ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.5

О КРАТНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЯХ

Р. М. Тригуб

По тематике и методу статья относится к классическому анализу. Винеровская банахова алгебра (нормированное кольцо) $A(\mathbb{R}^d), d \in \mathbb{N}$, представляет собой пространство преобразований Фурье функций из $L_1(\mathbb{R}^d)$ (умножение поточечное). Принадлежность этой алгебре является существенной для мультипликаторов Фурье из L_1 в L_1 и определяющей для сходимости на пространстве L_1 методов суммирования рядов и интегралов Фурье, задаваемых одной функцией-множителем. Функцию f на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ называют *m-кратно монотонной*, если $(-1)^\nu f^{(\nu)}(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и $0 \leq \nu \leq m+1$. Давно известно для таких функций интегральное представление Шенберга (I. J. Schoenberg), которое при $m \to \infty$ переходит в формулу С. Н. Бернштейна для вполне монотонных функций. Обозначим через $V_0(\mathbb{R}_+)$ множество функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}_+$, т. е., множество функций, представимых в виде разности двух ограниченных монотонных функций. При $m \in \mathbb{N}$ через $V_m(\mathbb{R}_+)$ обозначим пространство функций из $V_{0,loc}(\mathbb{R}_+)$ с условием $\|f\|_{V_m} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| + \int_0^\infty t^m |df^{(m)}(t)| < \infty$. Это банахова алгебра. Для того чтобы функция f принадлежала $V_m(\mathbb{R}_+)$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух ограниченных функций с выпуклыми производными порядка $m-1$ (теорема 1). В данной работе рассмотрен также вопрос о принадлежности $A(\mathbb{R}^d)$ функций вида $f_0(|x|_{p,d})$, где $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $|x|_{\infty,d} = \max\limits_{1\leq j\leq d} |x_j|$, $|x|_{p,d} = \big(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\big)^{1/p}$ при $p \in (0,\infty)$. Случай $p = 2$ (радиальные функции) хорошо изучен, включая признак Пойя — Аски (G. Pólya – R. Askey) положительной определенности функций на $\mathbb{R}^d$. Сформулируем следствия из полученной здесь теоремы 2:

1) если $f_0 \in C_0[0,\infty)$ и $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in [1,\infty]$ функция $f_0(|x|_{p,d})$ принадлежит $A(\mathbb{R}^d)$;

2) если $f_0 \in C_0[0,\infty)$ и $f_0 \in V_{d+1}(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in (0,1)$ функция $f_0(|x|_{p,d})$ принадлежит $A(\mathbb{R}^d)$.

Приведены примеры, среди которых одна осциллирующая функция.

Ключевые слова: функции ограниченной вариации, выпуклые, кратно монотонные, вполне монотонные и положительно определенные на $\mathbb{R}_+$, преобразование Фурье.

R. M. Trigub. On multiply monotone functions.

The subject and the method of this paper belong to classical analysis. The Wiener Banach algebra (the normed ring) $A(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, is the space of Fourier transforms of functions from $L_1(\mathbb{R}^d)$ (with pointwise product). The membership in this algebra is essential for Fourier multipliers from L_1 to L_1 and principal for the convergence on the space L_1 of summation methods for Fourier series and integrals given by one factor function. A function f is called m-multiply monotone on $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ if $(-1)^\nu f^{(\nu)}(t) \geq 0$ for $t \in \mathbb{R}_+$ and $0 \leq \nu \leq m+1$. For such functions, Shoenberg's integral presentation has long been known, which becomes Bernstein's formula for monotone functions as $m \to \infty$. Denote by $V_0(\mathbb{R}_+)$ the set of functions of bounded variation on $\mathbb{R}_+$, i.e., the set of functions representable as the difference of two bounded monotone functions. Denote by $V_m(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, the space of functions f from $V_{0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ such that $\|f\|_{V_m} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| + \int_0^\infty t^m |df^{(m)}(t)| < \infty$. This is a Banach algebra. A function f belongs to $V_m(\mathbb{R}_+)$ if and only if f can be represented as the difference of two bounded functions with convex derivatives of order $m-1$ (Theorem 1). We also study conditions under which functions of the form $f_0(|x|_{p,d})$, where $|x|_{p,d} = \big(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\big)^{1/p}$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, for $p \in (0,\infty)$ and $|x|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq d} |x_j|$, belong to $A(\mathbb{R}^d)$. The case $p = 2$ (radial functions) is well studied, including the Pólya–Askey criterion of the positive definiteness of functions on $\mathbb{R}^d$. We prove Theorem 2, which has the following corollaries.

(1) If $f_0 \in C_0[0,\infty)$ and $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, then $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$ for $p \in [1,\infty]$.

(2) If $f_0 \in C_0[0,\infty)$ and $f_0 \in V_{d+1}(\mathbb{R}_+)$, then $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$ for $p \in (0,1)$.

We give some examples, including an example with an oscillating function.

Keywords: function of bounded variation, convex function, multiply monotone function, completely monotone function, positive definite function, Fourier transform.

MSC: 26A48, 42A38, 26A45, 42B35

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-257-271

Введение

Введем следующие обозначения и определения: $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; функцию $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, у которой $(-1)^\nu f^{(\nu)}(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и $0 \leq \nu \leq m+1$, $m \in \mathbb{N}$, называют *m-кратно монотонной*, а при $m = \infty$ — *вполне монотонной*. Через $\gamma(...)$, возможно с индексами, обозначаем положительные величины, зависящие лишь от переменных, стоящих в скобках. Для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j$,

$$|x|_{\infty,d} = \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|, \qquad |x|_{p,d} = \Big(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \Big)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in (0, \infty),$$

в частности, $|x|_{2,d} = \sqrt{(x, x)}$ — евклидова норма.

Винеровской банаховой алгеброй $A(\mathbb{R}^d)$ называется класс функций d переменных $x_1, \ldots, x_d$, представимых на $\mathbb{R}^d$ в виде преобразования Фурье интегрируемых функций, т. е.

$$A(\mathbb{R}^d) = \bigg\{ f(x) = \widehat{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i(x,y)}\, dy,\ \|f\|_A = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\, dy < \infty \bigg\}.$$

Эта алгебра возникает, например, при изучении мультипликаторов Фурье из L_1 в L_1 (см. [1;2]). Обзор свойств этой алгебры можно найти в [3]. В частности, функции из $A(\mathbb{R}^d)$ принадлежат пространству $C_0(\mathbb{R}^d)$, т. е. пространству непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций, удовлетворяющих соотношению

$$f(\infty) = \lim_{\max\limits_{1 \leq j \leq d} |x_j| \to \infty} f(x) = 0.$$

Кроме того, функции из $A(\mathbb{R}^d)$ обладают локальным свойством (см. [3, Theorem 4.5.]).

