ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.5

# ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

**Г. Акишев**

В статье рассматривается $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — пространство Лоренца периодических функций $m$ переменных. Определено пространство Бесова функций с логарифмической гладкостью $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Основная цель статьи — найти точный порядок наилучшего приближения функций из класса $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ в различных соотношениях между параметрами $p,\tau,\theta$. Статья состоит из трех разделов. В первом разделе приведены некоторые известные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов и доказаны несколько вспомогательных утверждений. Во втором разделе установлены точные по порядку оценки наилучшего приближения функций из класса $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ в пространстве $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. В третьем разделе доказано неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов и установлено достаточное условие принадлежности функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в пространство $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < \tau_2 < \tau_1$ в терминах наилучшего приближения. В отличие от анизотропных пространств Лоренца это условие не зависит от количества переменных $m$. Получены точные по порядку оценки наилучшего приближения тригонометрическими полиномами функции класса Бесова $B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ в пространстве $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < \tau_2 < \tau_1$.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класса Бесова, наилучшее приближение, логарифмическая гладкость.

**G. Akishev. Estimates for best approximations of functions from the logarithmic smoothness class in the Lorentz space.**

The Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ of periodic functions of $m$ variables is considered. The Besov space $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ of functions with logarithmic smoothness is defined. The aim of the paper is to find the exact order of the best approximation of functions from the class $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ under different relations between the parameters $p$, $\tau$, and $\theta$. The paper consists of three sections. In the first section, known facts necessary for the proof of the main results are given and several auxiliary statements are proved. In the second section, order-exact estimates for the best approximation of functions from the class $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ are established in the space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. In the third section, an inequality for different metrics of trigonometric polynomials is proved and a sufficient condition for the belonging of a function $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ to the space $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ in terms of the best approximation is established in the case $1 < \tau_2 < \tau_1$. In contrast to anisotropic Lorentz spaces, the condition is independent of the number $m$ of the variables. Order-exact estimates for the best approximation of functions from the Besov class $B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ by trigonometric polynomials $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ are obtained in the case $1 < \tau_2 < \tau_1$.

Keywords: Lorentz space, Besov class, best approximation, logarithmic smoothness.

**MSC:** 41A10; 41A25; 42A10; 46E30; 46E35

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-3-21

## Введение

Пусть $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$, $\mathbb{I}^m = [0,1]^m$ и $p \in (1,\infty)$, $\tau \in [1,+\infty)$. Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют $2\pi$-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{p,\tau} = \left[\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t f^*(y)\,dy\right)^\tau t^{\tau(1/p-1)-1}\,dt\right]^{1/\tau} < +\infty$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и, частично, гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1, с. 228]).

Известно, что $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — банахово пространство и его норма $\|f\|^*_{p,\tau}$ эквивалентна величине (см. [1, с. 229])

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 (f^*(t))^\tau t^{\tau/p-1}\,dt\right)^{1/\tau}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le \tau < \infty.$$

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$.

Для заданного натурального числа $M$ рассмотрим множество $\square_M = \{\bar{k} = (k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon |k_j| < M,\ j = 1,\ldots,m\}$. Рассмотрим кратное ядро Дирихле

$$D_{\square_M}(2\pi\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\square_M} e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle}, \quad \bar{x}\in\mathbb{I}^m$$

и свертку функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$

$$\sigma_s(f,2\pi\bar{x}) = \int\limits_{I^m} f(2\pi\bar{y})\big(D_{\square_{2^s}}(2\pi\bar{x}-2\pi\bar{y}) - D_{\square_{2^{s-1}}}(2\pi\bar{x}-2\pi\bar{y})\big)d\bar{y},$$

где $s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

В пространстве непрерывных функций $C[0,2\pi]$ Б. С. Кашин и В. Н. Темляков [2] определили следующий класс:

$$LG^r = \big\{f \in C[0,2\pi] \colon \|\sigma_s(f)\|_\infty \le (s+1)^{-r},\ s = 0,1,\ldots\big\}, \quad r > 0.$$

В пространстве Лоренца рассмотрим аналогичный класс.

Пусть $1 \le \theta \le \infty$ и число $\alpha > 0$. Рассмотрим пространство всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f)\|^\theta_{p,\tau} < \infty.$$

Это пространство обозначается символом $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ и называется *пространством Никольского — Бесова логарифмической гладкости*. В этом пространстве рассмотрим единичный шар

$$\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta} = \Big\{f \in B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta} \colon \|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}} \le 1\Big\},$$

где норма

$$\|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}} = \|f\|_{p,\tau} + \left(\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f)\|^\theta_{p,\tau}\right)^{1/\theta}.$$

В случае $\tau = p$ пространство $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ определено в [3–5].

$E_M(f)_{p,\tau} \equiv E_{M,\ldots,M}(f)_{p,\tau} = \inf\limits_{T\in\mathfrak{F}_{\square_M}} \|f - T\|_{p,\tau}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ множеством $\mathfrak{F}_{\square_M}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $M-1$ по каждой переменной. Для заданного класса $F \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ положим $E_M(F)_{p,\tau} = \sup\limits_{f\in F} E_M(f)_{p,\tau}$.

В случае $\tau_1 = p,\ \tau_2 = q$ для класса Никольского — Бесова $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ точные по порядку оценки наилучшего приближения в пространстве $L_q(\mathbb{T}^m)$ установил А. С. Романюк [6]. В случае $\tau = p$ оценки аппроксимативных характеристик класса $\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ получил С. А. Стасюк [7; 8]. Обзор результатов по теории приближений функций многих классов Соболева, Никольского, Бесова дан в [9].

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1,\tau_2 < \infty$ и $L_{p,\theta_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$, если $1 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$.

Достаточное условие принадлежности функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в пространство $L_{q,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в терминах наилучшего приближения в случае $1 < p = \tau_1 < q < \infty$ найдено в [10], а в случае $q = p,\ 1 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$ для функции одной переменной в [11].

Основная цель статьи — найти точный порядок величины $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2}$ в различных соотношениях между параметрами $p, \tau_1, \tau_2, \theta$.

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе приведены некоторые известные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов, и доказано несколько вспомогательных утверждений. Во втором разделе установлены оценки величины $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2}$ в случае $\tau_1 = \tau_2$. Основным результатом этого раздела является теорема 2.1.

В третьем разделе установлены оценки величины $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2}$ в случае $\tau_2 < \tau_1$. Основной результат — теоремы 3.1–3.4.

Для теорем, лемм, формул использована двойная нумерация. В дальнейшем $a_+ = \max\{a, 0\}$ и запись $A(y) \asymp B(y)$ означают, что существуют положительные числа $C_1, C_2$, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$ такие, что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \ge C_1 A$ или $B \le C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно.

## 1. Вспомогательные утверждения

Следующее утверждение хорошо известно (см. [12]): *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *выполняется следующее соотношение*:

$$\|f\|_p \asymp \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p.$$

**Теорема 1.1.** *Пусть* $1 < p < \infty,\ 1 < \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *выполняется соотношение*

$$\|f\|_{p,\tau} \asymp \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p,\tau}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Рассмотрим оператор $P$:

$$P(f, 2\pi\bar{x}) = \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f, 2\pi\bar{x})|^2 \Big)^{1/2}, \quad \bar{x} \in \mathbb{I}^m.$$

Известно, что $P$ является сублинейным оператором. По утверждению, сформулированному в начале раздела, этот оператор ограниченно действует в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$. Поэтому в силу интерполяционной теоремы С. Янсона [13] этот оператор ограничен в пространстве $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$ т. е. $\|P(f)\|_{p,\tau} \le C_2(p,\tau)\|f\|_{p,\tau}$ для любой функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$.

