ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.65

РАВНОМЕРНЫЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНОЙ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ[1]

В. Т. Шевалдин

Для функции $\varphi \in C^1[-h,h]$, удовлетворяющей условиям $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ $(x\in[0;h])$, $\varphi(x)$ не убывает на $[0;h]$, для любой функции $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ рассматриваются локальные сплайны вида

$$S(x)=S_\varphi(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x+\frac{3h}{2}-jh\Big)\quad (x\in\mathbb{R}),$$

где $y_j=f(jh),\ m(h)>0$ и

$$B_\varphi(x)=m(h)\begin{cases}\varphi(x), & x\in[0;h],\\ 2\varphi(h)-\varphi(x-h)-\varphi(2h-x), & x\in[h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x\in[2h;3h],\\ 0, & x\notin[0;3h].\end{cases}$$

При определенном выборе функции φ такие сплайны становятся соответственно параболическими, экспоненциальными, тригонометрическими и т. д. В работе изучаются равномерные константы Лебега $L_\varphi=\|S\|_C^C$ (нормы линейных операторов из C в C) таких сплайнов как функций, зависящих от φ и h. В некоторых случаях эти величины вычислены точно на оси $\mathbb{R}$ и на отрезке числовой прямой (при определенном выборе из сплайна $S_\varphi(f,x)$ граничных условий).

Ключевые слова: константы Лебега, локальные сплайны, трехточечная схема.

V. T. Shevaldin. Uniform Lebesgue constants of local spline approximation.

Let a function $\varphi\in C^1[-h,h]$ be such that $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ for $x\in[0;h]$), and $\varphi(x)$ is nondecreasing on $[0;h]$. For any function $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, we consider local splines of the form

$$S(x)=S_\varphi(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x+\frac{3h}{2}-jh\Big)\quad (x\in\mathbb{R}),$$

where $y_j=f(jh)$, $m(h)>0$, and

$$B_\varphi(x)=m(h)\begin{cases}\varphi(x), & x\in[0;h],\\ 2\varphi(h)-\varphi(x-h)-\varphi(2h-x), & x\in[h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x\in[2h;3h],\\ 0, & x\notin[0;3h].\end{cases}$$

These splines become parabolic, exponential, trigonometric, etc., under the corresponding choice of the function φ. We study the uniform Lebesgue constants $L_\varphi=\|S\|_C^C$ (the norms of linear operators from C to C) of these splines as functions depending on φ and h. In some cases, the constants are calculated exactly on the axis $\mathbb{R}$ and on a closed interval of the real line (under a certain choice of boundary conditions from the spline $S_\varphi(f,x)$).

Keywords: Lebesgue constants, local splines, three-point system.

MSC: 41A15
DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-292-299

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Введение

В современной вычислительной математике регулярно появляются различные обобщения полиномиальных сплайн-функций. Помимо хорошо известных $\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [1]) отметим истокообразно представимые сплайны [2], функции Рвачева [3], сплайны Леонтьева [4], функции Квасова [5], φ-сплайны Демьяновича [6] и т. д. Автор [7] предложил еще одно обобщение известной конструкции параболического базисного сплайна с равноотстоящими узлами, построенного на основе только одной функции $\varphi \in C^1[-h,h]$ $(h>0)$, а именно: B-сплайн для фиксированной функции $\varphi \in C^1[-h,h]$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0, \quad \varphi(-x)=\varphi(x) \quad (x\in[0;h]),$$

на оси $\mathbb{R}$ определяется формулой

$$B_\varphi(x)=m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x\in[0;h],\\ 2\varphi(h)-\varphi(x-h)-\varphi(2h-x), & x\in[h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x\in[2h;3h],\\ 0, & x\notin[0;3h]. \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь $m=m(h)>0$ — нормирующий множитель (о его выборе пойдет речь в дальнейшем изложении). В классическом случае нормализованный (в C) параболический B-сплайн с равномерными узлами $0,h,2h$ и $3h$ (см., например, [8]) получается из этого определения, если положить

$$\varphi(x)=x^2, \quad m(h)=\frac{1}{2h^2}.$$

Из (0.1) и свойств функции φ вытекают очевидные свойства сплайна $B_\varphi(x)$:

$$\operatorname{supp} B_\varphi(x)=[0;3h], \quad B_\varphi\in C^1(\mathbb{R}), \quad B_\varphi(3h-x)=B_\varphi(x) \quad (x\in[0;3h]).$$

Если дополнительно потребовать, чтобы было выполнено еще одно условие: функция $\varphi(x)$ не убывает на отрезке $[0;h]$, то график функции $B_\varphi(x)$ будет представлять собой симметричную относительно прямой $x=3h/2$ “шапочку” типа параболического B-сплайна с равномерными узлами.

