ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.16 + 519.85

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА В КЛАССЕ КВАЗИ- И ПСЕВДОПИРАМИДАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ[1]

М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина

В работе изучается общая постановка обобщенной задачи коммивояжера (GTSP), в которой требуется построить кратчайший циклический маршрут, посещающий каждый элемент фиксированного разбиения множества вершин заданного взвешенного графа (именуемый *кластером* или *мегаполисом*) в единственной вершине. Обобщив классическое понятие пирамидального маршрута и введя в рассмотрение квази- и псевдопирамидальные маршруты для задачи GTSP, мы показали, что оптимальный l-квазипирамидальный и l-псевдопирамидальный маршруты в произвольной постановке задачи на n вершинах и k кластерах могут быть построены за время $O(4^l n^3)$ и $O(2^l k^{l+4} n^3)$ соответственно. Как следствие показано, что задача GTSP принадлежит классу FPT относительно параметризаций, задаваемых такими типами маршрутов. Кроме того, обоснована полиномиальная разрешимость геометрического подкласса задачи, известного в литературе как GTSP-GC, произвольная постановка которого стеснена дополнительным ограничением $H \leq 2$ на высоту решетки, определяющей кластеры.

Ключевые слова: обобщенная задача коммивояжера (GTSP), полиномиально разрешимый подкласс, квазипирамидальный маршрут, псевдопирамидальный маршрут.

M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina. Solvability of the Generalized Traveling Salesman Problem in the class of quasi- and pseudopyramidal tours.

We consider the general setting of the Generalized Traveling Salesman Problem (GTSP), where, for a given weighted graph and a partition of its nodes into clusters (or megalopolises), it is required to find a cheapest cyclic tour visiting each cluster exactly once. Generalizing the classical notion of pyramidal tour, we introduce quasi- and pseudopyramidal tours for the GTSP and show that, for an arbitrary instance of the problem with n nodes and k clusters, optimal l-quasi-pyramidal and l-pseudopyramidal tours can be found in time $O(4^l n^3)$ and $O(2^l k^{l+4} n^3)$, respectively. As a consequence, we prove that the GTSP belongs to the class FTP with respect to parametrizations given by such types of routes. Furthermore, we establish the polynomial-time solvability of the geometric subclass of the problem known in the literature as GTSP-GC, where an arbitrary statement is subject to the additional constraint $H \leq 2$ on the height of the grid defining the clusters.

Keywords: Generalized Traveling Salesman Problem (GTSP), polynomially solvable subclass, quasi-pyramidal tour, pseudopyramidal tour.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-280-291

Введение

Задача коммивояжера (TSP) — классическая задача комбинаторной оптимизации, известная широким спектром приложений в области исследования операций и привлекающая внимание специалистов в области алгоритмического анализа труднорешаемых задач с начала 60-х гг. прошлого века (см., например, [12]).

Хорошо известно [18], что задача TSP NP-трудна в сильном смысле как в общем случае, так и в существенно более специальных постановках, например, на евклидовой плоскости. Аппроксимируемость задачи TSP, по-видимому, наиболее точно характеризуется следующими фундаментальными результатами. С одной стороны, поскольку существование полиномиального приближенного алгоритма с точностью $O(2^n)$ для общего случая задачи влечет [19] совпадение классов P и NP, алгоритмы, способные эффективно находить не только точные, но и приближенные решения с приемлемой точностью для произвольной постановки TSP,

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант 14-11-00109.

вряд ли когда-либо будут разработаны. С другой стороны, во многих важных с точки зрения приложений частных случаях задача коммивояжера обладает существенно лучшей аппроксимируемостью. Например, для произвольного метрического пространства разработаны [6] полиномиальные приближенные алгоритмы фиксированной точности, а для конечномерных евклидовых пространств — полиномиальные приближенные схемы (PTAS) [3], позволяющие для произвольного наперед заданного $\varepsilon > 0$ найти приближенное решение задачи с относительной погрешностью ε за полиномиальное время от длины записи ее условия. Отметим, что подобными сложностными и аппроксимационными свойствами обладают и некоторые известные обобщения задачи коммивояжера, например, задача о цикловом покрытии графа (см., например, [11; 13]) и задача о нескольких коммивояжерах [2].

Наряду с проектированием приближенных алгоритмов в последние десятилетия внимание исследователей привлекает алгоритмический анализ постановок задачи TSP и ее обобщений, множества допустимых маршрутов которых стеснены дополнительными ограничениями, например, *ограничениями предшествования* (см., например, [4; 5]). Среди прочих ограничений сужение допустимого множества до множества так называемых *пирамидальных маршрутов* представляется наиболее активно исследуемым (см. обзоры в [12; 20]). *Пирамидальным* называется маршрут, согласованный с естественным упорядочением вершин графа, задающего условие задачи, и имеющий вид $v_1 = v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r} = v_n, v_{i_{r+1}}, \ldots, v_{i_n},$ где

$$v_{i_j} < v_{i_{j+1}} \quad (1 \leq j \leq r-1), \qquad v_{i_j} > v_{i_{j+1}} \quad (r+1 \leq j \leq n-1).$$

Известно, что в классе пирамидальных маршрутов задача коммивояжера может быть решена чрезвычайно эффективно: при произвольной весовой функции пирамидальный маршрут минимального (или максимального) веса может быть найден [15] за время $O(n^2)$, в то время как для евклидовой постановки известны [9] алгоритмы и с субквадратичной трудоемкостью $O(n \log^2 n)$. В работах [8; 17] предложены обобщения понятия пирамидального маршрута, сохраняющие свойство полиномиальности соответствующих оптимизирующих процедур.

Несмотря на общеизвестность пирамидальных маршрутов, использование их и обобщающих их конструкций при алгоритмическом анализе задачи коммивояжера затруднено редкостью постановок задачи, для которых удается обосновать оптимальность (или субоптимальность) таких маршрутов. Фактически множество известных примеров подобных задач исчерпывается постановками, удовлетворяющими классическим достаточным условиям Демиденко и Ван дер Веена [12], а также условиям, приведенным в работах [8; 16].