Есть много разных достаточных условий принадлежности функций классу $A(\mathbb{R}^d)$ (см. [3]). Особенно хорошо изучены радиальные функции, т. е. функции вида $f(x) = f_0(|x|_{2,d})$. В этом случае вопрос о принадлежности $A(\mathbb{R}^d)$ при $d \geq 2$ полностью сводится к принадлежности $A(\mathbb{R}) = A(\mathbb{R}^1)$ другой функции (см. [4, 6.3.6; 5]).

Приведем один пример (см. [1, гл. IV, 7.4]):

$$f_0(t) = \frac{e^{it^\alpha}}{(1+t)^\beta}, \qquad f_0\big(|x|_{2,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d) \ \Leftrightarrow\ 2\beta > d\alpha \geq 0.$$

Отметим, что те же формулы из [5] применимы для изменения числа переменных положительно определенных радиальных функций.

Обозначим через $L_1^*(\mathbb{R})$ множество измеримых функций g, удовлетворяющих условию

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|y| \geq |x|} |g(y)| \in L_1(\mathbb{R}),$$

а через $A^*(\mathbb{R})$ обозначим алгебру, состоящую из преобразований Фурье $f = \widehat{g}$, где $g \in L_1^*(\mathbb{R})$. Свойства этой алгебры можно найти в [6].

Берлинг (Beurling) [7] доказал, что если $f_1(\infty) = 0$ и $\big|f_1(t+h) - f_1(t)\big| \leq \big|f_2(t+h) - f_2(t)\big|$ $(t, h \in \mathbb{R})$, где $f_2 \in A^*(\mathbb{R})$, то $f_1 \in A(\mathbb{R})$.

Отметим еще, что принадлежность $A(\mathbb{R}^d)$ является существенной при изучении сходимости на L_1 и C линейных средних рядов и интегралов Фурье, определяемых одной функцией-множителем [4, 8.1.2], а принадлежность $A^*(\mathbb{R}^d)$ является определяющей для сходимости тех же средних во всех точках Лебега (почти всюду) (см. [4, 8.1.3]).

В настоящей статье изучена алгебра V_m функций, равных разности двух ограниченных m-кратно монотонных функций на $\mathbb{R}_+$. Указано также достаточное условие для того чтобы $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$, $p \in (0, +\infty]$ (см. следствия и примеры в разд. 3).

Работа состоит из трех разделов. Первый раздел посвящен кратно монотонным функциям, второй — алгебре $V_m(\mathbb{R}_+)$, а третий — функциям вида $f_0\big(|x|_{p,d}\big)$ $\big(d \geq 2,\ p \in (0, +\infty]\big)$.

1. Кратно монотонные функции

Известно [8; 9], что если все функции $(-1)^\nu f^{(\nu)}$ $(0 \le \nu \le m-1,\ m \in \mathbb{N})$ неотрицательны, убывают и выпуклы вниз на $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$, то при $t \ge 0$ $\bigl(f(0) = f(+0)\bigr)$

$$f(t) = \int\limits_0^{+\infty} (1-tu)_+^m \, d\mu(u) \quad (\xi_+ = \max\{\xi, 0\}),$$

где μ — некоторая положительная борелевская мера на $[0,+\infty)$, конечная на $[0,a]$ при любом $a \in \mathbb{R}_+$.

Известно также, что любая выпуклая (вниз, например) функция принадлежит $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ (на любом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ абсолютно непрерывна и даже из $\mathrm{Lip}\,1$) и является интегралом от своей (убывающей) правой или левой производной. Выпуклая функция дифференцируема всюду, кроме, возможно, не более счетного числа точек, в которых существуют односторонние производные. Если же выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция ограничена, то она и монотонная.

Лемма 1. *Пусть натуральное число $m \ge 2$. Тогда если функция f ограничена на $\mathbb{R}_+$ и $f^{(m-1)}$ выпукла вверх, то при любых $\nu \in \{0,1,\dots,m\}$, $t > 0$ выполняется неравенство*

$$(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) \ge 0$$

и существуют конечные пределы $f(+0)$, $f(+\infty)$. Кроме того,

$$\lim_{t\to 0} t^\nu f^{(\nu)}(t) = \lim_{t\to+\infty} t^\nu f^{(\nu)}(t) = 0 \quad (1 \le \nu \le m) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty t^m \bigl|df^{(m)}(t)\bigr| < \infty.$$

Если функция f ненулевая, то существует число $a \in (0,+\infty]$ такое, что при любом $\nu \in \{1,\dots,m\}$ выполняется неравенство

$$(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) > 0, \quad t \in (0,a),$$

и $f(t) = f(+\infty)$ при $t \ge a$, если $a \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Если функция f ограничена снизу и при некотором $m \in \mathbb{N}$ $f^{(m)} \searrow$ (убывает), то $f^{(m)}(t) \ge 0$ при $t > 0$. Действительно, как видно из формулы Тейлора, при любом $a \in \mathbb{R}_+$ и $t \ge a$ (интеграл Стилтьеса)

$$f(t) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t-a)^j + \frac{1}{m!}\int\limits_a^t (t-u)^m df^{(m)}(u) \le \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t-a)^j.$$

Если бы было $f^{(m)}(a) < 0$, то было бы и $f(+\infty) = -\infty$. Следовательно, существует конечный предел $f^{(m)}(+\infty)$ и $f^{(m-1)} \nearrow$.

Если $m \ge 2$, то по той же причине $(-f^{(m-1)} \searrow)$ $f^{(m-1)}(t) \le 0$ на $\mathbb{R}_+$ и существует конечный предел $f^{(m-1)}(+\infty)$. При этом $f^{(m)}(+\infty) = 0$, так как в противном случае $f^{(m-1)}$ не может быть ограниченной около $+\infty$.

Продолжая таким же образом, получаем $(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) \ge 0$, $f^{(\nu)}(+\infty) = 0$ $(1 \le \nu \le m)$.

В силу монотонности функции и ее производных

$$\int\limits_0^\infty \sup_{u\ge t} |f'(u)|\, dt = \left|\int\limits_0^\infty f'(t)\, dt\right| = \bigl|f(+\infty) - f(+0)\bigr|.$$

Заметим, что если $g(t)\ge 0$, $g\searrow$ на $\mathbb{R}_+$ и при некотором $\alpha\ge 0$ функция $u^\alpha g(u)\in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$0\le t^{\alpha+1}g(2t)\le \int\limits_t^{2t} u^\alpha g(u)\,du\to 0 \quad (t\to +0,\ t\to+\infty). \tag{1.1}$$

Поэтому

$$\lim_{t\to+0} tf'(t)=\lim_{t\to+\infty} tf'(t)=0.$$

Но тогда и

$$\int\limits_0^\infty t\sup_{t\ge u}|f''(u)|\,dt=\left|\int\limits_0^\infty tf''(t)\,dt\right|=\left|\int\limits_0^\infty f'(t)\,dt\right|<\infty.$$

В силу (1.1)

$$\lim_{t\to+0} t^2f''(t)=\lim_{t\to+\infty} t^2f''(t)=0$$

и т. д.