Для произвольной функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положим $y_j=f(jh)$ $(j\in\mathbb{Z})$. Для функции φ описанного выше типа в [7] изучались локальные сплайны вида

$$S(x)=S_\varphi(x)=S_\varphi(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x+\frac{3h}{2}-jh\Big) \quad (x\in\mathbb{R}). \tag{0.2}$$

В частности, было доказано: такие сплайны удовлетворяют локально свойству сохранения знака и свойству сохранения монотонности исходных данных $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в том смысле, что если

$$y_{l-1}\le y_l\le y_{l+1} \quad (l\in\mathbb{Z}),$$

то сплайн $S(x)$ не убывает на отрезке $[(l-1/2)h;(l+1/2)h]$ $(l\in\mathbb{Z})$. Известно также (см., например, [7], имеющиеся там ссылки и далее замечание 1 к разд. 1), что для некоторых функций φ, удовлетворяющих отмеченным выше свойствам, сплайны вида (0.2) (они, по терминологии [7;8], реализуют простейшую схему локальной сплайн-аппроксимации) обладают хорошими (в некоторых случаях наилучшими) аппроксимативными свойствами на соответствующих классах функций типа соболевских, определяемых функцией φ. Аналогичные сплайны в [7] были построены и на произвольном отрезке числовой прямой с краевыми условиями второго рода.

Приведем некоторые примеры функций φ, приводящие соответственно к параболическим, экспоненциальным, тригонометрическим, эллиптическим и гиперболическим сплайнам на оси $\mathbb{R}$:

1) $\varphi(x) = x^2$;
2) $\varphi(x) = \operatorname{ch}\beta x - 1$ $(\beta > 0)$;
3) $\varphi(x) = 1 - \cos\alpha x$ $(\alpha > 0)$;
4) $\varphi(x) = b - (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a, b > 0)$;
5) $\varphi(x) = -b + (b/a)\sqrt{a^2 + x^2}$ $(a, b > 0)$.

Сплайны $S_\varphi(x) = S_\varphi(f, x)$ задают линейный (неинтерполяционный) метод $S\colon f \to S_\varphi$ аппроксимации функций f, определенных на оси или на отрезке числовой прямой. Представляет интерес изучение констант Лебега (норм операторов из C в C) таких сплайнов как функций, зависящих от φ и h. Как известно, величина

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|_C^C = \sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le 1} \|S_\varphi(f, \cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$$

называется *константой Лебега линейного оператора* S. Она характеризует устойчивость метода S к возмущению исходных данных $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

В настоящей работе для некоторых функций φ данная величина вычисляется точно. При этом изучается вопрос о выборе нормирующего множителя $m(h)$ в определении (0.1).

1. Константы Лебега сплайнов на оси $\mathbb{R}$

Пусть, как обычно, $C(\mathbb{R})$ и $C[a, b]$ — классы непрерывных функций соответственно на оси $\mathbb{R}$ и на отрезке со стандартным определением нормы, AC — класс локально абсолютно непрерывных функций, $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_\infty[a, b]$ — классы существенно ограниченных функций на оси $\mathbb{R}$ и на отрезке с нормами

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad \|f\|_{L_\infty[a,b]} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Пусть функция $\varphi \in C^1[-h; h]$ $(h > 0)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0,\\ &2)\ \varphi(-x) = \varphi(x) \quad (x \in [0; h]),\\ &3)\ \varphi(x) \ \text{ не убывает на отрезке } \ [0; h]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Для произвольной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и рассмотрим сплайн $S_\varphi(x) = S_\varphi(f, x)$, определенный при $x \in \mathbb{R}$ равенствами (0.1) и (0.2).

