ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.6

АППРОКСИМАЦИЯ МЕРЫ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТНОГО МНОЖЕСТВА[1]

О. В. Хамисов

В работе предлагается методика построения оценок сверху и снизу меры выпуклого компактного множества. Методика основана на использовании экстремальных вписанных и описанных параллелепипедов. Предполагается, что вычисление меры параллелепипеда не встречает вычислительных трудностей. Для задачи построения вписанного параллелепипеда максимального объема показано сведение к задаче выпуклого программирования с экспоненциальным числом ограничений. Отмечается, что в некоторых важных частных случаях можно избежать экспоненциального числа ограничений. Предлагается алгоритм итеративной внутренней и внешней аппроксимации компактного множества параллелепипедами. Оценивается трудоемкость алгоритма. Приводятся результаты небольшого численного эксперимента. Обсуждается возможность построения экстремальных относительно меры параллелепипедов. В заключении указываются преимущества предлагаемой методики.

Ключевые слова: мера, выпуклое компактное множество, экстремальные параллелепипеды, внешняя и внутренняя аппроксимация.

O. V. Khamisov. Approximation of the measure of a convex compact set.

We consider an approach to constructing upper and lower bounds for the measure of a convex compact set. The approach is based on extremal inscribed and circumscribed parallelepipeds. It is assumed that the measure of a parallelepiped can be easily calculated. It is shown that the problem of constructing an inscribed parallelepiped of maximum volume is reduced to a convex programming problem with exponential number of constraints. In some particular important cases the exponential number of constraints can be avoided. We suggest an algorithm for the iterative inner and outer approximation of a convex compact set by parallelepipeds. The complexity of the algorithm is estimated. The results of a preliminary numerical experiment are given. The possibility of constructing parallelepipeds that are extremal with respect to measure is discussed. Some advantages of the proposed approach are specified in the conclusion.

Keywords: measure, convex compact set, extremal parallelepiped, inner and outer approximation.

MSC: 28A12, 90C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-272-279

Введение

Пусть выпуклое компактное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ задано системой неравенств

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}, \tag{0.1}$$

где $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, — выпуклые функции. Везде далее предполагается, что $\int(X) \neq \varnothing$. Кроме того, задана счетно-аддитивная абсолютно непрерывная мера μ (см. [1]), областью определения которой являются параллелепипеды (или брусы в терминологии [2]):

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{x}_j \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j,\ j = 1, \ldots, n\}, \tag{0.2}$$

$-\infty < \underline{x}_j < \overline{x}_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, n$. Последнее с практической точки зрения означает, что вычисление $\mu(\Pi)$ не представляет проблем. Для заданного $\varepsilon > 0$ требуется определить величины $\underline{\mu}$ и $\overline{\mu}$ такие, что

$$\underline{\mu} \leqslant \mu(X) \leqslant \overline{\mu} \quad \text{и} \quad \overline{\mu} - \underline{\mu} \leqslant \varepsilon.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-08986).

В работе предлагается итеративная эвристическая процедура, на каждом шаге k которой строятся величины $\underline{\mu}_k$, $\overline{\mu}_k$: $\underline{\mu}_{k-1} \leqslant \underline{\mu}_k$, $\overline{\mu}_{k-1} > \overline{\mu}_k$, $\underline{\mu}_k \leqslant \mu(X) \leqslant \overline{\mu}_k$, $k = 1, \ldots$ Как только $\overline{\mu}_{k'} - \underline{\mu}_{k'} \leqslant \varepsilon$ для некоторого k', процедура останавливается.