В статье исследуется полиномиальная разрешимость подклассов обобщенной задачи коммивояжера (GTSP), состоящей в поиске циклического маршрута минимального веса, посещающего каждый элемент заданного разбиения множества вершин взвешенного графа в единственной вершине. Известно, что задача GTSP полиномиально разрешима при произвольном фиксированном числе элементов разбиения [10], однако в случае, когда это число является частью условия, задача NP-трудна и сохраняет труднорешаемость даже на евклидовой плоскости.

Результаты данной статьи условно могут быть разделены на две группы.

1) В разд. 1 нами вводятся понятия l-*квазипирамидального* и l-*псевдопирамидального* маршрутов, распространяющие классическое понятие пирамидального маршрута на случай обобщенной задачи коммивояжера (GTSP), и показывается, что оптимальные l-квази- и l-псевдопирамидальные маршруты могут быть найдены за полиномиальное время при произвольной весовой функции и произвольном фиксированном значении параметра l.

2) В разд. 2 нами описывается нетривиальный полиномиально разрешимый геометрический подкласс задачи GTSP и показывается, что для найденного конкретного значения l произвольная частная задача, представитель рассматриваемого подкласса, обладает оптимальным l-квазипирамидальным маршрутом.

1. Квази- и псевдопирамидальные маршруты

В данном разделе мы распространим понятие пирамидального маршрута на случай обобщенной задачи коммивояжера (GTSP). Постановка задачи GTSP задается полным реберно-взвешенным графом $G = (V, E, w)$ с неотрицательнозначной весовой функцией $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ и разбиением $V_1 \cup \ldots \cup V_k = V$ множества вершин $V = V(G)$ графа G на *кластеры* (*мегаполисы*). Допустимыми решениями задачи являются циклические маршруты $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, посещающие произвольный кластер V_i в единственной вершине. Договоримся в дальнейшем называть такие решения *кластеризованными маршрутами коммивояжера* или сокращенно *k-маршрутами*. Цель в задаче GTSP состоит в поиске k-маршрута минимального веса[2].

Как отмечалось выше, пирамидальные маршруты согласованы с линейным порядком на множестве вершин графа. В данном разделе мы обобщим это понятие на случай частичных порядков, порождаемых упорядочениями кластеров. В самом деле, линейно упорядоченное множество кластеров $(V_1, \ldots, V_k)$ индуцирует естественный частичный порядок на множестве вершин графа G: для произвольных вершин $u \in V_i$ и $v \in V_j$ $u \prec v$, если $i < j$.

О п р е д е л е н и е. k-маршрут τ вида $v_1, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}, v_k, v_{j_{k-r-2}}, \ldots, v_{j_1}$, в котором $v_t \in V_t$ для каждого $t \in \{1, \ldots, k\}$, называется *l-квазипирамидальным маршрутом*, если неравенства $i_p - i_q \le l$ и $j_{p'} - j_{q'} \le l$ справедливы для произвольных $1 \le p < q \le r$ и $1 \le p' < q' \le k - r - 2$.

Следующая теорема обобщает результат, полученный в [17] для случая классической задачи коммивояжера.

Теорема 1. *Оптимальный l-квазипирамидальный маршрут для постановки задачи* GTSP *с произвольной весовой функцией $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ может быть найден за время $O(4^l n^3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задавшись произвольной постановкой задачи GTSP, опишем процедуру поиска l-квазипирамидального маршрута минимальной стоимости. Для натуральных чисел $i > j$ договоримся использовать сокращенные обозначения $[j, i]$, $[j, i)$ и (j, i) для подмножеств $\{j, \ldots, i\} \cap \mathbb{N}$, $\{j, \ldots, i-1\} \cap \mathbb{N}$ и $\{j+1, \ldots, i-1\} \cap \mathbb{N}$ соответственно. Для произвольных вершин $u \in V_i$ и $v \in V_j$, $1 \le i \ne j \le k$, и подмножества S, удовлетворяющего соотношению

$$(S \subset [i-l, i) \setminus \{1, j\}) \vee (S \subset [j-l, j) \setminus \{1, i\}),$$

обозначим через $g(u, S, v)$ вес кратчайшего $(|S|+1)$-реберного пути из u в v, посещающего каждый из кластеров $\{V_t\colon t \in S\}$ (рис. 1). Значения функции g легко могут быть вычислены рекурсивно, поскольку $g(u, \varnothing, v) = w(\{u, v\})$ и

$$g(u, S, v) = \begin{cases} \min\limits_{m \in S} \min\limits_{v' \in V_m} \{g(u, S \setminus \{m\}, v') + w(\{v', v\})\}, & \text{если} \quad S \subseteq [j-l, j) \setminus \{1, i\}, \\ \min\limits_{m \in S} \min\limits_{v' \in V_m} \{w(\{u, v'\}) + g(v', S \setminus \{m\}, v)\}, & \text{если} \quad S \subseteq [i-l, i) \setminus \{1, j\}. \end{cases} \tag{1}$$

Далее, для произвольных $1 \le j < i \le k$ и подмножества $T \subseteq [i-l, i) \cup [j-l, j) \setminus \{1, i, j\}$ через $f(u, v, T)$ обозначим вес кратчайшего пути P из $u \in V_i$ в $v \in V_j$, посещающего каждый кластер V_p, $p \in [1, i) \setminus T$, в единственной вершине и имеющего вид

$$u = v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r} = \bar{v} = v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_s} = v,$$

причем $\bar{v} \in V_1$, индексы $i_0, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ попарно различны, $i_t < i$ и $j_{t'} < j$ для каждого $1 \le t \le r$ и $0 \le t' \le s-1$ соответственно, и

$$i_q - i_p \le l \quad (0 < p < q \le r), \qquad j_{p'} - j_{q'} \le l \quad (0 \le p' < q' < s).$$

[2]Для простоты мы ограничимся случаем неориентированных графов, однако проведенные рассуждения легко могут быть обобщены на случай ориентированных графов и несимметричных весовых функций.