А интеграл вычисляется интегрированием по частям.

Еще нужно учесть, что если непрерывная и ненулевая $f^{(\nu)}$, например, убывает к нулю, то существует $a_\nu\in\mathbb{R}_+$, при котором $f^{(\nu)}(t)>0$ на $(0,a_\nu)$ и $f^{(\nu)}(t)=0$ при $a_\nu\in\mathbb{R}_+$ и $t\ge a_\nu$. Очевидно, что $a_{\nu+1}\le a_\nu$. Но и $a_\nu\le a_{\nu+1}$, так как

$$f^{(\nu)}(t)=-\int\limits_t^\infty f^{(\nu+1)}(u)\,du.$$

Лемма доказана. □

Вопрос о кратной монотонности стал существенным при определении положительной определенности, т. е. представлении в виде преобразования Фурье положительной меры. Так, по признаку Пойя, если четная функция f принадлежит $C_0[0,+\infty)$ и выпукла вниз на $\mathbb{R}_+$, то $f=\widehat{g}$, где $g\in L_1(\mathbb{R})$ и $g(y)\ge 0$. Более того, $g\in L_1^*(\mathbb{R})$, т. е. $f\in A^*(\mathbb{R})$ (см. [4, с. 302]).

Признак типа Пойя для радиальных функций ([10], см. также [4, 6.3.7]) теперь можно сформулировать так: *если* $f_0\in C_0[0,+\infty)$ *и при* $m=1+[d/2]$ $(d\in\mathbb{N})$ $(-1)^m f_0^{(m-1)}$ *выпукла вверх на* $\mathbb{R}_+$, *то*

$$f_0\bigl(|x|_{2,d}\bigr)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-i(x,y)}\,dy, \quad g\in L_1(\mathbb{R}^d), \quad g(y)\ge 0 \quad (y\in\mathbb{R}^d). \tag{1.2}$$

По теореме Бернштейна ограниченная и вполне монотонная функция на $\mathbb{R}_+$ представима в виде

$$f(t)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}\,d\mu(u) \quad (t\ge 0,\ f(0)=f(+0)),$$

где μ — конечная положительная борелевская мера на $[0,+\infty)$. По теореме Шенберга [11, Theorem 3] (см. также, например, [4, 6.3.9]) функция $f_0\bigl(|x|_{2,d}\bigr)$ имеет представление (1.2) при любом $d\in\mathbb{N}$ в том и только в том случае, когда $f_0(\sqrt{t})$ вполне монотонная.

Отметим еще, что вместе с m-кратно монотонной функцией f и суперпозиция $f\circ h$ является такой же, если $h(t)>0$ при $t\in\mathbb{R}_+$ и

$$(-1)^{\nu+1}h^{(\nu)}(t)\ge 0 \quad (1\le\nu\le m,\ t\in\mathbb{R}_+).$$

Пример: $h(t)=t^\alpha$, $\alpha\in(0,1)$.

2. Алгебра $V_m(\mathbb{R}_+)$

Разность двух кратно монотонных функций может не быть кратно монотонной.

Введем следующие обозначения: $V_0(\mathbb{R}_+)$ — множество функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}_+$ (т. е. множество функций, представимых в виде разности двух ограниченных монотонных функций); $V_{0,loc}(\mathbb{R}_+)$ — множество функций f таких, что $f(+\infty) = 0$ и на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, имеющих ограниченную вариацию; $V_m(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, — множество функций с условием ($f^{(m)} \in V_{0,loc}(\mathbb{R}_+)$)

$$\|f\|_{V_m} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| + \int_0^\infty t^m \left| df^{(m)}(t) \right| < \infty. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) при $m \in \mathbb{Z}_+$ Требельс (W. Trebels) [12] использовал как достаточное условие для мультипликаторов Фурье. Множество $V_m(\mathbb{R}_+)$, где $m \in \mathbb{N}$, является банаховой алгеброй (см. также [3]).

Функции из $V_1(\mathbb{R}_+)$ называют *квазивыпуклыми.*

Лемма 2. *Для того чтобы $f \in V_1(\mathbb{R}_+)$ необходимо и достаточно, чтобы функция f была разностью двух ограниченных и выпуклых функций на $\mathbb{R}_+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Если $f = f_1 - f_2$, где f_1 и f_2 — ограниченные выпуклые, то, используя лемму 1, получаем

$$\int_0^\infty t|df_{1,2}(t)| = \left|\int_0^\infty t df_{1,2}(t)\right| = \left|\int_0^\infty f'_{1,2}(t)\,dt\right| = \left|f_{1,2}(+0) - f_{1,2}(+\infty)\right| < \infty.$$

Необходимость. Полагаем $f_1(t) = -\int_0^\infty (u-t)\left|df'(u)\right| \quad (f_1(+\infty) = 0).$

Очевидно, что при $t > 0$

$$|f_1(t)| \le \int_0^\infty u|df'(u)|, \quad f'_1(t) = \int_t^\infty |df'(u)| \searrow$$

и

$$\int_0^\infty t|df'_1(t)| = -\int_0^\infty t df'_1(t) = \int_0^\infty f'_1(t)\,dt = -f_1(+0).$$

Так что

$$\|f_1\|_{V_1} \le \int_0^\infty t|df'(t)| + |f_1(+0)| = 2\int_0^\infty t|df'(t)|.$$

Функция $f_2 = f_1 - f$ ограничена, как разность ограниченных функций,

$$f'_2(t) = \int_t^\infty |df'(u)| - f'(t) = \int_t^\infty \left(|df'(u) + df'(u)\right) \searrow$$

и

$$\|f_2\|_{V_1} \le \|f_1\|_{V_1} + \|f\|_{V_1} \le 3\|f\|_{V_1}. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е. Как видно из доказатедьства леммы, $f_1(+\infty) = 0$. Если добавить в условие $f(+\infty) = 0$, то и $f_2(+\infty) = f_1(+\infty) - f(+\infty) = 0$.

Отметим, что функции из $C^2(\mathbb{R}_+)$ образуют плотное множество в $V_1(\mathbb{R}_+)$. Для доказательства достаточно применить при $h \to +0$ функцию Стеклова

$$f_{2,h}(t) = \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h du_1 \int\limits_0^h f(t + u_1 + u_2)\, du_2.$$

Введем промежуточное пространство $V_0^*(\mathbb{R}_+)$ между V_0 и V_1, представляющее собой множество функций из $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ с нормой

$$\|f\|_{V_0^*} = \int\limits_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{u \ge t} |f'(u)|\, dt;$$

$V_0^*(\mathbb{R}_+)$ — банахово пространство не сепарабельное, рефлексивное, в котором непрерывные функции не образуют плотное множество. Кроме того, алгебра $V_0^*(\mathbb{R}_+)$ (кольцо относительно поточечного умножения) существенно отличается от $L_1(\mathbb{R}_+)$. Отметим лишь одно отличие V_0^* от V_1. Любую функцию из Lip 1 на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ можно продолжить до функции из $V_0^*(\mathbb{R}_+)$, но не всегда — до функции из V_1. По этому поводу см. [13], где также сравниваются и преобразования Фурье четных функций из V_0^* и V_1.