Идея, лежащая в основе предлагаемого в работе алгоритма, имеет простую геометрическую интерпретацию и отличается от идеологии методов Монте-Карло [3], случайного блуждания и марковских цепей [4]. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество всевозможных параллелепипедов вида (0.2). Две процедуры лежат в основе алгоритма: построение параллелепипеда минимальной меры $\overline{\Pi}$, содержащего X и построение параллелепипеда максимальной меры, содержащегося в X:

$$\overline{\Pi} \in \operatorname{Arg\,min}\{\mu(\Pi)\colon \Pi \supset X,\ \Pi \in \mathfrak{P}\}, \quad \underline{\Pi} \in \operatorname{Arg\,max}\{\mu(\Pi)\colon \Pi \subset X,\ \Pi \in \mathfrak{P}\}. \tag{0.3}$$

Вместо параллелепипедов можно рассматривать и другие множества, например, многогранники [5], однако параллелепипеды выбраны потому, что, как правило, в прикладных задачах мера параллелепипеда вида (0.2) легко вычислима.

1. Внешняя и внутренняя аппроксимация множества X

Решение задач (0.3) в общем случае может оказаться исключительно сложным делом, поэтому первоначально рассмотрим задачи описывания параллелепипеда минимального объема вокруг X и вписывания параллелепипеда максимального объема в X. Это, очевидно, частные случаи задач (0.3), в которых в качестве меры выступает объем.

Для нахождения внешней аппроксимации множества X стандартным образом решаются $2n$ задач выпуклого программирования

$$\pm x_j \to \min, \quad x \in X, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Пусть $\overline{\Pi}$ — параллелепипед минимального объема, полученный в результате решения задач (1.1). Очевидно $\overline{\Pi} \supset X$, следовательно, $\mu(\overline{\Pi}) \geqslant \mu(X)$ и мы получаем оценку сверху меры $\mu(X)$.

Внутренняя аппроксимация X строится при помощи параллелепипеда максимального объема, вписанного в X. Пусть $v^j, j = 1, \ldots, 2^n$, — вершины куба $C = \{x \in \mathbb{R}^n\colon -1 \leqslant x_j \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, n\}$. Вписываемый параллелепипед будем искать в следующем виде:

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}(z, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : z_j - \delta_j \leqslant x_j \leqslant z_j + \delta_j,\ j = 1, \ldots, n\}. \tag{1.2}$$

Здесь z — центр параллелепипеда, δ — вектор длин полуосей. Традиционно вместо самого объема можно использовать его логарифм:

$$\varphi(\delta) = \sum_{j=1}^{n} \ln(\delta_j). \tag{1.3}$$

Вершинами $\underline{\Pi}(z, \delta)$ являются точки $w^j = z + (v^j)^T I\delta$, $j = 1, \ldots, 2^n$, I — $n \times n$ единичная матрица. В силу выпуклости функций f_i условие $\Pi(z, \delta) \subset X$ эквивалентно условию

$$\max\{f_i(x)\colon x \in \underline{\Pi}(z, \delta)\} = \max_{1 \leqslant j \leqslant 2^n} f_i(w^j)\} \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

или системе неравенств

$$f_i(z + (v^j)^T I\delta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, 2^n. \tag{1.5}$$

Из сказанного следует справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Задача вписывания параллелепипеда максимального объема* (0.2) *в выпуклое компактное множество* (0.1) *представляет собой задачу выпуклого программирования, заключающуюся в максимизации по совокупности переменных* (z, δ) *функции* (1.3) *при ограничениях* (1.5), *число которых экспоненциально, и при условии неотрицательности* $\delta \geqslant 0$.

Параллелепипеды максимального и минимального объемов могут быть использованы и в случае произвольной меры μ. Конечно, в этом случае аппроксимация сверху и снизу меры $\mu(X)$ может оказаться далека от оптимальной, тем не менее предложенную выше конструкцию внутренней аппроксимации можно распространить и не только на аппроксимацию объема X.