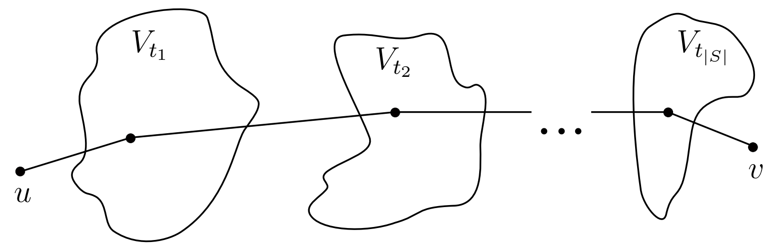


Рис. 1. u-v-путь, посещающий кластеры V_{t_j}, $t_j \in S$.

Как и в случае с функцией g, значения введенной выше функции f могут быть вычислены рекурсивно. Базу рекурсии составляют значения $f(u, v, (1, t)) = w(\{u, v\})$, вычисляемые непосредственно для произвольной пары вершин $u \in V_t$ и $v \in V_1$, $2 \le t \le l+2$. Остальные значения $f(u, v, T)$ для произвольных $u \in V_i$, $v \in V_j$ и $T \subset [i-l, i) \cup [j-l, j) \setminus \{1, i, j\}$, необходимые для дальнейших построений, могут быть вычислены в порядке возрастания i и $j < i$ следующим образом.

Пусть $m = \max\{p\colon p \in [1, i) \cup [1, j) \setminus T\}$ — наибольший номер промежуточного кластера, посещаемого маршрутом из u в v. В случае $m > j$ значение $f(u, v, T)$ может быть вычислено по формуле

$$f(u, v, T) = \min_{S \subseteq [m-l, m) \setminus (T \cup \{1, j\})} \min_{u' \in V_m} \{g(u, S, u') + f(u', v, T \cup S)\}, \tag{2}$$

в случае $m < j$ — по формуле

$$f(u,v,T) = \min \begin{cases} \min\limits_{S \subseteq [m-l, m) \setminus (T \cup \{1\})} \min\limits_{u' \in V_m} \{g(u, S, u') + f(u', v, T \cup S)\}, & \text{если } m \in \{i_1, \ldots, i_{r-1}\}, \\ \min\limits_{S \subseteq [m-l, m) \setminus (T \cup \{1\})} \min\limits_{u' \in V_m} \{f(u, u', T \cup S) + g(u', S, v)\}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

На завершающем этапе вычисляются значения $f(u, v, T)$ для произвольных вершин $u \in V_k$ и $v \in V_{k-1}$ и произвольного подмножества $T \subseteq [k-l-1, k-1) \setminus \{1\}$.

Нетрудно убедиться в том, что вес оптимального l-квазипирамидального маршрута (см. рис. 2) определяется соотношением

$$\min_{T \subseteq [k-l-1, k-1) \setminus \{1\}} \min_{u \in V_k} \min_{v \in V_{k-1}} \{f(u, v, T) + g(v, T, u)\}.$$

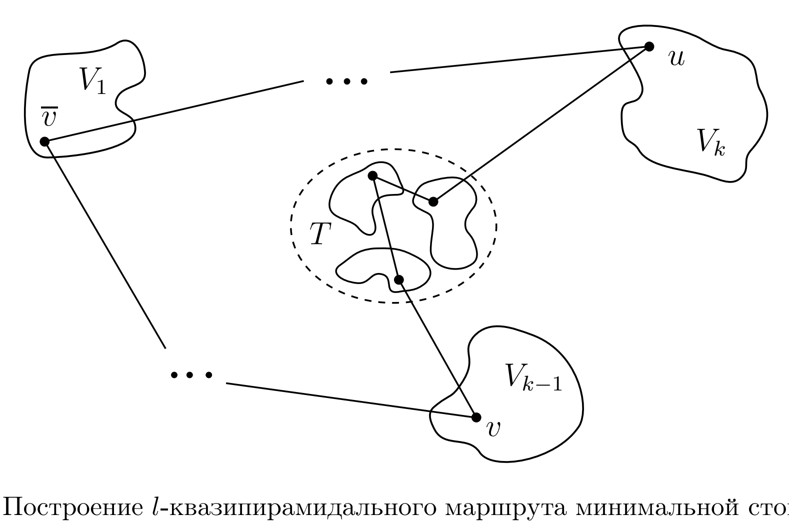


Рис. 2. Построение l-квазипирамидального маршрута минимальной стоимости.

Оценим трудоемкость описанного выше алгоритма. Необходимые для построения оптимального l-квазипирамидального маршрута значения $g(v, S, u)$ могут быть вычислены по формуле (1) за время $O(2^l n^3)$. Временная сложность вычисления базовых значений $f(u, v, (1, t))$ рекурсивной процедуры определения функции f не превышает $O(n^2)$. Далее, для произвольных фиксированных u, v и T трудоемкость вычислений по формулам (2) и (3) не превышает $O(2^l n)$, число вызовов которых ограничено сверху величиной $O(2^l n^2)$. Следовательно, суммарная временная сложность алгоритма не превышает $O(4^l n^3)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Суммарный объем памяти, используемой описанным в доказательстве теоремы 1 алгоритмом, совпадает по порядку величины с размером хеш-таблиц f и g и составляет $O(2^l n^2)$.

З а м е ч а н и е 2. Обобщенная задача коммивояжера с неотрицательной симметричной матрицей весов принадлежит классу FPT — параметрических задач, эффективно разрешимых при произвольном фиксированном значении параметра [7].

О п р е д е л е н и е. k-маршрут τ вида $v_1, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}, v_k, v_{j_{k-r-2}}, \ldots, v_{j_1}$, в котором $v_t \in V_t$ для каждого $t \in [1, k]$, называется *l-псевдопирамидальным маршрутом*, если неравенства $i_p - i_{p+1} \le l$ и $j_{p'} - j_{p'+1} \le l$ справедливы для произвольных $1 \le p < r$ и $1 \le p' < k - r - 2$.