Противоположное неравенство следует из принципа двойственности. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$. Тогда в силу ортогональности $\sigma_s(f, 2\pi\bar{x})$ имеем

$$\int_{\mathbb{I}^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x}.$$

Далее, применяя неравенства Гельдера для суммы и интеграла, получим

$$\Big| \int_{\mathbb{I}^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x})\, d\bar{x} \Big| \le \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p,\tau} \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(g)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p',\tau'}$$

для любой функции $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$. Следовательно, учитывая ограниченность оператора $P$, имеем

$$\|f\|_{p,\tau} \asymp \sup_{\|f\|_{p',\tau'}\le 1} \Bigl|\int\limits_{I^m} f(2\pi\bar{x})g(2\pi\bar{x})\,d\bar{x}\Bigr| \ll \Bigl\|\Bigl(\sum_{s=0}^{\infty}|\sigma_s(f)|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\|_{p,\tau}.$$

Теорема доказана. □

**Лемма 1.1.** *Пусть $1 < p < \infty,\ 1 < \tau \le 2$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ справедливо неравенство*

$$\Bigl\|\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\|_{p,\tau} \le C\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j\|_{p,\tau}^{\tau}\Bigr)^{1/\tau},$$

*где константа $C$ не зависит от $\varphi_j$ и $n$.*

**Лемма 1.2.** *Пусть $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ справедливо неравенство*

$$\Bigl\|\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\|_{p,\tau} \le C\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j\|_{p,\tau}^{2}\Bigr)^{1/2},$$

*где константа $C$ не зависит от $\varphi_j$ и $n$.*

Доказательства лемм 1.1 и 1.2 в многомерном случае аналогичны доказательствам лемм 4.2, 4.3 из [14] для одномерного случая в весовом пространстве Лоренца.

**Лемма 1.3.** *Пусть $1 < p < \infty,\ 1 < \tau \le 2$ или $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau} \ll \Bigl(\sum_{s=0}^{\infty}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}^{\tau_0}\Bigr)^{1/\tau_0},$$

*где $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Тогда по теореме 1.1 имеем

$$\Bigl\|\sum_{s=0}^{n}\sigma_s(f)\Bigr\|_{p,\tau} \ll \Bigl\|\Bigl(\sum_{s=0}^{n}|\sigma_s(f)|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\|_{p,\tau}.$$

Из этого неравенства в силу лемм 1.1 и 1.2 следует

$$\Bigl\|\sum_{s=0}^{n}\sigma_s(f)\Bigr\|_{p,\tau} \ll \Bigl(\sum_{s=0}^{\infty}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}^{\tau_0}\Bigr)^{1/\tau_0} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Известно, что ряд Фурье функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ сходится к ней по норме $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Поэтому в неравенстве (1.1) переходя к пределу при $n \to \infty$, получим утверждение леммы 1.3.

**Лемма 1.4.** *Пусть $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j\|_{p,\tau}^{\tau}\Bigr)^{1/\tau} \ll \Bigl\|\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\|_{p,\tau},$$

*где константа $C$ не зависит от $\varphi_j$ и $n$.*

Доказательство. Известно, что $(f^*)^\theta = (|f|^\theta)^*$ для числа $\theta > 0$. Поэтому

$$\Bigl\|\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\|_{p,\tau} = \Bigl[\int\limits_0^{2\pi}\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Bigr)^{*\,\tau/2}(t)t^{\tau/p-1}\,dt\Bigr]^{1/\tau}.$$

Так как $2<p<\infty,\ 2\le\tau<\infty$, то в силу ограниченности оператора Харди в пространстве $L_{p/2,\tau/2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1, с. 229]) отсюда получим

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau}\gg\Big\{\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{t}\int_0^t\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^*(u)\,du\Big]^{\tau/2}t^{\frac{\tau}{p}-1}\,dt\Big\}^{1/\tau}. \tag{1.2}$$

Известна формула

$$\int_0^t f^*(u)\,du=\sup_{E\subset\mathbb{I}^m,\ \mu E=t}\int_E|f(\bar{x})|\,d\bar{x},$$

где $\mu E$ — мера Лебега множества $E$.

В этой формуле, полагая $f=\sum_{j=1}^n|\varphi_j|^2$, имеем

$$\int_0^t\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^*(u)\,du=\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\varphi_j^{*^2}(u)\,du. \tag{1.3}$$

Теперь, учитывая, что функция $\varphi_j^*$ — невозрастающая функция и $\tau\ge2$, из неравенств (1.2) и (1.3) получим

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau}\gg\Big[\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\varphi_j^*(u)\,du\Big)^{\tau/2}t^{\tau/p-1}\,dt\Big]^{1/\tau}$$

$$\gg\Big[\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{*^2}(t)\Big)^{\tau/2}t^{\tau/p-1}\,dt\Big]^{1/\tau}\ge C\Big(\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{*^\tau}(t)t^{\tau/p-1}\,dt\Big)^{1/\tau}=C\Big(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

Лемма 1.4 доказана. □

**Лемма 1.5.** *Пусть $2<p<\infty,\ 2\le\tau<\infty$. Тогда для любой функции $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Big(\sum_{s=0}^{\infty}\|\sigma_s\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}\ll\|f\|_{p,\tau}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 1.1 и леммы 1.4.

## 2. Оценки наилучших приближений функций логарифмической гладкости

Теперь докажем один из основных результатов статьи — теорему 2.1. Для этого сформулируем вспомогательное утверждение, которое будет доказано в разд. 3.

**Лемма 2.1.** *Пусть $1<q<\lambda<\infty,\ 1<\tau<+\infty$. Если функция $f\in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$, то*

$$\|f\|_{q,\tau}\ge C\Big(\sum_{s=0}^{\infty}2^{sm(1/\lambda-1/q)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_p^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $1\le\theta\le\infty,\ 1<p<\infty,\ 1<\tau\le2$ или $2<p<\infty,\ 2\le\tau<\infty$, $\tau_0=\min\{\tau,2\}$. Если $\alpha>(1/\tau_0-1/\theta)_+$, то*

$$E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau}\asymp\big(\log(M+1)\big)^{-\alpha+(1/\tau_0-1/\theta)_+},$$

*где $a_+=\max\{a,0\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ и натуральное число $n$ такое, что $2^{n-1} \le M < 2^n$. Тогда по теореме 1.1 и лемме 1.3 имеем

$$E_M(f)_{p,\tau} \le E_{2^n}(f)_{p,\tau} \le \Big\| f - \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau}$$

$$= \Big\| \sum_{s=n}^{\infty} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau} \ll \Big\| \Big( \sum_{s=n}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}^{\tau_0} \Big)^{1/\tau_0}. \tag{2.1}$$

Если $\theta \le \tau_0$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [15, с. 125]), из (2.1) получим

$$E_{2^n}(f)_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}^{\theta} \Big)^{1/\theta} \le C(n+1)^{-\alpha}$$

для любой функции $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ в случае $\theta \le \tau_0$. Следовательно,

$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau} \ll (n+1)^{-\alpha} \tag{2.2}$$

в случае $\theta \le \tau_0$.