Пусть μ — так называемая логарифмически вогнутая вероятностная мера [6], т. е. $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ и для любых $\Pi_1 \in \mathfrak{P}$ и $\Pi_2 \in \mathfrak{P}$ справедливо $\mu(\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2) \geqslant (\mu(\Pi_1))^{\lambda_1} (\mu(\Pi_2))^{\lambda_2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_j \geqslant 0, j = 1, 2$. В этом случае логарифм меры — вогнутая функция, следовательно, вписывание параллелепипеда максимальной логарифмически вогнутой меры есть снова задача выпуклого программирования, хотя и по-прежнему с экспоненциальным числом ограничений. Положительным здесь является тот факт, что многие распределения определяются логарифмически вогнутыми мерами, например, невырожденное нормальное распределение, распределение Дирихле, гамма-распределение, бета-распределение и т.д. (см. снова [6]). В качестве обобщения, вместо логарифма можно использовать и другие функции [7].

П р и м е р. Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ задано неравенствами

$$X = \{-\ln(x_1) + x_2 \leqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 16 \leqslant 0\}.$$

Соответствующая задача по вписыванию прямоугольника максимальной площади (1.3)–(1.5) имеет вид

$$\begin{gathered}\ln(\delta_1) + \ln(\delta_2) \to \max,\\ -\ln(z_1+\delta_1) + (z_2+\delta_2) \leqslant 0, \quad -\ln(z_1+\delta_1) + (z_2-\delta_2) \leqslant 0,\\ -\ln(z_1-\delta_1) + (z_2-\delta_2) \leqslant 0, \quad -\ln(z_1-\delta_1) + (z_2+\delta_2) \leqslant 0,\\ (z_1+\delta_1)^2 + (z_2+\delta_2)^2 \leqslant 16, \quad (z_1+\delta_1)^2 - (z_2-\delta_2)^2 \leqslant 16,\\ (z_1-\delta_1)^2 - (z_2-\delta_2)^2 \leqslant 16, \quad (z_1-\delta_1)^2 + (z_2+\delta_2)^2 \leqslant 16,\\ \delta_1 \geqslant 0, \delta_2 \geqslant 0.\end{gathered}$$

Решением этой задачи является пара $z_v^* = (1.944, -1.382)$, $\delta_v^* = (1.076, 1.240)$. Пусть далее $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — двумерная нормально распределенная величина с независимыми компонентами ξ_1 и ξ_2, $a_1 = 1$, $\sigma_1 = 1.2$ — параметры распределения ξ_1, $a_2 = -3$, $\sigma_2 = 0.5$ — параметры распределения ξ_2. Логарифм вероятности попадания ξ в параллелепипед вида (1.2) при $n = 2$ есть функция

$$F(z,\delta) = \sum_{j=1}^{2} \ln\Big(\Phi\Big(\frac{z_j+\delta_j-a_j}{\sigma_j}\Big) - \Phi\Big(\frac{z_j-\delta_j-a_j}{\sigma_j}\Big)\Big),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа. Максимизируя F при тех же ограничениях, что и ранее, найдем решение $z_p^* = (1.099, -2.646)$, $\delta_p^* = (0.943, 0.793)$, определяющее прямоугольник наибольшей вероятностной меры, вписанный в X. Вероятностная мера прямоугольника максимальной площади равна 0.112, прямоугольника максимальной меры — 0.453. Геометрическая интерпретация обоих решений дана на рисунке ниже.

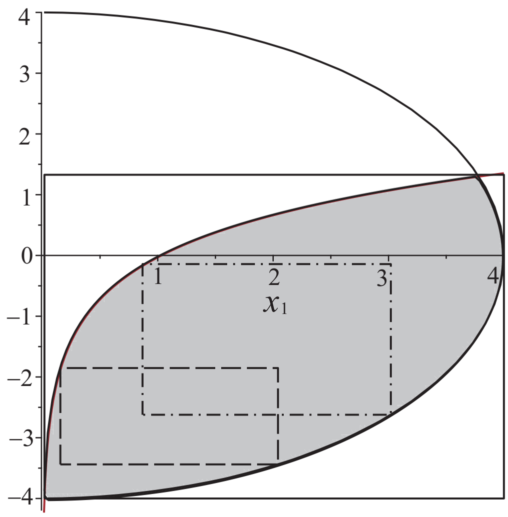
Если выпуклые функции f_i сепарабельны, $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j)$, то задача по вписыванию параллелепипеда упрощается. В этом случае условие (1.4) с учетом (1.2) примет вид