Теорема 1. *Для функции φ, удовлетворяющей условиям* (1.1), *и сплайна $S_\varphi(x)$, определенного равенствами* (0.1) *и* (0.2), *имеет место равенство*

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|_C^C = 2\varphi(h)m(h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x \in [(l - 1/2)h; (l + 1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ положим $t = x - lh \in [-h/2; h/2]$. При этом сумма (0.2) содержит конечное число (в точности, три) слагаемых и записывается в виде

$$\widetilde{S}(t) = S_\varphi(x) = m(h)\Big[y_{l+1}\varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) + y_l\Big(2\varphi(h) - \varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)\Big) + y_{l-1}\varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)\Big]. \tag{1.2}$$

Таким образом, простейшая схема локальной сплайн-аппроксимации (0.2) приводит к трехточечной схеме определения сплайна (сплайн S_φ на каждом отрезке $[(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ числовой оси зависит только от трех значений y_{l-1}, y_l и y_{l+1} аппроксимируемой функции f).

Исследуем функцию

$$g(t) = 2\varphi(h) - \varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)$$

на отрезке $[-h/2; h/2]$ с учетом свойств (1.1) функции φ. Имеем

$$g(-t) = g(t) \quad \Big(t \in \Big[0; \frac{h}{2}\Big]\Big), \quad g\Big(-\frac{h}{2}\Big) = g\Big(\frac{h}{2}\Big) = \varphi(h) \geq 0,$$

$$g(0) = 2\Big(\varphi(h) - \varphi\Big(\frac{h}{2}\Big)\Big) \geq 0, \quad g'(t) = -\varphi'\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - \varphi'\Big(t - \frac{h}{2}\Big) \leq 0 \quad \Big(t \in \Big[0; \frac{h}{2}\Big]\Big).$$

Поэтому

$$g(t) \geq 0 \quad \Big(t \in \Big[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\Big]\Big). \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) для любой функции $f\colon \|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq 1$ выводим оценку сверху для модуля сплайна $S_\varphi(x)$:

$$|\widetilde{S}(t)| = |S_\varphi(x)| \leq m(h) \max_l |y_l| \Big[\varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) + 2\varphi(h) + \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)$$
$$- \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big)\Big] = 2m(h)\big(\max_l |y_l|\big)\varphi(h) \leq 2m(h)\varphi(h). \tag{1.4}$$

Полученная оценка сверху для $|S_\varphi(x)|$ является точной, поскольку знак равенства достигается для функции $f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Из (1.2) и (1.4) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим частные случаи теоремы 1.

1. Пусть $\varphi(x) = x^2$ и $m(h) = 1/(2h^2)$. Локальные параболические сплайны, возникающие в этом случае в формуле (0.2), сохраняют линейные функции [9] и обладают помимо этого следующими свойствами:

$$E(W^2_\infty)_C = \sup_{f \in W^2_\infty} \|f - S_\varphi\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{h^2}{8}, \quad L_\varphi = \|S_\varphi\|^C_C = 1. \tag{1.5}$$

Здесь $W^2_\infty = \{f :\ f' \in AC,\ \|f''\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1\}$ — соболевский класс дважды дифференцируемых функций. Первое из равенств (1.5) доказано Ю. Н. Субботиным в [9] (см. также [10]), а второе — автором (оно является частным случаем теоремы 1) в монографии [7].

2. Пусть $\varphi(x) = \operatorname{ch}\beta x - 1$ $(\beta > 0)$. Если нормирующий множитель выбрать в виде

$$m(h) = \Big(4\operatorname{sh}^2\frac{\beta h}{2}\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)^{-1}, \tag{1.6}$$

то простейшая схема локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации (0.2) будет сохранять на всей оси $\mathbb{R}$ функции $e^{\beta x}$ и $e^{-\beta x}$ (см., например, [11]). Из [10] также следует, что для класса функций

$$W^{\mathcal{L}_2}_\infty = \{f\colon f' \in AC,\ \|\mathcal{L}_2(D)f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1\}$$

(здесь $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D) = D^2 - \beta^2$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка) при таком выборе нормирующего множителя имеет место равенство

$$E(W^{\mathcal{L}_2}_\infty)_C = \sup_{f \in W^{\mathcal{L}_2}_\infty} \|f - S_\varphi\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{2\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta h}{4}}{\beta^2\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}}. \tag{1.7}$$

При этом из теоремы 1 в качестве частного случая выводим

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|^C_C = \Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)^{-1}.$$

3. Пусть $\varphi(x)=1-\cos\alpha x$ $(\alpha>0)$. Этот случай приводит к локальным тригонометрическим сплайнам и при выборе нормирующего множителя в виде

$$m(h)=\Big(4\sin^2\frac{\alpha h}{2}\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)^{-1}\quad\Big(0<h<\frac{\pi}{\alpha}\Big)\tag{1.8}$$