Очевидно, произвольный l-квазипирамидальный маршрут является также и l-псевдопирамидальным. Покажем, что поиск оптимального l-псевдопирамидального маршрута может быть организован с помощью эффективной процедуры.

Теорема 2. *Для произвольной постановки задачи GTSP, задаваемой взвешенным графом $G = (V, E, w)$ и разбиением $V_1, \ldots, V_k$, l-псевдопирамидальный маршрут минимального (максимального) веса может быть найден за время $O(2^l k^{l+4} n^3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит из двух стадий. На первой стадии мы строим перечисление элементов множества Θ_l всевозможных l-псевдопирамидальных маршрутов вспомогательного полного *графа кластеров* $H = K_k$ на множестве вершин $\{1, \ldots, k\}$. Затем на второй стадии для каждого маршрута $\theta = (1, i_1, \ldots, i_{k-1}) \in \Theta_l$ и произвольной вершины $u \in V_1$ строится кратчайший u-u-маршрут $\rho(\theta, u)$ в подходящем вспомогательном $(k+1)$-дольном графе $H_{\theta,u}$, имеющем следующую структуру (рис. 3).

Доли π_0 и π_k графа $H_{\theta,u}$ состоят из единственной вершины $u \in V_1$, в то время как для каждого $j \in [1, k)$ доля π_j совпадает с кластером V_{i_j} исходного графа G, т.е. $\pi_j = V_{i_j}$. Произвольный подграф графа $H_{\theta,u}$, индуцированный двумя соседними долями π_j и π_{j+1}, является полным двудольным графом. Граф $H_{\theta,u}$ предполагается взвешенным, каждое его ребро наследует вес соответствующего ребра графа G.

По построению произвольный u-u-маршрут графа $H_{\theta,u}$ эквивалентен равному ему по весу подходящему l-квазипирамидальному k-маршруту в графе G (и наоборот). В частности, l-квазипирамидальный маршрут минимальной стоимости в графе G соответствует кратчайшему

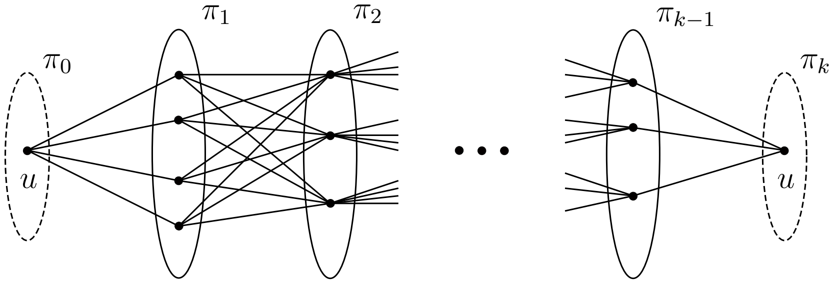


Рис. 3. Вспомогательный граф $H_{\theta,u}$ индуцированный маршрутом $\theta = \{1, i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ и вершиной $u \in V_1$.

пути $\rho(\theta^*, u^*)$ в графе H_{θ^*, u^*}, удовлетворяющему соотношению

$$w(\rho(\theta^*, u^*)) = \min\{w(\rho(\theta, u))\colon \theta \in \Theta_l, u \in V_1\}.$$

Трудоемкость обеих стадий, очевидно, не превосходит произведения трудоемкости $T(\Theta_l)$ перечисления всевозможных l-псевдопирамидальных маршрутов графа H (построения множества Θ_l), мощности кластера V_1 и временной сложности $O(k \cdot n^2)$ поиска кратчайшего u-u-пути в графе $H(\theta, u)$. Поскольку без ограничения общности всегда можно полагать, что $|V_1| = \min\{|V_i|\colon i \in [1, k]\} \leq n/k$, суммарная трудоемкость построения l-псевдопирамидального маршрута минимального веса составляет $T(\Theta_l) \cdot O(n^3)$.

Для построения множества Θ_l воспользуемся подходом, развивающим подход, предложенный в работе [17]. Введем в рассмотрение множества Θ_l^+ и Θ_l^- частичных (возможно, замкнутых) простых путей в графе H. Каждый элемент множества Θ_l^+ — путь $\theta^+ = (i_1, \ldots, i_c)$, удовлетворяющий условию $i_p - i_{p+1} \leq l$ при каждом $p \in [1, c)$. Аналогично для произвольного $\theta^- = (j_1, \ldots, j_d) \in \Theta_l^-$ соотношение $j_{q+1} - j_q \leq l$ выполнено при каждом $q \in [1, d)$. Текущее состояние описываемой ниже рекурсивной процедуры характеризуется упорядоченной тройкой $(i, S, \mathcal{E})$, состоящей из следующих компонент. Число $i \in [1, k-1]$ определяет глубину рекурсии. Множество $S = \{p_1, \ldots, p_m\}$ состоит из пар $(i, j) \in [1, k]^2$, помеченных знаками $+$ и $-$, удовлетворяющих условиям:

1) $p_1 = (1, s)^+$ и $p_2 = (t, 1)^-$ для некоторого подмножества $\{s, t\} \subset [1, k]$;

2) произвольной паре $p_a = (i_a, j_a)^+ \in S$ ($p_a = (i_a, j_a)^- \in S$) соответствует частичный (i_a, j_a)-путь $\theta_a \in \Theta_l^+$ ($\theta_a \in \Theta_l^-$), так что все пути $\theta_1, \ldots, \theta_m$ за исключением θ_1 и θ_2, пересекающихся в вершине 1, не имеют общих вершин.

Множество $\mathcal{E}$, последняя компонента состояния $(i, S, \mathcal{E})$, содержит ребра строящегося искомого l-псевдопирамидального маршрута.

Введем обозначение $Q = \bigcup\big\{\{i_a, j_a\}\colon p_a \in S\big\}$. Рекурсивная процедура начинается с рассмотрения следующего множества начальных состояний

$$\big\{(k-1, \{(1, s)^+, (t, 1)^-\}, \{(s, k), (k, t)\})\colon \{s, t\} \subset [1, k)\big\}.$$

На каждом шаге рекурсии возможна одна из перечисленных ниже альтернатив.