$$\max\{f_i(x)\colon x \in \underline{\Pi}(z,\delta)\} = \sum_{j=1}^{n} \max\{f_{ij}(z_j-\delta_j), f_{ij}(z_j+\delta_j)\} \leqslant 0, \quad i = 1,\dots,m.$$

Стандартным образом вводя дополнительные переменные y_{ij}, перепишем последние неравенства в следующем виде:

$$f_{ij}(z_j-\delta_j) - y_{ij} \leqslant 0,\ f_{ij}(z_j+\delta_j) - y_{ij} \leqslant 0,\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leqslant 0,\ i = 1,\dots,m. \tag{1.7}$$



Вписанный в выпуклый компакт примера (см. выше) прямоугольник максимальной площади изображен штрих-пунктирной линией, прямоугольник максимальной вероятностной меры — штриховой линией, описанный прямоугольник минимальной площади — сплошной линией.

Результирующая задача выпуклого программирования будет состоять в минимизации по переменным (z, y, δ) функции (1.3) при ограничениях (1.6), (1.7) и $\delta \geqslant 0$. В этом случае число ограничений уже не является экспоненциальным.

Наиболее простая ситуация возникает при вписывании параллелепипеда в выпуклый многогранник. Функции f_i являются аффинными, $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_j$, и предполагается, что многогранное множество X ограничено. Неравенства (1.4) превращаются в следующие:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\delta_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Данная задачи при условии $\delta_j = \delta,\ j = 1, \ldots, n$, т. е. при вписывании куба максимального объема, рассматривалась в [8]. В этом случае задача вписывания эквивалентна задаче линейного программирования.

Замечание. Задачу о вписывании параллелепипеда максимального объема в многогранник можно обобщить на случай вписывания множества, определяемого взвешенной гёльдеровской нормой, в многогранник. Для краткости, множество

$$G(z, \delta) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n \Big|\frac{x_j - z_j}{\delta_j}\Big|^p \leqslant 1\Big\},$$

$p \geqslant 1$, будем называть *гёльдеровским* (предполагается $\delta_j > 0\ \forall j$). $G(z, \delta)$ — симметричное относительно z множество, δ_j — расстояние от центра до границы множества вдоль j-го орта. Будем считать, что функция (1.3) по-прежнему характеризует объем $G(z, \delta)$. Выполнение включения $G(z, \delta) \subset X$ эквивалентно условиям

$$\max\Big\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \colon x \in G(z, \delta)\Big\} \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.8}$$

Каждая из задач (1.8) — задача выпуклого программирования, которая решается при помощи метода неопределенных множителей Лагранжа, и компоненты точек максимума $x^{i,*}$ определяются следующим образом:

$$x_j^{i,*} = z_j + \frac{|a_{ij}|^{1/(p-1)}\delta_j^{p/(p-1)}}{\Big(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^{p/(p-1)}\delta_k^{p/(p-1)}\Big)^{1/p}}\operatorname{sign}(a_{ij}), \quad j = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\operatorname{sign}(a_{ij})$ — знак a_{ij}. Тогда максимальные значения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{i,*} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j + \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \delta_j^q\Big)^{1/q}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.9}$$

где $q\colon \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Из (1.8) и (1.9) следует, что задачу максимизации $\varphi(\delta)$ при ограничениях (1.8) (и $\delta_j > 0\ \forall j$) можно заменить задачей максимизации $\varphi(\delta)$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j + \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \delta_j^q\Big)^{1/q} \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и $\delta_j \geqslant \epsilon$ при достаточно малом $\epsilon > 0$. Таким образом, задача вписывания максимального (в смысле максимизации функции φ) гёльдеровского множества в многогранник может быть сформулирована в виде задачи выпуклого программирования с использованием нормы, сопряженной норме, при помощи которой определяется само гёльдеровское множество.