Заметим, что множества V_1 и V_0^* можно рассматривать и на отрезке вещественной оси. Для отрезка $[0, b]$, например, появляются нормы

$$\int\limits_0^b t\Big(1 - \frac{t}{b}\Big)|df'(t)|, \quad \int\limits_0^b \operatorname*{ess\,sup}_{b \ge u \ge t} \big(|f'(u)| + |f'(b-u)|\big)\, dt.$$

Переходим к общему пространству V_m, $m \in \mathbb{N}$. Приведем первый основной результат.

Теорема 1. *Для того чтобы $f \in V_m(\mathbb{R}_+)$ (см. (2.1)), необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух ограниченных функций с выпуклыми производными порядка $m - 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Если $f = f_1 - f_2$, то, используя лемму 1, получаем

$$\int\limits_0^\infty t^m \big|df_{1,2}^{(m)}(t)\big| = \Big|\int\limits_0^\infty t^m df_{1,2}^{(m)}(t)\Big| = \Big|(-1)^m m! \int\limits_0^\infty f_{1,2}'(t)\, dt\Big| = m!\big|f_{1,2}(+\infty) - f_{1,2}(+0)\big| < \infty.$$

Необходимость. Полагаем

$$f_1(t) = \frac{(-1)^m}{m!} \int\limits_t^{+\infty} (u - t)^m \big|df^{(m)}(u)\big|.$$

Тогда f_1 ограничена: $0 \le (-1)^m m! f_1(t) \le \int_0^\infty u^m \big|df^{(m)}(u)\big|$ и $f_1^{(m)}(t) = \int_t^\infty \big|df^{(m)}(u)\big| \searrow$. При этом

$$\|f_1\|_{V_m} \le \frac{1}{m!} \int\limits_0^\infty u^m \big|df^{(m)}(u)\big| + \int\limits_0^\infty t^m \big|df^{(m)}(t)\big| \le \Big(1 + \frac{1}{m!}\Big)\|f\|_{V_m},$$

и $f_2 = f_1 - f$ ограничена как разность двух ограниченных функций, а

$$f_2^{(m)}(t) = \int\limits_t^\infty \big|df^{(m)}(u)\big| - f^{(m)}(t) = \int\limits_t^\infty \big|df^{(m)}(u)\big| + \int\limits_t^\infty df^{(m)}(u) - f^{(m)}(+\infty) \searrow.$$

Предел $f^{(m)}(+\infty)$ существует, так как при $x_1 \to +\infty$ и $x_2 > x_1$

$$\left|f^{(m)}(x_2) - f^{(m)}(x_1)\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} df^{(m)}(t)\right| \le \int\limits_{x_1}^{+\infty} t^m \left|df^{(m)}(t)\right| \to 0.$$

При этом $\|f_2\|_{V_m} \le \|f_1\|_{V_m} + \|f\|_{V_m} \le \Big(2 + \dfrac{1}{m!}\Big)\|f\|_{V_m}$. □

Следствие. *Пусть $m \ge 2$.*

Если $f^{(m-1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и $\int_0^\infty t^{m-1}\left|f^{(m)}(t)\right|dt < \infty$, то при $\nu \in [1, m-1]$

$$\lim_{t\to+0} t^\nu f^{(\nu)}(t) = \lim_{t\to+\infty} t^\nu f^{(\nu)}(t) = 0$$

и

$$\int\limits_0^\infty t^{m-2} \sup_{u\ge t}\left|f^{(m-1)}(u)\right|dt \le \frac{1}{m}\int\limits_0^\infty t^{m-1}\left|f^{(m)}(t)\right|dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, к функции $f \in V_{m-1}(\mathbb{R}_+)$ применяем теорему 1, а затем и лемму 1. Получаем, что пределы равны нулю. Но тогда

$$\int\limits_0^\infty t^{m-2} \sup_{u\ge t}\left|f^{(m-1)}(u)\right|dt = \int\limits_0^\infty t^{m-2} \sup_{u\ge t}\left|\int\limits_u^\infty f^{(m)}(v)dv\right|dt$$

$$\le \int\limits_0^\infty t^{m-2}dt \cdot \sup_{u\ge t}\int\limits_u^\infty \left|f^{(m)}(v)\right|dv = \int\limits_0^\infty t^{m-1}dt \int\limits_t^\infty \left|f^{(m)}(u)\right|du$$

$$= \int\limits_0^\infty \left|f^{(m)}(u)\right|du \int\limits_0^u t^{m-1}dt = \frac{1}{m}\int\limits_0^\infty t^m\left|f^{(m)}(t)\right|dt$$

(изменен порядок интегрирования). □

Из теоремы 1 и леммы 1 следует также, что $V_m(\mathbb{R}_+) \subset V_{m-1}(\mathbb{R}_+)$.

Требельс (Trebels) [14] (см. также [3, теорема 9.5]) доказал, что при $m > (d-1)/2$ и $f_0 \in V_m(\mathbb{R}_+)$

$$f_0(H(x)) \in A(\mathbb{R}^d)$$

при любой положительной однородной функции d переменных положительной степени с условием $H \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

Теперь эту теорему можно сформулировать так: *если $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ и ее можно представить в виде разности двух ограниченных функций, у которых производные порядка $m-1$ при $m > (d-1)/2$ выпуклы, то $f_0 \circ H \in A(\mathbb{R}^d)$.*

3. О функциях вида $f_0\big(|x|_{p,d}\big)$ $(d \ge 2,\ p \in (0,+\infty])$

Сначала рассмотрим особый случай $p = 2$.

Предложение 1. *Если $f_0 \in C_0[0,+\infty) \cap V_m(\mathbb{R}_+)$ при $m = 1 + [d/2]$, то $f_0\big(|x|_{2,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно представить f в виде разности согласно теореме 1 и применить признак положительной определенности типа Пойя, приведенный в разд. 1. □

Далее рассматривается следующий вопрос. Когда $f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr)\in A(\mathbb{R}^d)$ в зависимости от p?

Заметим, что при $p\neq 2$ не существует частной производной $\dfrac{\partial^r f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr)}{\partial x_1^r}$ $(r>p)$ в точках, в которых $x_2\neq 0$. Поэтому лучше учитывать поведение смешанных производных (дифференцирование по x_j $(j\in[1,d])$ не более одного раза).