Case 1. Множество S текущего состояния содержит пару $p = (i, i)^+$ или $p = (i, i)^-$. В этом случае производим рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \setminus \{p\}, \mathcal{E})$.

Case 2. Множество S содержит пару $p_a = (i, j)^+$. Тогда в пути $\theta_a \in \Theta_l^+$ вершина i обладает некоторым последователем $t \in [i-l, i-1]$. Для произвольного $t \in [i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{j\})$ производим рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \cup \{(t, j)^+\} \setminus \{p_a\}, \mathcal{E} \cup \{(i, t)\})$.

Case 3. Множество S содержит пару $p_a = (i, j)^-$. Поскольку в этом случае путь $\theta_a \in \Theta_l^-$ с необходимостью содержит некоторого последователя $t \in [1, i-1]$ вершины i, для каждого $t \in [1, i-1] \setminus (Q \setminus \{j\})$ производим рекурсивный вызов с переходом в состояние $(i-1, S \cup \{(t, j)^-\} \setminus \{p_a\}, \mathcal{E} \cup \{(i, t)\})$.

Case 4 и 5. Варианты, в которых множество S содержит пару $(j, i)^+$ или $(j, i)^-$ могут быть рассмотрены по аналогии с Case 3 и Case 2 соответственно.

Case 6. В этом случае вершина i не принадлежит множеству Q и может выступать в качестве промежуточной вершины пути θ_a, соответствующего произвольной паре $p_a \in S$. Следовательно, каждой паре $p_a \in S$ нам потребуется сопоставить серию рекурсивных вызовов. Допустим, пара $p_a = (i_a, j_a)^+$. Обозначив через s и t предшественника и последователя вершины i в маршруте θ_a, совершаем рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \cup \{(i_a, s)^+, (t, j_a)^+\}, \mathcal{E} \cup \{(s, i), (i, t)\})$ для произвольного $\{s, t\} \subset ([1, i-1] \setminus (Q \setminus \{i_a\}) \times ([i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{j_a\}))$. Аналогично, паре $p_a = (i_a, j_a)^-$ сопоставим серию рекурсивных переходов в состояния $(i-1, S \cup \{(i_a, s)^-, (t, j_a)^-\}, \mathcal{E} \cup \{(s, i), (i, t)\})$ для произвольного $\{s, t\} \subset ([i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{i_a\}) \times ([1, i-1] \setminus (Q \setminus \{j_a\}))$.

Всякое состояние $(1, S, \mathcal{E})$, в котором с необходимостью $S = \{(1,1)^+, (1,1)^-\}$, является финальным. Компонента $\mathcal{E}$ содержит ребра очередного l-квазипирамидального маршрута в графе H, который, очевидно, может быть восстановлен за время $O(k)$.

Временная сложность описанной выше рекурсивной процедуры совпадает с трудоемкостью $O(2^l k^{l+3})$ процедуры, предложенной в доказательстве теоремы 3.7 работы [17], общая трудоемкость построения оптимального l-квазипирамидального маршрута составляет $T(\Theta_l) \cdot O(n^3) = O(2^l k^{l+3}) \cdot O(k) \cdot O(n^3) = O(2^l k^{l+4} n^3)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Как следует из теоремы 2, задача GTSP обладает FPT-алгоритмом относительно параметров k и l. Кроме того, поскольку $O(2^l (\log n)^{l+4} n^3)$ не превосходит $2^{O(l^3)} \cdot O(n^4)$, при $k = O(\log n)$ задача принадлежит классу FPT относительно параметризации, определяемой l-псевдопирамидальными маршрутами.

2. Полиномиально разрешимый подкласс

В этом разделе мы опишем полиномиально разрешимый подкласс геометрического частного случая задачи GTSP, известного под названием обобщенной задачи коммивояжера на сеточных кластерах (GTSP-GC). Постановка задачи GTSP-GC задается полным взвешенным графом $G = (V, E, w)$, вершины которого являются точками на плоскости, а кластеры задаются неявно ячейками прямоугольной целочисленной решетки так, что кластером является подмножество вершин, принадлежащих одной 1×1-ячейке[3]. Весовая функция индуцируется произвольной метрикой, заданной на множестве V.

Известно [1], что задача GTSP-GC NP-трудна в сильном смысле, обладает полиномиальными приближенными алгоритмами с фиксированной точностью. Кроме того, известно [14], что в случае, когда число k кластеров (непустых ячеек решетки) связано с числом вершин графа n одним из соотношений $k = O(\log n)$ или $k = n - O(\log n)$, задача обладает полиномиальными приближенными схемами (PTAS).

Для простоты изложения дальнейшие рассуждения мы проведем для евклидовой метрики, хотя аналогичные результаты легко могут быть получены и для некоторых других метрик, например, для метрики l_1.

Пусть далее H и W обозначают *высоту* и *ширину* (число строк и колонок) заданной решетки соответственно. Рассмотрим специальный случай задачи GTSP-GC, в котором один из параметров, например, H, не превосходит 2 (в то время как W может принимать произвольные значения). Назовем эту задачу GTSP-GC(H2) и покажем, что произвольная постановка такой задачи обладает l-квазипирамидальным маршрутом для некоторого l, не зависящего от числа вершин n и числа кластеров k. Тем самым, в силу теоремы 1 нами будет обоснована полиномиальная разрешимость задачи GTSP-GC(H2).