2. Алгоритм

Алгоритм аппроксимации меры X основан на следующей идее. Первоначально, решая $2n$ задач выпуклого программирования (1.1), описываем вокруг X параллелепипед наименьшего объема $\Pi^{out} \supset X$, $\Pi^{out} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \underline{x}^{out} \leqslant x \leqslant \overline{x}^{out}\}$, и решая задачу выпуклого программирования (1.5), (1.3) при $\delta \geqslant 0$, вписываем в X параллелепипед максимального объема $\Pi^{in} \subset X$, $\Pi^{in} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \underline{x}^{in} \leqslant x \leqslant \overline{x}^{in}\}$. Определим множества

$$D_1 = \{x \in X\colon \underline{x}_1^{out} \leqslant x_1 \leqslant \underline{x}_1^{in}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > 1\}, \tag{2.1}$$

$$D_{n+1} = \{x \in X\colon \overline{x}_1^{in} \leqslant x_1 \leqslant \overline{x}_1^{out}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > 1\}, \tag{2.2}$$

$$D_i = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < i; \underline{x}_i^{out} \leqslant x_i \leqslant \underline{x}_i^{in}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > i\}, \tag{2.3}$$

$$D_{n+i} = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < i; \overline{x}_i^{in} \leqslant x_i \leqslant \overline{x}_i^{out}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > i\}, \tag{2.4}$$

$$i = 2, \ldots, n-1, \tag{2.5}$$

$$D_n = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < n; \underline{x}_n^{out} \leqslant x_n \leqslant \underline{x}_n^{in}\}, \tag{2.6}$$

$$D_{2n} = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < n; \overline{x}_n^{in} \leqslant x_n \leqslant \overline{x}_n^{out}\}. \tag{2.7}$$

В силу построения

$$X = \Pi^{in} \cup D_1 \cup \ldots \cup D_{2n}$$

и множества $int(X), int(D_i), i = 1, \ldots, 2n$ попарно не пересекаются. Тогда

$$\mu(X) = \mu(\Pi^{in}) + \sum_{i=1}^{2n} \mu(D_i),$$

следовательно, $\mu(\Pi^{in})$ служит оценкой снизу $\mu(X)$. Далее, поскольку $\Pi^{out} \supset X$, то $\mu(\Pi^{out})$ служит оценкой сверху $\mu(X)$. Эти оценки можно уточнить следующим образом. Впишем в каждое множество D_i параллелепипед максимального объема $\Pi_i^{in} \subset D_i$ и опишем вокруг каждого D_i параллелепипед минимального объема $\Pi_i^{out} \supset D_i$. Тогда величины

$$\underline{\mu} = \mu(\Pi^{in}) + \sum_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_i^{in}), \quad \overline{\mu} = \mu(\Pi^{in}) + \sum_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_i^{out})$$

будут более точными оценками $\mu(X)$: $\underline{\mu} \leqslant \mu(X) \leqslant \overline{\mu}$. Затем, процедуру разбиения, аналогичную (2.1)–(2.7), можно повторить для каждого множества D_i, роль X будут играть уже множества D_i.

Перейдем к описанию алгоритма.

I. Инициализация. Входные данные: множество X, мера μ, относительная точность Δ, максимальное количество итераций $K_{\max}$.

I.1 Построить параллелепипед наименьшего объема $\Pi^{out} \supset X$, вычислить $\mu(\Pi^{out})$;

I.2 Построить параллелепипед максимального объема $\Pi^{in} \subset X$, вычислить $\mu(\Pi^{in})$;

I.3 Определить $\mathcal{D} = \{X\}$, определить $\mu^{out} = \mu(\Pi^{out})$, $\mu^{in} = \mu(\Pi^{in})$, установить $k \leftarrow 0$.