Приведем второй основой результат. Для его формулировки используются следующие условия:

A. $\displaystyle\int_0^\infty t^{d-1}\operatorname*{ess\,sup}_{u\ge t}|f_0(u)|\,dt<\infty$,

B. $\displaystyle\int_0^\infty t^{dp-1}\operatorname*{ess\,sup}_{u\ge t}u^{d(1-p)}|f_0^{(d)}(u)|\,dt<\infty$,

C. $f_0(t)=0$ при $t\in[0,a]$, а при $t>0$

$$f_0(t)=O\Bigl(\frac{1}{t^\varepsilon}\Bigr),\quad f_0^{(\nu)}(t)=O\Bigl(\frac{1}{t^{\varepsilon+\nu\delta}}\Bigr)\quad\Bigl(\varepsilon>0,\delta>1-\frac{2\varepsilon}{d}\Bigr),\quad \nu\in[1,d].$$

Теорема 2. *Пусть $f_0\in C_0[0,+\infty)$ и $f_0^{(d-1)}\in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Если выполнено условие A или C, то $f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr)\in A(\mathbb{R}^d)$ при $p\in[1,+\infty]$. Если выполнено условие B, то $f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr)\in A(\mathbb{R}^d)$ при $p\in(0,1)$.*

Доказательство теоремы 2 основано на леммах 3 и 4.

Лемма 3. *Если симметричная относительно переменных x_j $(1\le j\le d)$ и четная по x_j $(1\le j\le d)$ функция $f\in C_0(\mathbb{R}^d)$ имеет на $\mathbb{R}_+^d$ непрерывную смешанную производную*

$$\partial^d f(x)=\frac{\partial^d f(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_d},$$

а

$$\lim_{x_1\to+\infty}\frac{\partial^\nu f(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_\nu}=0\quad(1\le\nu\le d-1),\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d}\sup_{|x_j|\ge|y_j|,\ 1\le j\le d}\bigl|\partial^d f(x)\bigr|\,dy<\infty,$$

то $f\in A(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство леммы основано на следующей теореме: *если для всех $x\in\mathbb{R}^d$ $f(x)=\displaystyle\int_{|x_1|}^\infty du_1\int_{|x_2|}^\infty du_2\ldots\int_{|x_d|}^\infty g(y_1,\ldots,y_d)\,dy_d$ и $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\operatorname*{ess\,sup}_{|x_j|\ge|y_j|}|g(x)|\,dy<\infty$, то $f\in A(\mathbb{R}^d)$* (см. [15, теорема 4; 4, 6.4.10]).

Эта теорема доказана в [15] с использованием полученного там же обобщения на кратный случай теоремы Берлинга, приведенной во введении.

Считая $f_0^{(d)}\in C(\mathbb{R}_+)$, что не уменьшает общности, полагаем

$$g(x)=(-1)^d\partial^d f(x)=(-1)^d\frac{\partial^d f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr)}{\partial x_1\ldots\partial x_d}.$$

Лемма доказана. □

Очевидно, что при $p=\infty$ и $x\in\mathbb{R}_+^d$ имеем $\bigl|\partial^d f_0\bigl(|x|_{\infty,d}\bigr)\bigr|=\bigl|f_0^{(d)}\bigl(|x|_{\infty,d}\bigr)\bigr|$.

Индукцией по d легко доказать, что при $p\in(0,+\infty)$ и $x\in\mathbb{R}_+^d$

$$\frac{\partial^d f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr)}{\partial x_1\ldots\partial x_d}=\sum_{\nu=1}^d\gamma(d,p,\nu)|x|_{p,d}^{\nu-dp}f_0^{(\nu)}\bigl(|x|_{p,d}\bigr)\prod_{j=1}^d x_j^{p-1}. \tag{3.1}$$

Лемма 4. *Пусть* $d \geq 2$ *и* $\alpha > 0$. *Тогда при* $p = \infty$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g\big(|x|_{\infty,d}\big) \prod_{j=1}^{d} |x_j|^{\alpha-1}\, dx = \frac{2^d d!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+d-2)} \int\limits_0^\infty t^{2\alpha+d-3} g(t)\, dt,$$

а при $p \in (0, +\infty)$ (Γ — *гамма-функция Эйлера*)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g\big(|x|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} |x_j|^{\alpha-1}\, dx = \frac{2^d \Gamma^d\Big(\dfrac{\alpha}{p}\Big)}{p^{p-1}\Gamma\Big(\dfrac{d\alpha}{p}\Big)} \int\limits_0^\infty t^{d\alpha-1} g(t)\, dt$$

(*в предположении, что простой интеграл справа сходится абсолютно*).

Доказательство. В силу четности подинтегральной функции интеграл по $\mathbb{R}^d$ равен 2^d интегралов по $\mathbb{R}_+$. А с учетом симметрии подинтегральной функции искомый интеграл равен $2^d \cdot d!$ интегралов по множеству: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_d$.

При $p = \infty$ такой интеграл равен повторному:

$$\int\limits_{0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_d} g(x_d) x_d^{\alpha-1} dx_d \int\limits_0^{x_d} x_{d-1}^{\alpha-1} dx_{d-1} \ldots \int\limits_0^{x_2} x_1^{\alpha-1} dx_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+d-2)} \int\limits_0^\infty g(u) u^{2\alpha+d-3} du.$$

При $p \in (0, +\infty)$ можно поступить аналогично. Но проще воспользоваться формулой Лиувилля (см., например, [19, п. 676, формула 7]):

$$\int\limits_{x \in \mathbb{R}_+^d,\ |x|_{1,d} \leq 1} g\big(|x|_{1,d}\big) \prod_{j=1}^{d} x_j^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \int\limits_0^1 g(u) u^{d\alpha-1} du.$$

Из нее следует, что при любых p и $r > 0$

$$\int\limits_{x \in \mathbb{R}_+^d,\ |x|_{1,d} \leq 1} g\big(r|x|_{1,d}^{1/p}\big) \prod_{j=1}^{d} x_j^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \int\limits_0^1 g(ru^{1/p}) u^{d\alpha-1} du = p\frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \cdot \frac{1}{r^{d\alpha p}} \int\limits_0^r g(t) t^{d\alpha p-1} dt$$

(в простом интеграле сделана линейная замена).

Теперь в d–кратном интеграле делаем замену переменных $x_j = \dfrac{1}{r^p} y_j^p$ $(1 \leq j \leq d)$ с якобианом $J = \Big(\dfrac{p}{r^p}\Big)^d \prod\limits_{j=1}^{d} y_j^{p-1}$. Получим интеграл

$$\int\limits_{y \in \mathbb{R}_+^d,\ |y|_{p,d} \leq r} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} y_j^{\alpha p-1} \frac{p^d}{r^{d\alpha p}} dy.$$

Умножая обе части равенства двух интегралов на $r^{d\alpha p}$ и переходя к пределу при $r \to +\infty$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} y_j^{\alpha p-1} dy = \frac{1}{p^{d-1}} \cdot \frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \int\limits_0^\infty g(t) \cdot t^{d\alpha p-1} dt.$$

Но

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} |y_j|^{\alpha p-1} dy = 2^d \cdot d! \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} y_j^{\alpha p-1} dy.$$

Осталось α заменить на α/p. $\square$

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2.