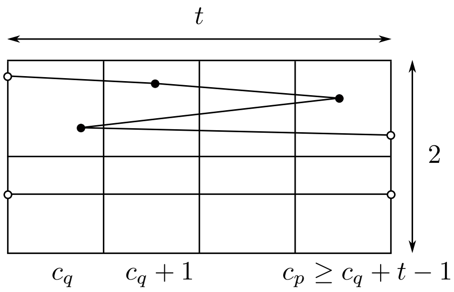
Наши рассуждения основаны на следующей процедуре преобразования маршрута, названной нами *распрямляющей*. По существу данная процедура близка к известным эвристикам локального поиска. Для ее описания пронумеруем столбцы решетки натуральными числами $1, 2, \ldots, W$ слева направо. Зададимся произвольным k-маршрутом τ. Сопоставив каждой его вершине v_i номер c_i содержащего ее столбца, получим последовательность σ номеров столбцов, перечисленных в порядке их посещения маршрутом τ. Без ограничения общности полагаем, что σ имеет вид $1 = c_1, c_2, \ldots, c_r = W, c_{r+1}, \ldots, c_s = 1$ для некоторых подходящих чисел r и s.

Пусть для некоторого числа t, значение которого мы зададим позже, найдутся индексы

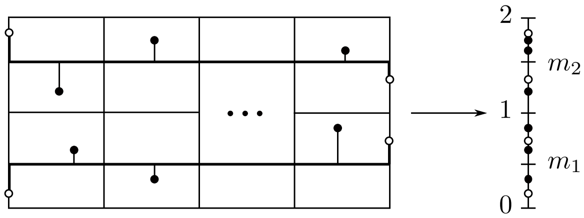
$$1 \le p < q < r, \quad \text{такие, что} \quad c_p - c_q \ge t - 1, \ \text{или} \tag{4}$$

$$r + 1 \le p' < q' \le s, \quad \text{такие, что} \quad c_{q'} - c_{p'} \ge t - 1. \tag{5}$$

[3]Вершины, лежащие на границах ячеек, произвольным образом относятся к одному из прилегающих кластеров.



(a) Фрагмент маршрута τ, содержащий t-зигзаг.



(b) Замещение t-зигзага фрагментом специального вида.

Рис. 4. Распрямляющая процедура.

В этом случае мы будем говорить, что маршрут τ содержит *t-зигзаг* (рис. 4a). Приведенный ниже алгоритм исключает из маршрута τ все t-зигзаги, замещая фрагмент маршрута, находящийся в соответствующих столбцах решетки, фрагментами специального вида (см. рис. 4b).

А л г о р и т м. Распрямляющая процедура

Внешний параметр: t.
Input: постановка задачи GTSP-GC(H2) и k-маршрут τ.
Output: k-маршрут τ', не содержащий t-зигзагов.

1: инициализируем $\tau' := \tau$.
2: **while** τ' содержит t-зигзаг **do**
3: пусть справедливо соотношение (4), случай соотношения (5) может быть рассмотрен по аналогии, кроме того, пусть $t' \geq t$, такое что выполняется равенство $c_p = c_q + t' - 1$;
4: через C обозначим множество столбцов решетки с номерами $c_q, \ldots, c_p$ (см. рис. 4a);
5: через $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, где $m \leq 2t' + 4$, обозначим последовательность ординат вершин, посещенных маршрутом τ в столбцах из множества C, дополненную ординатами точек пересечения левой и правой границ соответствующего подмножества столбцов;
6: построим 2-medians кластеризацию для выборки Y, обозначив через m_1 и m_2 найденные медианы;
7: заменим фрагменты маршрута τ', лежащие в столбцах из C, горизонтальными линиями с ординатами m_1 и m_2, связав их с вершинами, перечисленными на шаге 5, прямолинейными отрезками (рис. 4b)
8: **end while**
9: ответом является маршрут τ'.

Для определения значения t заметим, что вес исключаемых на каждой итерации алгоритма фрагментов допускает очевидную нижнюю оценку $t' + 2(t' - 1) + t' - 2 = 4t' - 4$. В то же время, вес добавляемых (на шаге 7) фрагментов не превосходит $2t' + 2F(Y, [0, 2])$, где $F(Y, S)$ — оптимальное значение целевой функции задачи 2-medians для выборки Y, распределенной на отрезке S. Верхняя оценка для $F(Y, S)$ следует из приведенной ниже леммы.

Лемма. *Для произвольной выборки* $p_1, \ldots, p_n$ *из отрезка* $[0, 1]$ *найдутся точки* m_1, $m_2 \in [0, 1]$, *для которых*

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{|p_i - m_1|, |p_i - m_2|\} \leq n/6. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, рассмотрим следующую антагонистическую игру двух игроков с нулевой суммой. Стратегиями первого игрока являются n-элементные выборки $\xi = (p_1, \ldots, p_n)$ из отрезка $[0, 1]$. Множество стратегий второго игрока состоит из всевозможных разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ на два подмножества C_1 и C_2. Без ограничения общности, полагаем, что $p_1 \leq \ldots \leq p_n$ и для произвольных $i_1 \in C_1$ и $i_2 \in C_2$ справедливо $i_1 < i_2$.

Платежная функция

$$F(\xi,(C_1,C_2)) = \sum_{i\in C_1}|p_i - m_1| + \sum_{i\in C_2}|p_i - m_2| = \sum_{i=1}^{n}\min\{|p_i - m_1|, |p_i - m_2|\},$$

где m_1 и m_2 — медианы подвыборок $\xi_1 = (p_i\colon i\in C_1)$ и $\xi_2 = (p_i\colon i\in C_2)$ соответственно.

Нетрудно убедиться в том, что описанная выше игра не имеет цены. Для завершения доказательства леммы достаточно оценить сверху нижнюю цену игры

$$v_* = \sup_{\xi}\inf_{C_1,C_2} F(\xi,(C_1,C_2)). \tag{7}$$

Учитывая, что соотношение

$$\sum_{i=1}^{\nu}|p_i - m| = \begin{cases} \sum\limits_{i=k+1}^{2k} p_i - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i, & \text{если } \nu = 2k,\\ \sum\limits_{i=k+2}^{2k+1} p_i - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i, & \text{если } \nu = 2k+1,\end{cases}$$

справедливо для произвольного $\nu\in\mathbb{N}$, выборки $p_1,\ldots,p_\nu$ и ее медианы m, убеждаемся, что v_* является оптимальным значением подходящей задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} &v_* = \max\ u\\ &\sum_{i=\lceil|C_1|/2\rceil+1}^{|C_1|} p_i - \sum_{i=1}^{\lfloor|C_1|/2\rfloor} p_i + \sum_{i=\lceil|C_2|/2\rceil+1}^{|C_2|} p_{|C_1|+i} - \sum_{i=1}^{\lfloor|C_2|/2\rfloor} p_{|C_1|+i} \ge u \quad (C_1\cup C_2 = [1,n]),\\ &0\le p_1\le\ldots\le p_n\le 1.\end{aligned}$$

Применяя, например, метод последовательного исключения неизвестных, нетрудно показать, что $v_*\le n/6$, что завершает доказательство леммы, поскольку внутренний inf в соотношении (7) достижим при произвольной выборке ξ.