II. Итеративная часть. Перед началом каждой итерации имеем: набор множеств $\mathcal{D}$; для каждого $D \in \mathcal{D}$ есть внешний параллелепипед (не обязательно минимального объема) $\Pi^{out}(D) \supset D$ и внутренний параллелепипед (обязательно максимального объема) $\Pi^{in}(D) \subset D$; оценка снизу $\mu^{in}\colon \mu^{in} \leqslant \mu(X)$, оценка сверху $\mu^{out}\colon \mu^{out} \geqslant \mu(X)$.

II.1 Если $\dfrac{\mu^{out} - \mu^{in}}{\mu^{out}} \leqslant \Delta$, то стоп;

II.2 Найти $D_k \in \operatorname{Argmax}\{\mu(\Pi^{out}(D)) - \mu(\Pi^{in}(D))\colon D \in \mathcal{D}\}$;

II.3 Построить параллелепипед наименьшего объема $\Pi_k^{out} \supset D_k$;

II.4 Построить $2n$ множеств D_{ki} по аналогии с (2.1)–(2.7), заменяя в этих формулах X на D_k, Π^{out} на Π_k^{out}, Π^{in} на Π_k^{in}, D_i на D_{ki};

II.5 Построить $2n$ параллелепипедов $\Pi_{ki}^{out} \supset D_{ki}$ по аналогии с (2.1)–(2.7), заменяя в этих формулах X на Π_k^{out}, Π^{out} на Π_k^{out}, Π^{in} на Π_k^{in}, D_i на Π_{ki}^{out};

II.6 Построить параллелепипеды наибольшего объема $\Pi_{ki}^{in} \subset D_{ki}$, $i = 1, \ldots, 2n$;

II.7 Вычислить $\mu^{in} = \mu^{in} + \sum\limits_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_{ki}^{in})$;

II.8 Вычислить $\mu^{out} = \mu^{out} - \mu(\Pi_k^{out}) + \mu(\Pi_k^{in}) + \sum\limits_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_{ki}^{out})$;

II.9 Определить $\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus D_k \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{2n} D_{ki}\right)$;

II.10 Если $k = K_{\max}$, то стоп, иначе установить $k \leftarrow k + 1$ и перейти на **II.1**.

Построение параллелепипеда наименьшего объема на шаге **II.3** требует решение $2n$ задач выпуклого программирования вида (1.1), построение $2n$ параллелепипедов наибольшего объема на шаге **II.6** требует решения $2n$ задач выпуклого программирования вида (1.3), (1.5). В итоге на каждой итерации решается $4n$ задач выпуклого программирования. Задачи эти не связаны друг с другом и поэтому их решение легко может быть распараллелено. Тем не менее вычислительная трудоемкость предлагаемого алгоритма достаточно высока. Поэтому алгоритм предлагается использовать в задачах небольшой размерности, тем более что возможности аппроксимации параллелепипедами компактного множества ограничены. Частным случаем меры является объем. Следовательно, предлагаемый алгоритм применим и к вычислению объемов выпуклых компактных множеств. Как известно [9], задача вычисления объема выпуклого многогранника $\#P$-трудна, поэтому указанная трудоемкость алгоритма не удивительна.

С геометрической точки зрения на шаге **II.5** параллелепипед Π_k^{out} разбивается на $2n+1$ параллелепипедов:

$$\Pi_k^{out} = \Pi_k^{in} \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{2n} \Pi_{ki}^{out}\Big).$$

Разбиение это происходит без учета множества X, вследствие чего параллелепипеды Π_{ki}^{out}, содержащие D_{ki}, не являются внешними параллелепипедами минимального объема, поэтому необходима оптимизация внешних параллелепипедов, осуществляемая на шаге **II.3**.