Пусть $\tau_0 < \theta$. Тогда, применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/\tau_0 > 1,\ 1/\beta + 1/\beta' = 1$) из (2.1), имеем

$$E_{2^n}(f)_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=n}^{\infty} (s+1)^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}^{\theta} \Big)^{1/\theta} \Big( \sum_{s=n}^{\infty} (s+1)^{-\alpha\tau_0\beta'} \Big)^{1/(\tau_0\beta')} \ll (n+1)^{-\alpha+1/\tau_0-1/\theta}.$$

Следовательно,

$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau} \ll (n+1)^{-\alpha+1/\tau_0-1/\theta}, \tag{2.3}$$

в случае $\tau_0 < \theta$. Так как $2^{n-1} \le M < 2^n$, то из (2.2), (2.3) вытекают оценки сверху.

Докажем оценки снизу. Пусть $\tau_0 < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_0(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-1/\theta} \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{-\alpha} 2^{-sm(1-1/p)} \sum_{\bar{k} \in \square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x} \rangle}, \quad \bar{x} \in \mathbb{I}^m, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

В силу оценки нормы ядра Дирихле в пространстве Лоренца имеем

$$\Big\| \sum_{\bar{k} \in \square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x} \rangle} \Big\|_{p,\tau} \asymp 2^{nm(1-1/p)}, \quad 1 < p, \quad \tau < \infty. \tag{2.4}$$

Поэтому

$$\Big( \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f_0)\|_{p,\tau}^{\theta} \Big)^{1/\theta} = \Big( \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f_0)\|_{p,\tau}^{\theta} \Big)^{1/\theta} \le C_0.$$

Таким образом, функция $C_0^{-1} f_0 \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ для $1 < p, \tau < \infty,\ 1 \le \theta < \infty$.

Пусть $2 \le p < \infty,\ 1 < \tau \le 2$, т.е. $\tau_0 = \tau$. Выберем число $q \in (p, \infty)$. Теперь лемму 2.1 применяем к функции $C_0^{-1} f_0 \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Тогда, учитывая оценку нормы ядра Дирихле (соотношение (2.4) при $p = \tau = \lambda$), получим

$$E_{2^n}(C_0^{-1} f_0)_{p,\tau} = C_0^{-1} \|f_0\|_{p,\tau} \gg \Big( \sum_{s=n+1}^{2n} 2^{sm(1/q-1/p)\tau} \|\sigma_s(f_0)\|_{q,\tau_2}^{\tau} \Big)^{1/\tau}$$

$$\gg (n+1)^{-1/\theta} \Big( \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{-\alpha\tau} \Big)^{1/\tau} \ge C(n+1)^{-\alpha+1/\tau-1/\theta}.$$

Таким образом,

$$E_{2^n}(C_0^{-1}f_0)_{p,\tau} \gg (n+1)^{-\alpha+1/\tau-1/\theta}$$

при $1<p<\infty,\ 1<\tau<\infty$. Следовательно,

$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau} \gg (n+1)^{-\alpha+1/\tau-1/\theta} \tag{2.5}$$

при $1<p<\infty,\ 1<\tau<\infty$. Это неравенство показывает точность оценки в теореме 2.1 при $1<\tau\le 2$, $\tau_0=\min\{\tau,2\}<\theta$, $1<p<\infty$.

Докажем оценку снизу в случае $2<p<\infty,\ 2\le\tau<\infty$. Рассмотрим функцию

$$f_1(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-1/\theta}\sum_{s=n+1}^{2n}(s+1)^{-\alpha}2^{-sm/2}\prod_{j=1}^{m}R_s(x_j),$$

где $R_s(x_j)=\sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1}\varepsilon_k e^{ik2\pi x}$ — полином Рудина — Шапиро и $\varepsilon_k=\pm1$. Известно, что $\|R_s\|_\infty \ll 2^{s/2}$. Поэтому

$$\|\sigma_s(f_1)\|_{p,\tau} = (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha}2^{-sm/2}\Big\|\prod_{j=1}^{m}R_s(x_j)\Big\|_{p,\tau}$$

$$\le (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha}2^{-sm/2}\prod_{j=1}^{m}\|R_s(x_j)\|_\infty \ll (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Big(\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_1)\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} = \Big(\sum_{s=n+1}^{2n}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_1)\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \le C_1,$$

т.е. функция $C_1^{-1}f_1 \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Так как $2<p<\infty,\ 2\le\tau<\infty$, то $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)\subset L_2(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_2\le C\|f\|_{p,\tau},\ f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Поэтому, учитывая равенство Парсеваля, получим

$$E_{2^n}(C_1^{-1}f_1)_{p,\tau} = C_1^{-1}\|f\|_{p,\tau} \gg \|f_1\|_2 \gg (n+1)^{-1/\theta}\Big(\sum_{s=n+1}^{2n}(s+1)^{-2\alpha}\Big)^{1/2} \gg (n+1)^{-\alpha+1/2-1/\theta} \tag{2.6}$$

при $2<\tau,\ p<\infty$.

Теперь докажем оценку снизу в случае $\theta\le\tau_0$. Рассмотрим функцию

$$f_2(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-\alpha}2^{-nm(1-1/p)}\sum_{\bar{k}\in\square_{2^{n+1}}\setminus\square_{2^n}} e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle},\quad \bar{x}\in\mathbb{I}^m,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Тогда в силу (2.4) имеем

$$\Big(\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_n)\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} = 2^{-nm(1-1/p)}\Big\|\sum_{\bar{k}\in\square_{2^{n+1}}\setminus\square_{2^n}} e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle}\Big\|_{p,\tau} \le C_1.$$

Следовательно, функция $C_2^{-1}f_2\in\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Теперь, пользуясь соотношением (2.4), будем иметь $E_{2^n}(C_2^{-1}f_2)_{p,\tau} = \|C_2^{-1}f_2\|_{p,\tau}\gg(n+1)^{-\alpha}$. Отсюда

$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau} \gg (n+1)^{-\alpha} \tag{2.7}$$

в случае $\theta\le\tau_0$ для $1<p<\infty,\ 1<\tau<\infty$. Так как по выбору $2^{n-1}\le M<2^n$, то из (2.5)–(2.7) следует, что $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau}\gg(\log(M+1))^{-\alpha+(1/\tau_0-1/\theta)_+}$ для $1<p<\infty,\ 1<\tau\le2$ или $2<p<\infty,\ 2<\tau<\infty$, $1\le\theta<\infty$. Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 1. В случае $\tau=p$ из теоремы 2.1 следует результат С. А. Стасюка [7].

## 3. Оценки порядка приближений функций логарифмической гладкости в пространстве Лоренца в разных метриках

Рассмотрим кратный тригонометрический полином

$$T_{\bar{n}}(\bar{x}) = T_{n_1,\dots,n_m}(\bar{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k},\bar{x}\rangle},$$

где $n_j \in \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и $j = 1,\dots,m$.

Для пространства Лоренца известно, что $L_{p,q_1}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,q_2}(\mathbb{T}^m)$, если $q_1 < q_2,\ 1 < p < \infty$.

В этом случае неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в одномерном случае доказала Л. А. Шерстнева [11, лемма 10]. Докажем многомерный вариант ее результата [11, лемма 10 при $\psi(t) = t^{1/p}$].