З а м е ч а н и е 4. Для произвольного $n > 2$ оценка (6) является достижимой.

Возвращаясь к обсуждению алгоритма, из леммы и по построению последовательности Y получаем $F(Y,[0,2])\le 2(1/6)(2t'+4)$. Следовательно, шаг 7 произвольной итерации алгоритма не увеличивает стоимость маршрута τ' при условии $2t'+2F(Y,[0,2])\le 2t'+4t'/3+8/3\le 4t'-4$, справедливом при $t'\ge 10$.

Пусть далее ячейки решетки, задающей условие задачи (следовательно, и порождаемые ей кластеры) пронумерованы, как на рис. 5. По доказанному выше для $t'\ge 10$ произвольному k-маршруту алгоритм сопоставляет 20-квазипирамидальный маршрут, не превосходящий его по весу.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Произвольная постановка задачи* GTSP-GC(H2) *обладает оптимальным* 20-*квазипирамидальным маршрутом.*

В качестве непосредственного следствия из теорем 1 и 3 получаем окончательный результат: оптимальное решение произвольной постановки задачи GTSP-GC(H2) может быть найдено за время $O(n^3)$.

1	3	5		$k-1$
2	4	6		k

Рис. 5. Нумерация кластеров.

Заключение

В данной статье классическое понятие пирамидального маршрута распространено на случай графов с частично упорядоченными множествами вершин специального типа, в которых порядок индуцируется линейным порядком, задаваемым на множестве кластеров, что соответствует постановкам обобщенной задачи коммивояжера (GTSP). Нами показано, что при произвольной весовой функции оптимальные l-квази- и l-псевдопирамидальные маршруты могут быть найдены за время $O(4^l n^3)$ и $O(2^l k^{l+4} n^3)$ соответственно при произвольном фиксированном значении l. Кроме того, нами описан нетривиальный подкласс задачи GTSP такой, что оптимум всякой относящейся к нему постановки достигается именно на l-квазипирамидальном маршруте при $l = 20$, т. е. может быть найден за полиномиальное время. Данный подкласс является геометрическим и соответствует задаче GTSP-GC с решеткой, число строк которой не превосходит двух.

Возвращаясь к описанию сложностного статуса задачи GTSP-GC, открытым остается вопрос о полиномиальной разрешимости подкласса задачи GTSP-GC(Hh), определяемого решетками произвольной фиксированной высоты h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters / B. Bhattacharya, A. Ćustić, A. Rafiey, A. Rafiey, V. Sokol // Combinatorial Optimization and Applications: Proc. 9th Internat. Conf. (COCOA 2015). Cham: Springer International Publ., 2015. P. 110–125. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486). doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_9 .
2. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 / A. Baburin, F. Della Croce, E. K. Gimadi, Y. V. Glazkov, V. T. Paschos // Discrete Appl. Math. 2009. Vol. 157, no. 9. P. 1988–1992. doi:10.1134/S1990478909010074 .
3. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
4. **Balas E.** New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems // Ann. Oper. Res. 1999. Vol. 86. P. 529–558.
5. **Chentsov A., Khachay M., Khachay D.** Linear time algorithm for precedence constrained asymmetric generalized traveling salesman problem // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49, no. 12. P. 651–655. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.767 .
6. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results: Proc. Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity / ed. J.F. Traub. Orlando: Acad. Press., 1976. P. 441.
7. **Cygan M. et al.** Parameterized Algorithms. Cham;Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2015. 613 p. doi: 10.1007/978-3-319-21275-3 .
8. **Enomoto H., Oda Y., Ota K.** Pyramidal tours with step-backs and the asymmetric traveling salesman problem // Discrete Appl. Math. 1998. Vol. 87, no. 1–3. P. 57–65.
9. Fine-grained complexity analysis of two classic TSP variants / M. de Berg, K. Buchin, B. M. P. Jansen, G. Woeginger // Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 2016. Vol. 55. P. 5:1–5:14. (43rd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2016) / eds. I. Chatzigiannakis, M. Mitzenmacher, Y. Rabani, D. Sangiorgi. Dagstuhl, Germany, 2016.) ISBN 978-3-95977-013-2 .
10. **Fischetti M., Gonzalez J., Toth P.** A branch-and-cut algorithm for the symmetric generalized traveling salesman problem // Operations Research. 1997. Vol. 45, no.3. P. 378–394.
11. **Gimadi E. K., Rykov I. A.** On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by m nonadjacent cycles of maximum total weight // Dokl. Math. 2016. Vol. 93, no. 1. P. 117–120. doi: 10.1134/S1064562416010233 .
12. **Gutin G., Punnen A. P.** The traveling salesman problem and its variations. Boston: Springer, 2007. 830 p. doi: 10.1007/b101971 .
13. **Khachay M., Neznakhina K.** Approximability of the minimum-weight k-size cycle cover problem // J. Glob. Optim. 2016. Vol. 66, no. 1. P. 65–82. doi:10.1007/s10898-015-0391-3 .
14. **Khachay M., Neznakhina K.** Towards a PTAS for the generalized TSP in grid clusters // AIP Conf. Proceedings. 2016. Vol. 1776, 050003. doi: 10.1063/1.4965324 .