На каждой итерации множество X может быть представлено как объединение всех построенных к данному моменту внутренних параллелепипедов и множеств из текущего набора $\mathcal{D}$, т. е. набор непересекающихся множеств $\mathcal{D}$ содержит граничную часть множества X, не измеренную при помощи построенных внутренних параллелепипедов. Измерение этой граничной части с избытком происходит при помощи внешних параллелепипедов Π_{ki}^{out}, размеры которых становятся меньше от итерации к итерации.

3. Предварительный вычислительный эксперимент

В данном разделе приводятся результаты измерения компактного множества на плоскости X из ранее приведенного примера (см. также рисунок). Относительная точность $\Delta = 0.05$. Сначала рассмотрим задачу нахождения площади этого множества. В этом случае мера прямоугольника $\Pi = \{(x_1, x_2)\colon \underline{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant \overline{x}_1,\ \underline{x}_2 \leqslant x_2 \leqslant \overline{x}_2\}$ $\mu(\Pi) = (\overline{x}_1 - \underline{x}_1)(\overline{x}_2 - \underline{x}_2)$. Для получения заданной точности алгоритм проделал 59 итераций.

Пусть теперь требуется определить вероятность попадания в X двумерной нормально распределенной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с независимыми компонентами ξ_1 и ξ_2. Функция распределения $F_\xi(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$, где F_1 — функция распределения нормальной случайной величины ξ_1 с математическим ожиданием $\alpha_1 = 2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_1 = 3$, F_2 — функция распределения нормальной случайной величины ξ_2 с математическим ожиданием $\alpha_2 = -2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_2 = 2$. В этом случае мера $\mu(\Pi) = (F_1(\overline{x}_1) - F_1(\underline{x}_1))\,(F_2(\overline{x}_2) - F_2(\underline{x}_2))$. Для достижения заданной точности потребовалось 36 итераций. Если взять более концентрированную вероятностную меру с $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 0.5$, то требуется уже 8 итераций.

Как показал вычислительный эксперимент нижняя оценка меры μ^{in} более точна, чем верхняя оценка μ^{out}. Связано это с тем, что внутренние (вписанные) аппроксимирующие параллелепипеды — всегда максимального объема. Если на шаге **II.5** строить внешние параллелепипеды именно наименьшего объема, то точность оценки сверху можно улучшить, а вместе с тем и сократить количество итераций. Для этого на каждой итерации придется дополнительно решать $4n^2$ задач выпуклого программирования.

Заключение

Параллелепипеды в предлагаемом алгоритме оптимальны с точки зрения объема. В общем случае эффективнее было бы строить экстремальные параллелепипеды с точки зрения используемой меры. Однако в таком случае вспомогательные задачи могут оказаться задачами невыпуклой оптимизации. Пусть, например, задана случайная величина $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с функцией распределения $F_\xi(x) = F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_n(x_n)$, где F_i — функция распределения ξ_i. Тогда, для построения максимального с точки зрения вероятностной меры параллелепипеда $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}\}$ вместо целевой функции (1.3) потребуется использовать функцию

$$\psi(\underline{x}, \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(F_i(\overline{x}_i) - F_i(\underline{x}_i)\right).$$

Функция ψ — логарифм вероятностной меры Π. Каждое слагаемое в данной функции — логарифм разности двух монотонных функций, а такая разность может оказаться многоэкстремальной [10].

Построение экстремальных в смысле объема параллелепипедов требует решения задач выпуклой оптимизации, что является преимуществом предложенного алгоритма. Далее, построение максимального вписанного параллелепипеда позволяет охватить максимальную “прямоугольную” внутреннюю часть X по сравнению с сеточными методами. Необходимо отметить, что данная методика может использоваться и при вычислении многомерных интегралов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1976. 544 с.
2. **Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.** Интеграл, мера и производная. М: Наука, 1967. 220 с.
3. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М: Изд. центр “Академия”, 2006. 368 с.