ведет к тому, что сплайны вида (0.2) сохраняют на всей оси $\mathbb{R}$ функции $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$ (см., например, [12]). Кроме того, из [11] следует, что для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2(D)=D^2+\alpha^2$ и класса функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ имеет место равенство

$$E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_C=\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_2}}\|f-S_\varphi\|_{C(\mathbb{R})}=\frac{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{4}}{\alpha^2\cos\dfrac{\alpha h}{2}}\quad\Big(0<h<\frac{\pi}{\alpha}\Big).\tag{1.9}$$

При таком выборе функций $\varphi(x)$ и $m(h)$ из теоремы 1 получаем, что

$$L_\varphi=\|S_\varphi\|_C^C=\Big(\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)^{-1}\quad\Big(0<h<\frac{\pi}{\alpha}\Big).$$

В работах [9–11] отмечено, что для 1-периодических функций f при $h=1/(2n)$ величины $E(W_\infty^2)_C,\ E(W_\infty^{D^2-\beta^2})_C,\ E(W_\infty^{D^2+\alpha^2})_C$ (см. (1.5), (1.7), (1.9)) совпадают с поперечниками по Колмогорову порядка $2n$ соответствующих классов функций $W_\infty^2,\ W_\infty^{D^2-\beta^2}$ и $W_\infty^{D^2+\alpha^2}$. Поэтому можно сделать вывод, что выбор нормирующего множителя во всех этих случаях с точки зрения аппроксимации оптимален.

4. В случаях $\varphi(x)=b-(b/a)\sqrt{a^2-x^2}$ (эллиптические сплайны) и $\varphi(x)=-b+(b/a)\sqrt{a^2+x^2}$ (гиперболические сплайны) выбор нормирующего множителя к настоящему времени не ясен. В первом случае из теоремы 1 имеем

$$L_\varphi=\|S_\varphi\|_C^C=2\Big(b-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-h^2}\Big)m(h)\quad(0<h<a,\ b>0),$$

а во втором —

$$L_\varphi=\|S_\varphi\|_C^C=2\Big(-b+\frac{b}{a}\sqrt{a^2+h^2}\Big)m(h)\quad(a,b>0).$$

2. Константы Лебега локальных сплайнов на отрезке

Трехточечная схема (0.2) может быть применена для аппроксимации функций, заданных своими значениями не на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, а только на отрезке. Не ограничивая общности, рассмотрим отрезок $[0;A]$, $A=nh$. Для функции $f\colon[0;A]\to\mathbb{R}$ положим $y_j=f(jh)$ $(j=\overline{0,n})$. На отрезках $[h/2;3h/2],\ [3h/2;5h/2],\dots,[(n-3/2)h;(n-1/2)h]$ сплайн $S_\varphi(x)=S_\varphi(f,x)$ строим по формулам (0.1), (0.2). При этом нетрудно проверить, что

$$S_\varphi(jh)\ne y_j\quad(j=\overline{1,n-1}),$$

т. е. локальный сплайн $S_\varphi(x)$ не является интерполяционным. Сплайн $S_\varphi(x)$ на крайних отрезках $[0;h/2]$ и $[(n-1/2)h;A]$ построен в [7, гл. 5] с учетом следующих равенств:

$$S_\varphi(0)=y_0,\quad S_\varphi\Big(\frac{h}{2}-0\Big)=S_\varphi\Big(\frac{h}{2}+0\Big),\quad S'_\varphi\Big(\frac{h}{2}-0\Big)=S'_\varphi\Big(\frac{h}{2}+0\Big),$$

$$S_\varphi(A)=y_n,\quad S_\varphi\Big(\Big(n-\frac12\Big)h-0\Big)=S_\varphi\Big(\Big(n-\frac12\Big)h+0\Big),\quad S'_\varphi\Big(\Big(n-\frac12\Big)h-0\Big)=S'_\varphi\Big(\Big(n-\frac12\Big)h+0\Big).\tag{2.1}$$