По условиям теоремы $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ и $f_0^{(d-1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Не уменьшая общности, считаем $f_0 \in C^d(\mathbb{R}_+)$.

Начнем со случая A. При $p=\infty$ для применения леммы 3 воспользуемся леммой 4 ($\alpha = 1$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{\infty,d}\big)\Big| dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|f_0^{(d)}\big(|x|_{\infty,d}\big)\Big| dy$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x|_{\infty,d}\ge|y|_{\infty,d}} \Big|f_0^{(d)}\big(|x|_{\infty,d}\big)\Big| dy = 2^d \cdot d(d-1) \int\limits_0^\infty t^{d-1} \sup_{t\ge u} \Big|f_0^{(d)}(u)\Big| dt < +\infty.$$

В силу следствия из теоремы 1 при $\nu \in [1, d-1]$ $f_0^{(\nu)}(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^\nu}\Big)$ $(t \to +\infty)$. Применяем лемму 3.

Пусть теперь $p \in [1,+\infty)$. Как следует из равенства (3.1),

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)\Big| dy \le \gamma(d,p) \max_{1\le\nu\le d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} |x|_{p,d}^{\nu-dp} \cdot \Big|f_0^{(\nu)}\big(|x|_{p,d}\big)\Big| \cdot \prod_{j=1}^d |x_j|^{p-1} dy.$$

Учитывая, что $|x_j|^{p-1} \le |x|_{p,d}^{p-1}$ $(1 \le j \le d)$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)\Big| dy \le \gamma(d,p) \max_{1\le\nu\le d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{t\ge|y|_{p,d}} t^{\nu-d} \Big|f_0^{(\nu)}(t)\Big| dy.$$

Применяем лемму 4 ($\alpha = 1$) при $\nu \le d-1$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{t\ge|y|_{p,d}} t^{\nu-d} \Big|f_0^{(\nu)}(t)\Big| dy \le \gamma_1(d,p,\nu) \int\limits_0^\infty t^{d-1} \sup_{u\ge t} u^{\nu-d} \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| dt \le \gamma_1(d,p,\nu) \int\limits_0^\infty t^{\nu-1} \sup_{u\ge t} \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| dt.$$

Осталось воспользоваться следствием из теоремы 1 и леммой 3.

Случай B. При $p \in (0,1)$ из неравенства $|x_j| \ge |y_j|$ следует, что $|x_j|^{p-1} \le |y_j|^{p-1}$. Применяя (3.1) и лемму 4 ($\alpha = p$), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)\Big| dy \le \gamma_2(p,d) \max_{1\le\nu\le d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d |y_j|^{p-1} \sup_{t\ge|y|_{p,d}} t^{\nu-dp} \Big|f^{(\nu)}(t)\Big| dy$$

$$= \gamma_3(p,d) \max_{1\le\nu\le d} \int\limits_0^\infty t^{dp-1} \sup_{u\ge t} u^{\nu-dp} \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| dt.$$

Так как $d-1 = dp-1+d(1-p)$, а $p \le 1$, то

$$\int\limits_0^\infty t^{d-1} \sup_{u\ge t} \Big|f_0^{(d)}(u)\Big| dt \le \int\limits_0^\infty t^{dp-1} \sup_{u\ge t} u^{d(1-p)} \Big|f_0^{(d)}(u)\Big| dt < \infty$$

(условие A слабее B).

Для доказательства сходимости других интегралов $(1 \le \nu \le d-1)$ рассмотрим два случая.

Пусть сначала $p \geq 1-1/d$. Тогда $dp-1=\nu-1+(dp-\nu)$, где $(dp-\nu)\geq 0$ и, следовательно, (см. также следствие из теоремы 1)

$$\int_0^\infty t^{dp-1}\sup_{u\geq t} u^{\nu-dp}\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|dt \leq \int_0^\infty t^{\nu-1}\sup_{u\geq t}\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|dt \leq \gamma_4(d)\int_0^\infty t^{d-1}\sup_{u\geq t}\Big|f_0^{(d)}(u)\Big|dt<\infty.$$

Пусть теперь $p\in\big(0,1-1/d\big)$. Убедимся в том, что при $\nu\in[1,d-1]$

$$\int_0^\infty t^{dp-1}\sup_{u\geq t} u^{\nu-dp}\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|dt \leq \frac{1}{\nu}\int_0^\infty t^{\nu}\Big|f_0^{(\nu+1)}(t)\Big|dt,$$

а затем воспользуемся следствием из теоремы 1.

При $\nu\geq dp$ искомый интеграл не больше

$$\int_0^\infty t^{dp-1}\sup_{u\geq t} u^{\nu-dp}\int_u^\infty \Big|f_0^{(\nu+1)}(v)\Big|dv \leq \int_0^\infty t^{dp-1}dt\cdot\sup_{u\geq t}\int_u^\infty v^{\nu-dp}\Big|f_0^{(\nu+1)}(v)\Big|dv$$

$$=\int_0^\infty t^{dp-1}dt\int_t^\infty u^{\nu-dp}\Big|f_0^{(\nu+1)}(u)\Big|du=\int_0^\infty\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|\frac{u^\nu}{\nu}du.$$

Если же $\nu<dp$, то тот же интеграл не больше

$$\int_0^\infty t^{dp-1}\cdot t^{\nu-dp}\sup_{u\geq t}\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|dt\leq\int_0^\infty t^{\nu-1}dt\int_t^\infty\Big|f_0^{(\nu+1)}(u)\Big|du=\frac{1}{\nu}\int_0^\infty t^\nu\Big|f_0^{(\nu+1)}(t)\Big|dt.$$

Применяем следствие из теоремы 1 и лемму 3.

Осталось освободиться от дополнительного предположения $f_0^{(d)}\in C(\mathbb{R}_+)$.

Для функции Стеклова ($h>0$)

$$f_h(t)=\frac{1}{h}\int_0^h f_0(t+u)du=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f_0(u)du$$

имеем

$$f_h^{(d)}(t)=\frac{1}{h}\Big(f_0^{(d-1)}(t+h)-f_0^{(d-1)}(t)\Big)\in C(\mathbb{R}_+)$$

и

$$\sup_{u\geq t}\Big|f_h^{(d)}(u)\Big|=\frac{1}{h}\sup_{u\geq t}\int_u^{u+h}\Big|f_0^{(d)}(v)\Big|dv\leq \operatorname{ess\,sup}_{u\geq t}\Big|f_0^{(d)}(u)\Big|.$$

Случай C. Доказательство основано на теореме 2 (Б) из [16] (формулируем с учетом симметрии функции): *если*

$$\frac{\partial^\nu f_0\big(|x|_{p,d}\big)}{\partial x_1\ldots\partial x_\nu}=O\Big(\frac{1}{|x|_{2,d}^{\lambda_\nu}}\Big)\quad(0\leq\nu\leq d),\quad \lambda_0>0$$

и

$$\frac{1}{2^d}\sum_{\nu=0}^d\binom{d}{\nu}\lambda_\nu>\frac{d}{2},$$

то $f\in A(\mathbb{R}^d)$.