4. **Lovász L., Simonovits M.** Random walks in a convex body and an improved volume algorithm // Random structures & algorithms. 1993. № 4. P. 359–412.
5. **Бронштейн Е.М.** Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5–37.
6. **Prékopa A.** Stochastic programming. Dordrecht, Boston: Kluwer Acad. Publ., 1995. 599 p. ISBN: 0792334825 .
7. **Норкин В.И., Роенко Н.В.** α-вогнутые функции и меры и их применения // Кибернетика и системный снализ. 1991. Вып. 6. С. 77–88.
8. **Ащепков Л.Т.** О построении максимального куба, вписанного в заданную область // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 2. С. 510–513.
9. **Хачиян Л.Г.** Задача вычисления объема многогранника перечислительно трудна // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, вып. 3. С. 179–180.
10. **Tuy H., Al-Khayyal F., Thach P.T.** Monotonic optimization: Branch and cut methods // Essays and Surveys in Global Optimization / eds. C. Audet, P. Hansen, G. Savard. Berlin, etc.: Springer, 2005. P. 39–78. doi: 10.1007/0-387-25570-2_2 .

Хамисов Олег Валерьевич
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник,
зав. отделом
Институт систем энергетики им Л.А. Мелентьева СО РАН,
г. Иркутск
e-mail: khamisov@isem.irk.ru

Поступила 12.05.2017

REFERENCES

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). Martino Fine Books, United States, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . The 4th edition of Russian text published in *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow, Nauka Publ., 1976, 544 p.
2. Shilov G.E., Gurevich B.L. *Integral, measure and derivative: A unified approach.* (Translated from the first Russian edition 1964). N.J.: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966, 233 p. ISBN: 0486635198 . The 2nd edition of Russian text published in *Integral, mera i proizvodnaya.* Moscow, Nauka Publ. 1967, 220 p.
3. Mikhailov G.A., Voytishek A.V. *Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo.* [Numerical Statistical Simulation. Monte Carlo methods]. Moscow: Publ. Center Academy, 2006, 368 p. ISBN: 5-7695-2739-0 .
4. Lovász L., Simonovits M. Random walks in a convex body and an improved volume algorithm. *Random structures & algorithms*, 1993, vol. 4, no. 4, pp. 359–412. doi: 10.1002/rsa.3240040402 .
5. Bronshtein E.M. Approximation of Convex Sets by Polytopes. *J. Math. Sci.*, 2008, vol. 153, no. 6, pp. 727–762. doi: 10.1007/s10958-008-9144-x .
6. Prékopa A. *Stochastic Programming.* Dordrecht, Boston, Kluwer Acad. Publ., 1995, 599 p. ISBN: 0792334825 .
7. Norkin V.I., Roenko, N.V. α-concave functions and measures and their applications. *Cybern. Syst. Anal.*, 1991, vol. 27, no. 6, pp. 860–869. doi: 10.1007/BF01246517 .
8. Ashchepkov L.T. Construction of the maximum cube inscribed in a given domain. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1980, vol. 20, no. 2, pp. 245–249. doi: 10.1016/0041-5553(80)90039-7 .
9. Khachiyan L.G. The problem of calculating the volume of a polyhedron is enumerably hard. *Russian Math. Surveys*, 1989, vol. 44, no. 3, pp. 199–200. doi: 10.1070/RM1989v044n03ABEH002136 .
10. Tuy H., Al-Khayyal F., Thach P.T. *Monotonic optimization: Branch and cut methods.* In: Essays and Surveys in Global Optimization, C. Audet, P. Hansen, G. Savard (eds.), Berlin: Springer, 2005, pp. 39–78. doi: 10.1007/0-387-25570-2_2 .

The paper was received by the Editorial Office on May, 12, 2017.

Oleg Valer'evich Khamisov. Dr. Phys.-Math. Sci., Melentiev Energy Systems Institute, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: khamisov@isem.irk.ru .