176474 .
18. Brezis H. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications.* [Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise]. Paris, Masson, 1983, 233 p. ISBN: 2225771987 .

The paper was received by the Editorial Office on March 16, 2017.

Venera Fidarisovna Vildanova, Cand. Phys.-Math. Sci., Bashkir State Pedagogical University of M. Akmulla, Ufa, 450000 Russia, e-mail: gilvenera@mail.ru .