В рассматриваемом случае $\lambda_0 = \varepsilon$, а при $\nu \geq 1$ имеем $\lambda_\nu = \nu + \varepsilon + \min\limits_{1\leq s\leq \nu}\{\delta - 1, s(\delta-1)\}$. Так что $\lambda_\nu = \varepsilon + \delta\nu$ при $\delta \leq 1$ и $\lambda_\nu = \nu + \varepsilon + \delta - 1$ при $\delta > 1$.

В первом случае ($\delta \leq 1$)

$$\frac{1}{2^d}\sum_{\nu=0}^{d}\lambda_\nu\binom{d}{\nu} = \varepsilon + \delta\frac{1}{2^d}\sum_{\nu=1}^{d}\nu\binom{d}{\nu} = \varepsilon + \delta\frac{1}{2^d}d\cdot 2^{d-1} > \frac{d}{2} \quad \text{при} \quad \delta > 1 - (2\varepsilon)/d.$$

Во втором случае ($\delta > 1$)

$$\frac{1}{2^d}\sum_{\nu=0}^{d}\binom{d}{\nu}\lambda_\nu = \frac{1}{2^d}\sum_{\nu=1}^{d}\binom{d}{\nu}(\nu+\varepsilon+\delta-1) + \frac{\varepsilon}{2^d} = (\varepsilon + (\delta-1))\frac{2^d-1}{2^d} + \frac{d}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} > \frac{d}{2}.$$

Теорема 2 доказана. □

Следствие 1. *Если $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ и $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in [1,+\infty]$*

$$f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d).$$

Следствие 2. *Если $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ и $f_0 \in V_{d+1}(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in (0,1)$*

$$f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. Если $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, то в силу теоремы 1 она представима в виде разности $f_1 - f_2$ двух ограниченных функций с убывающими производными порядка d. Но тогда (см. еще лемму 1)

$$\int_0^\infty t^{d-1}\sup_{t\geq u}\left|f_{1,2}^{(d)}(u)\right|dt = \int_0^\infty t^{d-1}f_{1,2}^{(d)}(t)\,dt = (-1)^{d-1}(d-1)!(f_{1,2}(+\infty) - f_{1,2}(+0)).$$

И применяем теорему 2. □

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2. Достаточно убедиться в неравенстве

$$\int_0^\infty t^{dp-1}\sup_{u\geq t}u^{d(1-p)}\big|f_0^{(d)}(u)\big|\,dt \leq \frac{1}{dp}\int_0^\infty t^d\big|f_0^{(d+1)}(t)\big|\,dt.$$

Левая часть этого неравенства не больше

$$\int_0^\infty t^{dp-1}\,dt\sup_{u\geq t}u^{d(1-p)}\int_u^\infty\big|f_0^{(d+1)}(\nu)\big|d\nu \leq \int_0^\infty t^{dp-1}\,dt\sup_{u\geq t}\int_u^\infty v^{d(1-p)}\big|f_0^{(d+1)}(\nu)\big|\,d\nu$$

$$= \int_0^\infty t^{dp-1}\,dt\int_t^\infty u^{d(1-p)}\big|f_0^{(d+1)}(u)\big|\,du = \int_0^\infty u^{d(1-p)}\big|f_0^{(d+1)}(u)\big|\,du\int_0^u t^{dp-1}\,dt = \frac{1}{dp}\int_0^\infty u^d\big|f_0^{(d+1)}(u)\big|\,du.$$

Осталось повторить доказательство следствия 1. □

П р и м е р 1. Функция

$$f_0(t) = \frac{t^\gamma}{(1+t^\alpha)^\beta}, \quad t = |x|_{p,d}, \quad p \in (0,+\infty],$$

принадлежит $A(\mathbb{R}^d)$ только при $\alpha > 0$ и $\alpha\beta > \gamma \geq 0$.

Действительно, поскольку $f_0 \in C_0[0,+\infty)$, то должно быть $\alpha > 0$ и $\alpha\beta > \gamma \geq 0$.

Заметим, что $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Любая производная $f_0^{(\nu)}$ в достаточно малой окрестности нуля сохраняет знак $(-1)^\nu$, так как при $t \in (0,1)$

$$f_0(t) = t^\gamma - \beta t^{\gamma+\alpha} + \cdots .$$

Таким же образом ведет себя любая производная и около ∞, так как

$$f_0(t) = t^{\gamma-\alpha\beta}\Big(1 - \beta\frac{1}{t^\alpha} + \cdots\Big).$$

П р и м е р 2. Пусть

$$f_0(t) = \frac{e^{it^\alpha}}{(1+t)^\beta}, \quad t = |x|_{p,d}, \quad p \in (0,+\infty], \quad \alpha \ge 0, \quad \beta > 0.$$

Если $2\beta > d\alpha$, то $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1,\infty]$. А если $\beta > d\alpha$, то $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ при $p \in (0,1)$.

При $p = 2$ этот результат точный (см. пример во введении). Любая производная $\operatorname{Re} f_0$ и $\operatorname{Im} f_0$ сохраняет знак в окрестности нуля и можно, как и в примере 1, применить следствия 1 и 2.

А около ∞ применяем при $p \in [1,\infty]$ случай C в теореме 2, учитывая, что

$$f_0^{(\nu)}(t) = O\Big(\frac{1}{t^{\beta+\nu(1-\alpha)}}\Big),$$

где $\varepsilon = \beta$, $\delta = 1 - \alpha > 1 - (2\beta)/d$ или $2\beta > d\alpha$.

При $p \in (0,1)$ применяем случай B в теореме 2.

Заметим, что для определения положительной определенности функций есть результаты, которые существенно зависят от $p \in (0,+\infty]$ (см., например, [17]).

Применим теперь пример 1 к суммированию рядов и интегралов Фурье. Так как $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ и при $\gamma = 0$ $f_0(0) = 1$, то средние рядов и интегралов Фурье, порожденные этой функцией ($\gamma = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$), сходятся на всем пространстве L_1. А при $d = 1$ эта функция принадлежит и $A^*(\mathbb{R})$ (см. достаточные условия в [6]). А это значит, что сходимость имеет место во всех точках Лебега любой функции из L_1 (см. [4, 8.1]).

Этот метод суммирования обобщает метод Пикара ($\alpha = 2, \beta = 1$).

Отметим еще, что, в отличие от случая $d = 1$, при $d = 2$ средние арифметические квадратных частных сумм двойного ряда Фурье (суммы Марцинкевича) могут сходиться не во всех точках Лебега. Это следует из того, что в $A^*(\mathbb{R}^2)$ нет, практически, функций вида $f_0\big(|x|_{\infty,2}\big)$ или, что то же самое, функций вида $f_0\big(|x|_{1,2}\big)$ [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Stein E.M.** Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton Univ. Press., 1970. 304 p.
2. **Stein E.M., Weiss G.** Introduction of Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton: Princeton Univ. Press., 1971. 312 p. ISBN: 0-691-08078-X .
3. **Liflyand E., Samko S., Trigub R.** Absolute convergence of Fourier integrals // Analysis and Math. Physis. 2012. Vol. 2, no. 1. P. 1–68.
4. **Trigub R., Belinsky E.** Fourier analysis and approximation of functions. Dordrecht: Kluwer-Springer, 2004. 585 p. ISBN: 1-4020-2341-3/hbk .
5. **Тригуб Р.М.** О мультипликаторах Фурье и абсолютной сходимости интегралов Фурье радиальных функций // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 9. С. 1280–1293.
6. **Belinsky E., Liflyand E. and Trigub R.** The Banach algebra A^* and its properties // J. Fourier Anal. Appl. 1997. Vol. 3, no. 2. P. 103–129. doi: 10.1007/BF02649131 .

7. **Beurling A.** On the spectral synthesis of bounded functions // Acta Math. 1949. Vol. 81. P. 225–238. doi: 10.1007/BF02395018 .
8. **Schoenberg I.J.** On integral representations of completely monotone and related functions: abstract // Bull. Amer. Math. Soc. 1941. Vol. 47. P. 208.
9. **Williamson R.E.** Multiply monotone functions and their Laplace transforms // Duke Math. J. 1956. Vol. 23. P. 189–207. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02317-1 .
10. **Askey R.** Radial characteristic functions. Tech. Report no. 1262. Madison: Math. Resc. Center, University of Wisconsin. 1973.
11. **Schoenberg I.J.** Metric spaces and completely monotone functions // Ann. Math. Soc. 1938. Vol. 39. P. 811–841.
12. **Trebels W.** Multipliers for (C, α)-bounded Fourier expansions in Banach spaces and approximation theory. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973. 103 p. (Lect. Notes Math.; vol. 329.) doi: 10.1007/BFb0060959 .
13. **Тригуб Р.М.** Преобразование Фурье квазивыпуклых функций и функций класса V^* // Укр. мат. вiсник. 2014. Т. 11, № 2. С. 274–286 .
14. **Trebels W.** Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner–Riesz kernel // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1975. Vol. 20, no. 10. P. 1173–1185.
15. **Тригуб Р.М.** Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1980. Т. 44, № 6. С. 1378–1409.
16. **Лифлянд И.Р., Тригуб Р.М.** О представлении функций в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 153–166.
17. **Zastavnyi V.P.** On positive definiteness of some functions // J. Multivariate Anal. 2000. Vol. 73, no. 1. P. 55–81. doi: 10.1006/jmva.1999.1864 .
18. **Тригуб Р.М.** О преобразовании Фурье функций двух переменных, зависящих лишь от максимума модуля этих переменных. arXiv:1512.03183v1 [math CA]. 10 Dec. 2015. 30 p. URL:// https://arxiv.org/abs/1512.03183 .
19. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 3. М.: Физматлит, 1969. 662 p.

Тригуб Роальд Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Сумский государственный университет
г. Сумы, Украина
e-mail: roald.trigub@gmail.com

Поступила 13.04.2017

REFERENCES

1. Stein E.M. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton, Princeton Univ. Press., 1970, 304 p.
2. Stein E.M., Weiss G. *Introduction of Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton, Princeton Univ. Press., 1971, 312 p. ISBN: 0-691-08078-X .
3. Liflyand E., Samko S., Trigub R. Absolute convergence of Fourier integrals. *Analysis and Math. Physis.*, 2012, vol. 2, no. 1, pp. 1–68.
4. Trigub R., Belinsky E. *Fourier analysis and approximation of functions.* Dordrecht, Kluwer-Springer, 2004, 585 p. ISBN: 1-4020-2341-3/hbk .
5. Trigub R.M. On Fourier multipliers and absolute convergence of Fourier integrals of radial functions. *Ukr. Math. J.*, 2010, vol. 62, no. 9, pp. 1487–1501. doi: 10.1007/s11253-011-0444-9 .
6. Belinsky E., Liflyand E. and Trigub R. The Banach algebra A^* and its properties. *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, vol. 3, no. 2, pp. 103–129. doi: 10.1007/BF02649131 .
7. Beurling A. On the spectral synthesis of bounded functions. *Acta Math.*, 1949, vol. 81, pp. 225–238. doi: 10.1007/BF02395018 .
8. Schoenberg I.J. On integral representations of completely monotone and related functions: abstract. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1941, vol. 47, pp. 208.
9. Williamson R.E. Multiply monotone functions and their Laplace transform. *Duke Math. J.*, 1956, vol. 23, pp. 189–207. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02317-1 .

10. Askey R. *Radial characteristic functions. Tech. Report № 1262.* Madison, Math. Resc. Center, University of Wisconsin, 1973.
11. Schoenberg I.J. Metric spaces and completely monotone functions. *Ann. Math. Soc.*, 1938, vol. 39, pp. 811–841.
12. Trebels W. *Multipliers for (C,α)-bounded Fourier expansions in Banach spaces and Approximation Theory.* Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973, Ser. Lect. Notes Math., vol. 329, 103 p. doi: 10.1007/BFb0060959 .
13. Trigub R.M. Fourier transformation of quasiconvex functions and functions of the class V^*. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 204, iss. 3, pp. 369–378. doi: 10.1007/s10958-014-2208-1 .
14. Trebels W. Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner–Riesz kernel. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1975, vol. 20, no. 10, pp. 1173–1185.
15. Trigub R.M. Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series, and polynomial approximation of functions on the torus. *Math. USSR-Izv.*, 1981, vol. 17, no. 3, pp. 567–593. doi: 10.1070/IM1981v017n03ABEH001372 .
16. Liflyand E.R., Trigub R.M. On the representation of a function as an absolutely convergent Fourier integral. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, pp. 146–159. doi: 10.1134/S0081543810020136 .
17. Zastavnyi V.P. On positive definiteness of some functions. *J. Multivariate Anal.*, 2000, vol. 73, no. 1, pp. 55–81. doi: 10.1006/jmva.1999.1864 .
18. Trigub R.M. On the Fourier transform of function of two variables which depend only on the maximum of these variables. *arXiv*:151203183 v1[math CA]. 10 Dec. 2015. 30 p. Available at: https://arxiv.org/abs/1512.03183 (in Russian).
19. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 3. Moscow, Fizmatlit Publ., 1969, 662 p.

The paper was received by the Editorial Office on April 14, 2017.

Roald Mikhailovich Trigub, Dr. Phis.-Math. Sci., Prof., Sumy State University, Sumy, 40007, Ukraine, e-mail: roald.trigub@gmail.com