15. **Klyaus P.** Generation of testproblems for the traveling salesman problem // Preprint Inst. Mat. Akad. Nauk. BSSR. Minsk, 1976. No. 16 (in Russian).
16. **Oda Y.** An asymmetric analogue of van der Veen conditions and the traveling salesman problem // Discrete Appl. Math. 2001. Vol. 109, no. 3. P. 279–292. doi: 10.1016/S0166-218X(00)00273-0 .
17. **Oda Y., Ota K.** Algorithmic aspects of pyramidal tours with restricted jump-backs // Interdiscip. Inform. Sci. 2001. Vol. 7, no. 1. P. 123–133. doi: 10.4036/iis.2001.123 .
18. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4, no. 3. P. 237–244. doi: 10.1016/0304-3975(77)90012-3 .
19. **Sahni S., Gonzales T.** P-complete approximation problems // J. ACM. 1976. Vol. 23, no. 3. P. 555–565. doi: 10.1145/321958.321975 .
20. Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: A survey / R. E. Burkard, V. G. Deineko, R. van Dal, J. A. A. van der Veen, G. J. Woeginger // SIAM Rev. Sept. 1998. Vol. 40, no. 3. P. 496–546. doi: 10.1137/S0036144596297514 .

Хачай Михаил Юрьевич
доктор физ.-мат. наук, проф. РАН, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
Омский государственный технический университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Поступила 29.05.17

Незнахина Екатерина Дмитриевна
аспирант, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: eneznakhina@yandex.ru

REFERENCES

1. Bhattacharya B., Ćustić A., Rafiey A., Rafiey A., Sokol V. Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters. Combinatorial Optimization and Applications, Proc. 9th Internat. Conf. (COCOA 2015), Cham, Springer Internat. Publ., 2015, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486, pp. 110–125. doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_9 .
2. Baburin A., Della Croce F., GimadiE. K., Glazkov Y. V., Paschos V. T. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2. *Discrete Appl. Math.*, 2009, vol. 157, no. 9, pp. 1988–1992. doi: 10.1134/S1990478909010074 .
3. Arora S. Polynomial time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems. *J. ACM*, 1998, vol. 45, no. 5, pp. 753–782.
4. Balas E. New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems. *Ann. Oper. Res.*, 1999, vol. 86, pp. 529–558.
5. Chentsov A., Khachay M., Khachay D. Linear time algorithm for precedence constrained asymmetric generalized traveling salesman problem. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, no. 12, pp. 651–655. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.767 .
6. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results, Proc. Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity, ed. J.F. Traub, Orlando: Acad. Press., 1976, pp. 441.
7. Cygan M., Fomin F.V., Kowalik L., Lokshtanov D., Marx D., Pilipczuk Marcin, Pilipczuk Michal, Saurabh S. *Parameterized algorithms*. Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, Springer, 2015, 613 p. doi: 10.1007/978-3-319-21275-3 .
8. Enomoto H., Oda Y., Ota K. Pyramidal tours with step-backs and the asymmetric traveling salesman problem. *Discrete Appl. Math.*, 1998, vol. 87, no. 1–3, pp. 57–65.
9. M. de Berg, K. Buchin, B. M. P. Jansen, G. Woeginger. Fine-grained complexity analysis of two classic TSP variants. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), 2016, vol. 55, pp. 5:1–5:14, 43rd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2016), eds. I. Chatzigiannakis, M. Mitzenmacher, Y. Rabani, D. Sangiorgi (Dagstuhl, Germany, 2016). ISBN 978-3-95977-013-2 .

10. Fischetti M., Gonzalez J., Toth P. A branch-and-cut algorithm for the symmetric generalized traveling salesman problem // *Operations Research*, 1997, vol. 45, no.3, pp. 378–394.
11. Gimadi E. K., Rykov I. A. On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by m nonadjacent cycles of maximum total weight. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 1, pp. 117–120. doi:10.1134/S1064562416010233 .
12. Gutin G., Punnen A. P. *The traveling salesman problem and its variations.* Boston: Springer US, 2007, 830 p. doi: 10.1007/b101971 .
13. Khachay M., Neznakhina K. Approximability of the minimum-weight k-size cycle cover problem. *J. Glob. Optim.*, 2016, vol. 66, no. 1, pp. 65–82. doi:10.1007/s10898-015-0391-3 .
14. Khachay M., Neznakhina K. Towards a PTAS for the generalized TSP in grid clusters. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1776, 050003. doi: 10.1063/1.4965324 .
15. Klyaus P. Generation of testproblems for the traveling salesman problem. *Preprint* Inst. Mat. Akad. Nauk. BSSR. Minsk, 1976, no. 16 (in Russian).
16. Oda Y. An asymmetric analogue of van der Veen conditions and the traveling salesman problem. *Discrete Appl. Math.*, 2001, vol. 109, no. 3, pp. 279–292. doi: 10.1016/S0166-218X(00)00273-0 .
17. Oda Y., Ota K. Algorithmic aspects of pyramidal tours with restricted jump-backs. *Interdiscip. Inform. Sci.*, 2001, vol. 7, no. 1, pp. 123–133. doi: 10.4036/iis.2001.123 .
18. Papadimitriou C. Euclidean TSP is NP-complete. *Theoret. Comput. Sci.*, 1977, vol. 4, no. 3, pp. 237–244. doi: 10.1016/0304-3975(77)90012-3 .
19. Sahni S., Gonzales T. P-complete approximation problems. *J. ACM*, 1976, vol. 23, no. 3, pp. 555–565. doi: 10.1145/321958.321975 .
20. R. E. Burkard, V. G. Deineko, R. van Dal, J. A. A. van der Veen, G. J. Woeginger. Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: A survey. *SIAM Rev. Sept.*, 1998, vol. 40, no. 3, pp. 496–546. doi: 10.1137/S0036144596297514 .

The paper was received by the Editorial Office on May 29, 2017.

Mikhail Yur'evich Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Omsk State Technical University, Omsk, 644050 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru .

Ekaterina Dmitrievna Neznakhina, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: eneznakhina@yandex.ru .