**Лемма 3.1.** *Пусть* $1 < q_1 < q_2 < \infty$, $1 < p < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $T_{\bar{n}}$ *имеет место неравенство*

$$\|T_{\bar{n}}\|_{p,q_1} \ll \Big(\ln \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1)\Big)^{1/q_1 - 1/q_2} \|T_{\bar{n}}\|_{p,q_2}.$$

Доказательство. Так как для пространства $L_{p,q_2}(\mathbb{T}^m)$ фундаментальная функция $\varphi(t) = t^{1/p}$, то по лемме 5 из [16] справедливо неравенство

$$\|T_{\bar{n}}\|_\infty = \max_{\bar{x}\in\mathbb{T}^m} |T_{\bar{n}}(\bar{x})| \ll \Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{1/p} \|T_{\bar{n}}\|_{p,q_2}. \tag{3.1}$$

Пусть числа $\nu_j \in \mathbb{N}$ такие, что $2^{\nu_j - 1} \le n_j < 2^{\nu_j}$, $j = 1,\dots,m$. Введем обозначение $V = \sum_{j=1}^{m} \nu_j$. Тогда

$$\|T_{\bar{n}}\|_{p,q_1}^{q_1} = \int\limits_0^1 (T_{\bar{n}}(t))^{q_1} t^{q_1/p-1}\, dt = \int\limits_0^{2^{-V}} (T_{\bar{n}}(t))^{q_1} t^{q_1/p-1}\, dt + \int\limits_{2^{-V}}^1 (T_{\bar{n}}(t))^{q_1} t^{q_1/p-1}\, dt = I_1 + I_2. \tag{3.2}$$

Оценим $I_2$. Так как $\theta = q_2/q_1 > 1$, $\theta' = \theta/(\theta-1)$, то, применяя неравенство Гельдера, получим

$$I_2 = \int\limits_{2^{-V}}^1 (T_{\bar{n}}(t))^{q_1} t^{q_1/p - 1/\theta} t^{-1/\theta'}\, dt$$

$$= \Big(\int\limits_{2^{-V}}^1 (T_{\bar{n}}(t))^{q_2} t^{q_2/p-1}\, dt\Big)^{q_1/q_2} \Big(\int\limits_{2^{-V}}^1 t^{-1}\Big)^{1/\theta'} \le \|T_{\bar{n}}\|_{p,q_2}^{q_1} \big(\ln 2^V\big)^{1/\theta'}. \tag{3.3}$$

По выбору $2^{\nu_j-1} \le n_j,\ j = 1,\dots,m$, следовательно, $\nu_j \le 1 + \log n_j,\ j = 1,\dots,m$. Поэтому из неравенства (3.3) вытекает

$$I_2 \le (\ln 2)^{1-q_1/q_2} \Big(\log\Big(1 + \prod_{j=1}^{m} n_j\Big)\Big)^{1-q_1/q_2} \|T_{\bar{n}}\|_{p,q_2}^{q_1}. \tag{3.4}$$

Оценим $I_1$. По свойству невозрастающей перестановки функции

$$T_{\bar{n}}^*(t) \le \frac{1}{t} \int\limits_0^t T_{\bar{n}}^*(u)\, du = \frac{1}{t} \sup_{|e|=t} \int\limits_e |T_{\bar{n}}(\bar{x})|\, d\bar{x} \le \|T_{\bar{n}}\|_\infty,$$

в силу этого имеем

$$I_1 \le \|T_{\bar n}\|_\infty^{q_1} \int\limits_{2^{-V}}^{1} t^{q_1/p-1}\,dt = \frac{p}{q_1}\|T_{\bar n}\|_\infty^{q_1} 2^{-Vq_1/p}.$$

Далее, пользуясь неравенством (3.1) и учитывая, что $n_j \le 2^{\nu_j}$, $j=1,\dots,m$, из (3.3) получим

$$I_1 \ll \Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{q_1/p}\|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1} 2^{-Vq_1/p}$$

$$\ll \Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{q_1/p}\|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1}\Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{-q_1/p} \ll 2^{mq_1/p}\|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1}. \qquad (3.5)$$

Теперь из неравенств (3.2), (3.4) и (3.5) вытекает, что

$$\|T_{\bar n}\|_{p,q_1} \ll \Bigg[\bigg(\log\Big(1+\prod_{j=1}^m n_j\Big)\bigg)^{1/q_1-1/q_2}+1\Bigg]\|T_{\bar n}\|_{p,q_2} \ll \Bigg[\bigg(\log\prod_{j=1}^m (n_j+1)\bigg)\Bigg]^{1/q_1-1/q_2}\|T_{\bar n}\|_{p,q_2}.$$

Лемма доказана. □

**Следствие.** *Пусть* $1<p<\infty$, $1<q_1<q_2<\infty$. *Тогда для любого числа* $n\in\mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{T_{n,\dots,n}} \frac{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \asymp \big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $n_1=\dots=n_m=n$, то по лемме 3.1 имеем

$$\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1} \le Cm^{1/q_1-1/q_2}\big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}. \qquad (3.6)$$

Следовательно,

$$\sup_{T_{n,\dots,n}} \frac{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \ll \big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Для доказательства обратной оценки рассмотрим полином

$$D_{n,\dots,n}(2\pi\bar x) = \prod_{j=2}^m e^{in2\pi x_j}\sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}$$

порядка $n$ по каждой переменной. Так как $|e^{in2\pi x}|=1$, то

$$|D_{n,\dots,n}(2\pi\bar x)| = \Big|\sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}\Big|$$

для всех $\bar x\in\mathbb{I}^m$. Таким образом,

$$\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q} = \|D^*_{n,\dots,n}\|_{p,q} = \Big\|\sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}\Big\|_{p,q} \qquad (3.7)$$

для $1<p<\infty$, $1<q<\infty$. Л. А. Шерстневой [11, лемма 11 при $\psi(t)=t^{1/p}$] доказано соотношение

$$\Big\|\sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}\Big\|_{p,q} \asymp \big(\ln(n+1)\big)^{1/q}, \quad 0<q<\infty.$$

Поэтому из равенства (3.7) следует, что

$$\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q} \asymp \big(\ln(n+1)\big)^{1/q}, \quad 0<q<\infty.$$

Теперь, пользуясь этим соотношением, будем иметь

$$\sup_{T_{n,\dots,n}} \frac{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \geq \frac{\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \gg \big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Следствие доказано. □

З а м е ч а н и е 2. Это следствие показывает точность оценки в лемме 3.1 при $n_1=\dots=n_m=n$. Отметим, что при $m=1$ аналог следствия для обобщенного пространства Лоренца доказан Л. А. Шерстневой [11, лемма 10] и неравенство (3.6) приведено в [17, теорема 3.3].

**Лемма 3.2.** *Пусть $1<p<\infty$, $1<\tau_2<\tau_1<+\infty$ и $\{u_n\}$ — последовательность $2\pi$-периодических, неотрицательных измеримых на кубе $\mathbb{T}^m=[0,2\pi]^m$ функций, удовлетворяющих условиям*

1) $\|u_n\|_{p,\tau_1}\leq \lambda_n,\ \lambda_{n+1}\leq \beta\lambda_n,\ \beta\in(0,1),\ n\in\mathbb{N}$;

2) *существует последовательность положительных чисел $\{\Delta_n\}$ такая, что для любого $\theta\in(0,\tau_1)$ имеет место неравенство $\|u_n\|_{p,\theta}\ll \Delta_n^{1/\theta-1/\tau_1}\lambda_n$, $n=1,2,3,\dots$. Тогда если $f(\bar{x})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\bar{x})$, то*

$$\|f\|_{p,\tau_2}\ll\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\lambda_n^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Эта лемма доказывается как в одномерном случае повторением рассуждений леммы 13 из [11].