На отрезке $[0; h/2]$ он может быть записан в виде

$$S_\varphi(x) = 2m(h)\varphi(h)y_0 + \Big[\frac{y_0(1-2m(h)\varphi(h))}{\varphi(h/2)} - m(h)(y_1-y_0)\Big]\varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)$$

$$+m(h)(y_1-y_0)\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big) = y_0\Big[2m(h)\varphi(h)+\Big(\frac{1-2m(h)\varphi(h)}{\varphi(h/2)}+m(h)\Big)\varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)-m(h)\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\Big]$$

$$+ y_1 m(h)\Big(\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big], \tag{2.2}$$

а на отрезке $[(n-1/2)h; A]$ — в виде

$$S_\varphi(x) = 2m(h)\varphi(h)y_n + \Big[\frac{y_n(1-2m(h)\varphi(h))}{\varphi(h/2)} - m(h)(y_{n-1}-y_n)\Big]\varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big)$$

$$+ m(h)(y_{n-1}-y_n)\varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big) = y_n\Big[2m(h)\varphi(h) + \Big(\frac{1-2m(h)\varphi(h)}{\varphi(h/2)} + m(h)\Big)$$

$$\times\varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big) - m(h)\varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big)\Big] + y_{n-1}m(h)\Big(\varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big)\Big]. \tag{2.3}$$

Из равенств (2.2) и (2.3) легко следуют равенства (2.1). Кроме того, нетрудно заметить, что $S'_\varphi \in C[0; A]$ и на крайних отрезках $[0; h/2]$ и $[(n-1/2)h; A]$ сплайн $S_\varphi(x)$ зависит только от двух значений функции f (в первом случае от y_0 и y_1, а во втором — от y_{n-1} и y_n). При этом в точках $x = 0$ и $x = A$ сплайн $S_\varphi(x)$ интерполирует функцию f, поскольку $S_\varphi(0) = y_0 = f(0)$ и $S_\varphi(A) = y_n = f(A)$.

Теорема 2. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям* (1.1) *и имеет место равенство*

$$2m(h)\varphi(h) = 1. \tag{2.4}$$

Для сплайна $S_\varphi(x)$, определенного формулами (0.1) *и* (0.2) *при $x \in [h/2; (n-1/2)h]$ и формулами* (2.2) *и* (2.3) *на отрезках $[0; h/2]$ и $[(n-1/2)h; A]$ соответственно, имеет место равенство*

$$L_\varphi = \sup_{\|f\|_{C[0;A]}\le 1} \|S_\varphi(f,\cdot)\|_{C[0;A]} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f:\ [0; A] \to \mathbb{R}$ такова, что $\|f\|_{C[0;A]} \le 1$. Неравенство

$$|S_\varphi(x)| \le 2\varphi(h)m(h)\max_{l=\overline{1,n-1}}|y_l| \le 1 \quad \Big(x\in\Big[\frac{h}{2};\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h\Big]\Big) \tag{2.5}$$

следует из теоремы 1, равенства (2.4) и неравенств $|y_l| \le 1$ $(l = \overline{1, n-1})$. При $x \in [0; h/2]$ равенство (2.2) можно переписать в виде

$$S_\varphi(x) = A_0y_0 + A_1y_1, \tag{2.6}$$

где

$$A_0 = \frac{2\varphi(h)+\varphi(x-h/2)-\varphi(x+h/2)}{2\varphi(h)}, \quad A_1 = \frac{\varphi(x+h/2)-\varphi(x-h/2)}{2\varphi(h)}.$$

В силу свойств функции $\varphi(x)$ при $x \in [0; h/2]$ имеем $A_0 \ge 0,\ A_1 \ge 0$. Поэтому из (2.6) следует, что

$$|S_\varphi(x)| \le \max\{|y_0|,|y_1|\} \le 1 \quad \Big(x\in\Big[0;\frac{h}{2}\Big]\Big). \tag{2.7}$$

Аналогично, используя равенство (2.3), получаем неравенство

$$|S_\varphi(x)| \le \max\{|y_{n-1}|,|y_n|\} \le 1 \quad \Big(x\in\Big[\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h; A\Big]\Big). \tag{2.8}$$

Неравенства (2.5), (2.7) и (2.8) являются точными в том смысле, что знак равенства в них реализует функция $f(x) = 1$ $(x \in [0; A])$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 2. Прокомментируем выбор нормирующего множителя $m(h)$ в теореме 2 для частных случаев функции $\varphi(x)$, рассмотренных в замечании 1.