**Теорема 3.1.** *Пусть $1<p<\infty$, $1<\tau_2<\tau_1<\infty$. Если $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ и*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E^{\tau_2}_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}<+\infty, \tag{3.8}$$

*то $f\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ и*

$$\|f\|_{p,\tau_2}\ll\Bigg[\|f\|_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E^{\tau_2}_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}\Bigg], \tag{3.9}$$

$$E_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_2}\ll\Bigg[(\ln(n+1))^{1/\tau_2-1/\tau_1}E_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^{\tau_2/\tau_1}}E^{\tau_2}_{k,\dots,k}(f)_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}\Bigg]. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. Введем обозначение $E_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}\equiv\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{N}$. Так как $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to+\infty$, то существует последовательность номеров $\{n_\nu\}$ такая, что

$$\varepsilon_{n_{\nu+1}}<1/2\,\varepsilon_{n_\nu},\quad \varepsilon_{n_{\nu+1}-1}\geq 1/2\,\varepsilon_{n_\nu},\quad \nu=1,2,\dots. \tag{3.11}$$

Поскольку $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to+\infty$ и по выбору номера $n_{\nu+1}$, $\varepsilon_{n_{\nu+1}-1}\geq 1/2\varepsilon_{n_\nu}$, то

$$\sum_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}\varepsilon_n^{\tau_2}\geq\varepsilon^{\tau_2}_{n_{\nu+1}-1}\sum_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}$$

$$\geq 2^{-\tau_2}\varepsilon^{\tau_2}_{n_\nu}\int_{n_\nu}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{x(\ln x)^{\tau_2/\tau_1}}\,dx=\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}2^{-\tau_2}\varepsilon^{\tau_2}_{n_\nu}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1}-(\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big].$$

Таким образом,

$$\sum_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}\varepsilon_n^{\tau_2}\ge\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}2^{-\tau_2}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1}-(\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big]$$

для $\nu=2,3,\dots$. Следовательно,

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1}-(\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big]\le 2^{\tau_2}\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}\varepsilon_n^{\tau_2}.$$

Поэтому в силу условия (3.8) ряд

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1}-(\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big]<\infty. \tag{3.12}$$

Применяя преобразование Абеля и (3.11), будем иметь

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1}\ll\Big[(\ln n_2)^{1-\tau_2/\tau_1}\varepsilon_{n_1}^{\tau_2}+\sum_{\nu=2}^{\infty}\Big((\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1}-(\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big)\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big]. \tag{3.13}$$

Пусть $T_{n,\dots,n}(f,\bar x)\equiv T_n(f,\bar x)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции $f\in L_{p,\,\tau_1}(\mathbb{T}^m),\ 1<p,\tau_1<+\infty$. Рассмотрим ряд

$$T_{n_1}(f,\bar x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\big(T_{n_{\nu+1}}(f,\bar x)-T_{n_\nu}(f,\bar x)\big). \tag{3.14}$$

Докажем, что этот ряд сходится по норме пространства $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$. Положим $u_\nu(\bar x)=|T_{n_{\nu+1}}(f,\bar x)-T_{n_\nu}(f,\bar x)|,\ \nu=1,2,\dots$. Тогда $\|u_\nu\|_{p,\tau_1}\le 2\varepsilon_{n_\nu},\ \nu=1,2,\dots,$ и по лемме 3.1 $\|u_\nu\|_{p,\theta}\le C(\ln n_{\nu+1})^{1/\theta-1/\tau_1}\varepsilon_{n_\nu},\ \nu=1,2,\dots,$ для любого $\theta\in(0,\tau_1)$. Следовательно, по лемме 3.2 получим

$$\Big\|\sum_{\nu=s+1}^{l}\big(T_{n_{\nu+1}}(f)-T_{n_\nu}(f)\big)\Big\|_{p,\tau_2}\le\Big\|\sum_{\nu=s+1}^{l}u_\nu\Big\|_{p,\tau_2}\ll\Big(\sum_{\nu=s+1}^{l}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2} \tag{3.15}$$

для $l\in\mathbb{N},\ l>s=0,1,2,\dots$.

В силу (3.12) и (3.13) из (3.15) вытекает, что последовательность $\{T_{n_\nu}(f)\}\subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ фундаментальна в пространстве $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$. Таким образом, в силу полноты пространства $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ существует функция $g\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ такая, что $\|g-T_{n_\nu}(f)\|_{p,\tau_2}\to 0$ при $\nu\to+\infty$, т. е. ряд (3.14) сходится. Этот же ряд сходится к функции $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. Поэтому $g(\bar x)=f(\bar x)$ почти всюду. Следовательно, $f\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Теперь в неравенстве (3.15), полагая $s=0$, будем иметь

$$\big\|T_{n_{l+1}}(f)-T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_2}\ll\Big(\sum_{\nu=1}^{l}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Тогда по свойству нормы и лемме 3.1 выводим

$$\big\|T_{n_{l+1}}(f)\big\|_{p,\tau_2}\le\big\|T_{n_{l+1}}(f)-T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_2}+\big\|T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_2}$$

$$\ll\Big[(\ln 2)^{1/\tau_2-1/\tau_1}\big\|T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{\nu=1}^{l}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]$$

$$\ll \Big[\|f\|_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]$$

для любого $l\in\mathbb{N}$. В этом неравенстве, переходя к пределу при $l\to+\infty$, получим

$$\|f\|_{p,\tau_2}\ll\Big[\|f\|_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]. \tag{3.16}$$

Из неравенств (3.13), (3.16) следует, что

$$\|f\|_{p,\tau_2}\ll\Big[\|f\|_{p,\tau_1}+\Big((\ln n_2)^{1-\tau_2/\tau_1}E_{n_1}(f)_{p,\tau_1}^{\tau_2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E_n(f)_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]$$

$$\ll\Big[\|f\|_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E_n(f)_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big].$$

Неравенство (3.9) доказано.

Теперь, применяя это неравенство к функции $f-T_n(f)\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$, нетрудно доказать оценку (3.10). Теорема доказана. □

**Теорема 3.2.** *Пусть* $1<p<\infty$, $1<\tau_2<\tau_1\le 2$ *или* $2\le p<\infty$, $1<\tau_2\le 2<\tau_1<\infty$. *Если* $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}<\infty,$$

*то* $f\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau_2}\ll\Big[\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big]^{1/\tau_2}.$$

Доказательство. Пусть $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. С учетом монотонности наилучшего приближения и свойства нормы нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n}E_{n,\ldots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1}\le C\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}E_{2^{2^\nu},\ldots,2^{2^\nu}}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1}$$

$$\ll\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big\|\sum_{l=\nu}^{\infty}\sum_{s=2^l+1}^{2^{l+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\ll\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big(\sum_{l=\nu}^{\infty}\Big\|\sum_{s=2^l+1}^{2^{l+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}\Big)^{\tau_2}. \tag{3.17}$$

Так как $\tau_2<\tau_1$, то

$$\sum_{\nu=0}^{n}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\le C2^{n(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Исходя из этого в силу леммы 2.2 в [18] из (3.17) имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n}E_{n,\ldots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1}\ll\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big\|\sum_{s=2^\nu}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \tag{3.18}$$

Если $1<p<\infty$, $1<\tau_1\le 2$, то по лемме 1.3

$$\Big\|\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}\ll\Big(\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_1}\Big)^{1/\tau_1}.$$

Поэтому, учитывая, что $\tau_2 < \tau_1$, и, применяя неравенство Йенсена (см. [15, с. 125]), получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \Big\| \sum_{s=2^\nu}^{2^{\nu+1}} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \Big( \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_1} \Big)^{\tau_2/\tau_1}$$

$$\ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \sum_{s=2^\nu}^{2^{\nu+1}} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \tag{3.19}$$

Соответственно из неравенства (3.18) следует, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n} E_{n,\dots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1} \ll \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \tag{3.20}$$

в случае $1 < p < \infty$, $1 < \tau_1 \le 2$.

Пусть $2 \le p < \infty$, $2 \le \tau_1 < \infty$. Тогда согласно лемме 1.3

$$\Big\| \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau_1} \ll \Big( \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{2} \Big)^{1/2}.$$

Поэтому, учитывая, что $\tau_2 \le 2$, и, применяя неравенство Йенсена, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \Big\| \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \Big( \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{2} \Big)^{\tau_2/2}$$

$$\ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \tag{3.21}$$

Таким образом, из формулы (3.18) будем иметь

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n} E_{n,\dots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1} \ll \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \tag{3.22}$$

в случае $2 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \le 2 \le \tau_1 < \infty$.

Теперь в силу неравенств (3.20) и (3.22) выполняется условие (3.8) теоремы 3.1. Следовательно, функция $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Докажем оценку нормы $\|f\|_{p,\tau_2}$. По свойству нормы и в силу неравенства Гельдера

$$\|f\|_{p,\tau_1} \le \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big\| \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau_2} \ll \Big( \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \Big\| \sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \Big)^{1/\tau_2}.$$

Теперь, пользуясь неравенствами (3.19) и (3.21), отсюда получим

$$\|f\|_{p,\tau_1} \ll \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \Big)^{1/\tau_2}. \tag{3.23}$$

Из формул (3.20)–(3.23) следует, что

$$\|f\|_{p,\tau_2} \ll \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \Big)^{1/\tau_2}.$$

Теорема доказана. $\square$

**Теорема 3.3.** *Пусть $1 < p < \infty$, $2 \le \tau < \infty$ или $1 < p < 2$, $1 < \tau \le 2$. Если $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и $\lambda \in (1, \tau)$, то имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau} \gg \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau - 1/\lambda)\tau} \|\sigma_s(f)\|_{p,\lambda}^{\tau} \Big)^{1/\tau}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p, \tau < +\infty$. Поэтому

$$\|f\|_{p,\tau} \ge \sup_{\|g\|_{p',\tau'} \le 1} \int_{\mathbb{I}^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x})\, d\bar{x}, \qquad (3.24)$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$. Пусть $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$ и

$$g(2\pi\bar{x}) \sim \sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(g) e^{i\langle \overline{n}, 2\pi\overline{x}\rangle}.$$

Тогда из формулы (3.24) в силу ортогональности $\{\sigma_s(f, 2\pi\bar{x})\}$ имеем

$$\|f\|_{p,\tau} \ge \sup_{\|g\|_{p',\tau'} \le 1} \int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x}. \qquad (3.25)$$

Рассмотрим множество $G_{p',\lambda'}(\varepsilon) = \big\{ g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)\colon \|\sigma_s(f)\|_{p',\lambda'} \le \varepsilon_s,\ s \in \mathbb{N}_0 \big\}$, где $1/\lambda + 1/\lambda' = 1$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_s\}$ удовлетворяет условию

$$\Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau' - 1/\lambda')\tau'} \varepsilon_s^{\tau'} \Big)^{1/\tau'} \le 1.$$

Множество таких последовательностей $\{\varepsilon_s\}$ обозначим через $\Lambda$. Тогда по теореме 3.2 $\|g\|_{p',\lambda'} \le 1$. Поэтому из формулы (3.25) следует, что

$$\|f\|_{p,\tau} \ge \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sup_{g \in G_{p',\lambda'}(\varepsilon)} \int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x}$$

$$= \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \sup_{g \in G_{p',\lambda'}(\varepsilon)} \int_{\mathbb{I}^m} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x} = \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}$$

$$= \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{(1/\tau' - 1/\lambda')} \varepsilon_s (s+1)^{(1/\tau - 1/\lambda)} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau} = \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau - 1/\lambda)\tau} \|\sigma_s(f)\|_{p,\lambda}^{\tau} \Big)^{1/\tau}.$$

Теорема доказана. □

**Теорема 3.4.** *Пусть $1 \le \theta < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 < \tau_1 \le 2$ или $2 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \le 2 < \tau_1 < \infty$. Если $\alpha > \big(1/\tau_2 - 1/\tau_1\big) + \big(1/\tau_2 - 1/\theta\big)_+$, то*

$$E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2} << (\log(M+1))^{-\alpha + (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+},\ M \in \mathbb{N}.$$

*В случае $\theta \le \tau_2$, эта оценка точна по порядку.*

*Если $\tau_2 < \theta$, то справедлива оценка снизу*

$$E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2} >> (\log(M+1))^{-\alpha + (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+},\ M \in \mathbb{N}$$

*при $1 < p < 2$, $1 < \tau_2 \le 2$ или $1 < p < \infty$, $2 < \tau_2 < \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$. Если $\tau_2 < \theta$, то, применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/\tau_2, 1/\beta + 1/\beta' = 1$), получим

$$\Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\tau_2}$$

$$\leq \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\theta} \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)\big)\tau_2\beta'} \Big)^{1/(\tau_2\beta')}. \tag{3.26}$$

Если $\theta \leq \tau_2$, то, учитывая, что $\alpha > (1/\tau_2 - 1/\tau_1)$ согласно неравенству Йенсена [15, с. 125], имеем

$$\Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\tau_2} \leq \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\theta}. \tag{3.27}$$

Так как по условию теоремы $\alpha > (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+$, то из неравенств (3.26), (3.27) вытекает, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} < \infty$$

для любой функции $f \in B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$. Следовательно, $B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta} \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Далее, пользуясь неравенством (3.25) и повторяя рассуждения доказательств (3.26) и (3.27), нетрудно убедиться, что

$$E_{2^n}(f)_{p,\tau_2} \leq \Big( \sum_{s=n+1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\tau_2}$$

$$\leq \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\theta} \Big( \sum_{s=n+1}^{\infty} s^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)\big)\tau_2\beta'} \Big)^{1/(\tau_2\beta')}$$

$$\ll (n+1)^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)\big)} \tag{3.28}$$

для любой функции $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ в случае $\tau_2 < \theta$ и

$$E_{\square_{2^n}}(f)_{p,\tau_2} \leq C\Big( \sum_{s=n+1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\tau_2}$$

$$\ll \Big( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1} \Big)^{1/\theta} \leq (n+1)^{-\alpha + (1/\tau_2 - 1/\tau_1)} \tag{3.29}$$

для любой функции $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ в случае $\theta \leq \tau_2$.

Таким образом, из оценок (3.28) и (3.29) следует, что

$$E_{2^n}\big(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}\big)_{p,\tau_2} \ll (n+1)^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+\big)}.$$

Этим оценка сверху доказана.

Докажем оценки снизу. Пусть $\tau_2 < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_3(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-1/\theta} \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{-(\alpha + m/\tau_1)} \prod_{j=2}^{m} e^{i2\pi x_j 2^{s-1}} \sum_{k_1 = 2^{s-1}}^{2^s - 1} (k_1 - 2^{s-1} + 1)^{1/p - 1} e^{i2\pi x_1 k_1},$$

где $\bar{x} \in \mathbb{I}^m,\ n \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$\|\sigma_s(f_3)\|_{p,\tau_1} = (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-(\alpha + m/\tau_1)} \Big\| \prod_{j=2}^{m} e^{i2\pi x_j 2^{s-1}} \sum_{k_1 = 2^{s-1}}^{2^s - 1} (k_1 - 2^{s-1} + 1)^{1/p - 1} e^{i2\pi x_1 k_1} \Big\|_{p,\tau_1}$$

$$= (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-(\alpha+m/\tau_1)}\Big\| \sum_{k_1=2^{s-1}}^{2^s-1} (k_1 - 2^{s-1}+1)^{1/p-1} e^{i2\pi x_1 k_1}\Big\|_{p,\tau_1}$$

$$\asymp (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha} \tag{3.30}$$

для $1 < p, \tau_1 < \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$. В силу непрерывности функция $f_3 \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, и, используя соотношение (3.30), получим

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_3)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} = \Big(\sum_{s=n+1}^{2n} s^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_3)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \le C_3.$$

Следовательно, функция $C_3^{-1}f_3 \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$. Теперь в силу теоремы 3.3 имеем

$$E_{2^n}(C_3^{-1}f_3)_{p,\tau_2} = C_3^{-1}\|f_2\|_{p,\tau_2} \gg \Big(\sum_{s=n}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\lambda)\tau_2}\|\sigma_s(f_2)\|_{p,\lambda}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}$$

при условиях $1 < p < \infty$, $2 \le \tau_2 < \infty$ или $1 < p < 2$, $1 < \tau_2 \le 2$ и $1 < \lambda < \tau_2 < \infty$.

Далее, пользуясь соотношением (3.30), получим

$$E_{2^n}(f_3)_{p,\tau_2} \gg (n+1)^{-1/\theta}\Bigg[\sum_{s=n}^{2n} s^{(1/\tau_2-1/\lambda)\tau_2}(s+1)^{-(\alpha+m/\tau_1)}\Big\|\sum_{k_1=2^{s-1}}^{2^s-1}(k_1-2^{s-1}+1)^{1/p-1}e^{ik_1 2\pi x_1}\Big\|_{p,\lambda}^{\tau_2}\Bigg]^{1/\tau_2}$$

$$\gg (n+1)^{-1/\theta}\Big(\sum_{s=n}^{2n} s^{((1/\tau_2-1/\tau_1)-\alpha)\tau_2}\Big)^{1/\tau_2} \ge C(n+1)^{-\alpha+(1/\tau_2-1/\tau_1)+1/\tau_2-1/\theta}.$$

Таким образом,

$$E_{2^n}\big(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}\big)_{p,\tau_2} \ge C(n+1)^{-\alpha+(1/\tau_2-1/\tau_1)+1/\tau_2-1/\theta}$$

в случае $\tau_2 < \theta$.

Пусть $\theta \le \tau_2$. Рассмотрим функцию

$$f_4(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-(\alpha+m/\tau_1)} \sum_{\bar{k}\in\square_{2^n}\setminus\square_{2^{n-1}}} \prod_{j=1}^{m}(k_j - 2^{s-1}+1)^{1/p-1}e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle},$$

где $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$, $n \in \mathbb{N}_0$. В силу непрерывности функции $f_4 \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, и, используя соотношение (3.30), получим

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_4)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} = n^{\alpha}\|\sigma_n(f_3)\|_{p,\tau_1} \le C_4.$$

Соответственно, функция $C_4^{-1}f_4 \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Далее, учитывая определение наилучшего приближения и снова применяя соотношение (3.30), имеем

$$E_{2^n}(C_4^{-1}f_4)_{p,\tau_2} = \|C_4^{-1}f_4\|_{p,\tau_2} \gg (n+1)^{-\alpha+m(1/\tau_2-1/\tau_1)}$$

в случае $\theta \le \tau_2$. Следовательно,

$$E_{2^n}\big(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}\big)_{p,\tau_2} \ge C(n+1)^{-\alpha+m(1/\tau_2-1/\tau_1)}$$

в случае $\theta \le \tau_2$. Теорема доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2.1, сформулированной в разд. 2, опирается на следующую теорему.

**Теорема 3.5.** *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ 1 < \tau < +\infty$. *Если* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1/p-1/q)\tau} \|\sigma_s(f)\|_p^\tau < \infty,$$

то $f \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и

$$\|f\|_{q,\tau} \le C\bigg\{ \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1/p-1/q)\tau} \|\sigma_s(f)\|_p^\tau \bigg\}^{1/\tau}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что [10, теорема 1] если $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, то

$$\|f\|_{q,\tau} \le C\bigg\{ \|f\|_p + \bigg[ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{nm(1/p-1/q)\tau} E^\tau_{2^n,\dots,2^n}(f)_p \bigg]^{1/\tau} \bigg\} \tag{3.31}$$

для $1 < p < q < \infty,\ 1 < \tau < +\infty$. По свойству нормы

$$E^\tau_{2^n,\dots,2^n}(f)_p \le \bigg\| f - \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f) \bigg\|_p \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_p, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.32}$$

Далее, по свойству нормы и неравенству Гельдера имеем

$$\|f\|_p \le \sum_{s=0}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_p \le C\bigg\{ \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1/p-1/q)\tau} \|\sigma_s(f)\|_p^\tau \bigg\}^{1/\tau} \tag{3.33}$$

Теперь, пользуясь леммой 2.2 из [18] и соотношениями (3.32), (3.33) из (3.31), получим утверждение теоремы 3.5. □

Применяя метод В. Н. Темлякова, использованный при доказательстве леммы 3.1′ в [19], и теорему 3.5 завершаем доказательство леммы 2.1.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что в случае $1 < \tau \le 2$ утверждение теоремы 3.5 также следует из леммы 1.3 и неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов (см. в [16, лемма 6]).

## Заключение

В теореме 2.1 установлено, что порядок наилучшего приближения функции из класса $\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ не зависит от параметра $p$ пространства Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и $m$-количества переменных.

В теореме 3.1 условие на наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ не зависит от $m$-количества переменных. В отличие от оценок в анизотропном пространстве Лоренца [20], в теореме 3.4 порядок наилучшего приближения функций класса $\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ не зависит от $m$.

Теоремы 2.1, 3.1, 3.2, 3.4 были анонсированы в [21]. В теоремах 4 и 5 в [21] имеются опечатки: вместо $m(1/\tau_2 - 1/\tau_1)$ должно быть $(1/\tau_2 - 1/\tau_1)$, как в теоремах 3.2 и 3.4 настоящей статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 332 с.
2. **Кашин Б.С., Темляков В.Н.** Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М: АЦФ, 1999. С. 69–99.

3. **DeVore R.A., Riemenschneider S.D., Sharpley R.C.** Weak interpolation in Banach spaces // J. Func. Anal. 1979. Vol. 33. P. 58–94. doi: 10.1016/0022-1236(79)90018-1 .
4. **Cobos F., Milman M.** On a limit class of approximation spaces // Numer. Funct. Anal. Optimiz. 1990. Vol. 11, no. 1–2. P. 11–31. doi: 10.1080/01630569008816358 .
5. **Cobos F., Dominguez O.** On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lippschitz spaces // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 425, no. 1. P. 71–84. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.12.034 .
6. **Романюк А.С.** Приближение изотропных классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве $L_q$ // Збiрник праць Iн-ту математики НАН Украiни. 2008. Т. 5, № 1. С. 263–278.
7. **Стасюк С.А.** Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 4. С. 493–499.
8. **Стасюк С.А.** Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского — Бесова с логарифмической гладкостью // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67, № 11. С. 1579–1584.
9. **Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation [e-resource]. 2016. 154 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1601.03978.pdf
10. **Акишев Г.** О вложении некоторых классов функций многих переменных в пространство Лоренца // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1982. Т. 3. С. 47–51.
11. **Шерстнева Л.А.** О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения // Изв. вузов. Математика. 1987. Т. 10. С. 48–58.
12. **Lizorkin P.I.** Generalized Holder spaces $B^{(r)}_{p,\theta}$ and their relations with the Sobolev spaces $L^{(r)}_p$ // Sib. Mat. Zh. 1968. Vol. 9, no. 5. P. 1127–1152.
13. **Janson S.** On the interpolation of sublinear operators // Studia Math. 1982. Vol. 75. P. 51–53.
14. **Kokilashvili V., Yildirir Y.E.** On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces // J. Func. Spaces Appl. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 67–86.
15. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
16. **Акишев Г.** О порядках $M$-членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. журн. 2014. Т. 14, № 4. С. 46–71.
17. **Ditzian Z., Prymak A.** Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces // Rocky Mountain Jour. Math. 2010. Vol. 40, no. 1. P. 209–223. doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-209 .
18. **Johansson H.** Embedding of $H^\omega_p$ in some Lorentz spases // Research Report Universite Umea. 1975. Vol. 6. C. 1–36.
19. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
20. **Akishev G.** The estimates of approximations classes in the Lorentz space // AIP Conf. Proc. International conference Advancements in Mathematical Sciences (5-7 November, 2015). Antalya, 2015. P. 1–4. doi: 10.1063/1.4930453.
21. **Акишев Г.** Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Материалы Междунар. конф. “Воронежская зимняя математическая школа”. Воронеж, 2017. С. 12–14.

Акишев Габдолла
Поступила 28.06.2017
д-р физ.-мат. наук, профессор
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова,
г. Караганда, Казахстан,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: akishev_g@mail.ru

**REFERENCES**

1. Stein E., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton, Princeton University Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow, Mir Publ., 1974, 332 p.

2. Kashin B.S., Temlyakov V.N. *Ob odnoi norme i approksimatsionnykh kharakteristikakh klassov funktsii mnogikh peremennykh* [On a norm and approximation characteristics of classes of functions of several variables]. In: Metricheskaya teoriya funktsii i smezhnye voprosy analiza [Metric theory of functions and related problems in analysis], edited by Nikol'skii, Izd. Nauchno-Issled. Aktuarno-Finans. Tsentra (AFTs), Moscow, 1999, pp. 69–99, ISBN: 5-93379-002-8.
3. DeVore R.A., Riemenschneider S.D., Sharpley R.C. Weak interpolation in Banach spaces. *Jour. Func. Anal.*, 1979, vol. 33, pp. 58–94. doi: 10.1016/0022-1236(79)90018-1.
4. Cobos F., Milman M. On a limit class of approximation spaces. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1990, vol. 11, no. 1-2, pp. 11–31. doi: 10.1080/01630569008816358.
5. Cobos F., Dominguez O. On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lippschitz spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, vol. 425, pp. 71–84. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.12.034.
6. Romanyuk A.S. Approximation of the isotropic classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space $L_q$. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 263–278 (in Russian).
7. Stasyuk S.A. Approximating characteristics of the analogs of Besov classes with logarithmic smoothness. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 4, pp. 553–560. doi: 10.1007/s11253-014-0952-5.
8. Stasyuk S.A. Kolmogorov widths for analogs ofthe Nikol'skii–Besov classes with logarithmic smoothness. *Ukr. Math. Jour.*, 2015, vol. 67, no. 11, pp. 1786–1792. doi: 10.1007/s11253-016-1190-9.
9. Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation. Available at: https://arxiv.org/pdf/1601.03978.pdf. 154 p. [*arXiv*: 1601. 03978v1[math.NA] 15 Jan. 2016.]
10. Akishev G.A. On imbedding of some classes of functions of several variables into the Lorentz space. *Izv. Akad. Nauk Kaz. SSR, Ser. Fiz.-Mat.*, 1982, no. 3, pp. 47–51 (in Russian).
11. Sherstneva L.A. On the properties of best Lorentz approximations and certain embedding theorems. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol. 31, no. 10, pp. 62–73.
12. Lizorkin P.I. Generalized Holder spaces $B^{(r)}_{p,\theta}$ and their relations with the Sobolev spaces $L^{(r)}_p$. *Sib. Mat. Zh.*, 1968, vol. 9, no. 5, pp. 1127–1152 (in Russian).
13. Janson S. On the interpolation of sublinear operators. *Studia Math.*, 1982, vol. 75, pp. 51–53.
14. Kokilashvili V., Yildirir Y.E. On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces. *J. Func. Spaces Appl.*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 67–86.
15. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*. New York, Springer-Verlag, 1975, 418 p. ISBN: 9780387064420. Original Russian text (2nd ed.) published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya. 2-e izd.* Moscow, Nauka Publ. 1977, 455 p.
16. Akishev G. On the orders of $M-$terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 46–71 (in Russian).
17. Ditzian Z., Prymak A. Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces. *Rocky Mountain Jour. Math.*, 2010, vol. 40, no. 1, pp. 209–223. doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-209.
18. Johansson H. Embedding of $H^\omega_p$ in some Lorentz spases. *Research Report University Umeå*, 1975, vol. 6, pp. 1–36.
19. Temlyakov V.N. *Approximation of functions with a bounded mixed derivative*. Proc. Steklov Inst. Math., Providence, American Mathematical Society (AMS), 1989, vol. 178. 121 p. Original Russian text published in Temlyakov V.N. *Priblizhenie funktsii s ogranichennoi smeshannoi proizvodnoi*, Tr. MIAN SSSR, vol. 178, ed. S.M. Nikol'skii, 1986, 113 p.
20. Akishev G. The estimates of approximations classes in the Lorentz space. AIP Conf. Proc., vol. 1676, 020027, pp. 1–4. Internat. Conf. Advancements in Math. Sci. (5-7 November, 2015). Antalya, 2015. doi: 10.1063/1.4930453.
21. Akishev G. Estimates of the best approximation of functions of the class with logarithmic smoothness in the Lorentz space. Proc. Intern. Conf. "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola" [Voronezh Winter Mathematical School'] (January 26 – February 1), Voronezh, 2017, pp. 12–14 (in Russian). ISBN: 978-5-9273-2415-6.

The paper was received by the Editorial Office on June 28, 2017.

*Gabdolla Akishev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RSE Academician E. A. Buketov Karaganda State University, the Republic of Kazakhstan, 100028; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: akishev_g@mail.ru.