1. Для параболических сплайнов $(\varphi(x) = x^2)$ имеем

$$m(h) = \frac{1}{2\varphi(h)} = \frac{1}{2h^2}$$

как в замечании 1, так и в теореме 2. Этот выбор обеспечивает наилучшие аппроксимативные свойства локальных параболических сплайнов $S_\varphi(f, x)$ на классе функций W_∞^2 (см. замечание 1) и константу Лебега L_φ, равную 1.

2, 3. Для экспоненциальных $(\varphi(x) = \operatorname{ch} \beta x - 1,\ \beta > 0)$ и тригонометрических $(\varphi(x) = 1 - \cos \alpha x,\ \alpha > 0)$ сплайнов выбор $m(h)$ в виде (2.4) отличается от (1.6) и (1.8), и, следовательно, при этом в силу замечания 1 сплайны $S_\varphi(f, x)$ не обладают наилучшими аппроксимативными свойствами на соответствующих классах функций $W_\infty^{D^2-\beta^2}$ и $W_\infty^{D^2+\beta^2}$.

4, 5. Для эллиптических $(\varphi(x) = b - (b/a)\sqrt{a^2 - x^2})$ и гиперболических $(\varphi(x) = -b + (b/a) \times \sqrt{a^2 + x^2})$ сплайнов выбор нормирующего множителя в форме (2.4) к настоящему времени представляется наиболее естественным, поскольку он приводит к константе Лебега L_φ, равной 1, в то время как пока ничего неизвестно об аппроксимативных свойствах рассматриваемых сплайнов на каких-либо классах функций, зависящих от $\varphi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 318 с.
2. **Шевалдин В.Т.** Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 185–201.
3. **Рвачев В.А.** Финитные решения функционально-дифференцируемых уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 1. С. 77–103.
4. **Леонтьев В.Л.** Ортогональная финитные функции и численные методы. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2003. 178 с.
5. **Квасов Б.И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.
6. **Демьянович Ю.К.** Вейвлет-базис B_φ-сплайнов для неравномерной сетки // Мат. моделирование. 2006. Т. 18, № 10. С. 123–126.
7. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
8. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
9. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
10. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
11. **Kostousov K.V., Shevaldin V.T.** Approximation by local exponential splines // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. 147–157.
12. **Костоусов К.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 354–363.

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 2.06.2017

REFERENCES

1. Ahlberg J., Nilson E.N., Walsh J. *The theory of Splines and Their Applications.* New York, London: Academic Press, 1967, 284 p. ISBN: 0120447509. Translated under the title *Teoriya splainov i ee prilozheniya*, Moscow, Mir Publ., 1972, 318 p.
2. Shevaldin V.T. Lower bounds on width of classes of sourcewise representable functions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, pp. 217–234.
3. Rvachev V.A. Compactly supported solutions of functional-differential equations and their applications. *Russian Math. Surveys*, 1990, vol. 45, no. 1, pp. 87–120. doi: 10.1070/RM1990v045n01ABEH002324.
4. Leont'ev V.L. *Ortogonal'naya finitnye funkzii i chislennye metody* [Orthogonal compactly supported functions and numerical methods]. Ul'yanovsk: Ul'yanovskij Gosudarstvennyj Universitet Publ., 2003, 177 p. ISBN: 5-88866-144-9/hbk.
5. Kvasov B.I. *Metody isogeometricheskoi approximacii* [Methods for isogeometric approximation]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 360 p. ISBN: 5-9221-0733-X.
6. Dem'yanovich Y.K. Wavelets basic of B_φ-splines for erregular net. *Mat. Mod.*, 2006, vol. 18, no. 10, pp. 123–126 (in Russian).
7. Shevaldin V.T. *Approksimatsiya lokal'nymi splainami* [Local approximation by splines]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2014, 198 p.
8. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funktsii* [Methods of spline functions]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 352 p.
9. Subbotin Yu.N. Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1993, vol. 33, no. 7, pp. 879–884.
10. Shevaldin V.T. Approximation by local parabolic splines with arbitrary knots. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2005, vol. 8, no. 1, pp. 77–88.
11. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local exponential splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, Suppl. 1, pp. 147–157.
12. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local trigonometric splines. *Math. Notes*, 2005, vol. 77, no. 3, pp. 326–334. doi: 10.1007/s11006-005-0033-z.

The paper was received by the Editorial Office on June 2, 2017.

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Rassian Academy of Sciences, Yeraterinburg, 620990 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru.