Том 23 № 3 2017

УДК 517.518.834

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВИЗНЫ ГЛАДКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В статье получена оценка сверху погрешности аппроксимации кривизны графиков периодических функций класса W^r при $r \geq 3$ в равномерной метрике с помощью простейшего аппарата приближения гладких периодических функций — частных сумм их тригонометрических рядов Фурье. Задача в математическом плане интересна тем, что кривизна графика функций является специфичным нелинейным оператором на классе гладких функций W^r на периоде (и отрезке) при $r \geq 2$. Ранее было опубликовано несколько работ об аппроксимации кривизны плоских кривых в среднеквадратичной и чебышевской метриках. В качестве аппарата приближения в предшествовавших работах использовались частные суммы тригонометрических рядов (в L^2-норме), интерполяционные сплайны с равномерными узлами, средние Фейера частных сумм тригонометрических рядов и интерполяционно-ортогональные всплески на базе всплесков Мейера (в C^∞-норме). Методику настоящей работы, отраженную в лемме, вероятно, можно распространить на L^p-метрику и другие методы аппроксимации.

Ключевые слова: приближение кривизны, плоские кривые класса W^r, равномерная метрика.

N. I. Chernykh, Yu. N. Subbotin. Uniform approximation of the curvature of smooth planar curves with the use of partial sums of Fourier series.

An error bound for the approximation of the curvature of graphs of periodic functions from the class W^r for $r \geq 3$ in the uniform metric is obtained with the use of the simplest approximation technique for smooth periodic functions, which is approximation by partial sums of their trigonometric Fourier series. From the mathematical point of view, the interest in this problem is connected with the specific nonlinearity of the graph curvature operator on the class of smooth functions W^r on a period or a closed interval for $r \geq 2$. There are several papers on curvature approximation for planar curves in the mean-square and Chebyshev norms. In previous works, the approximation was performed by partial sums of trigonometric series (in the L^2 norm), interpolation splines with uniform knots, Fejér means of partial sums of trigonometric series, and orthogonal interpolating wavelets based on Meyer wavelets (in the C^∞ norm). The technique of this paper, based on the lemma, can possibly be generalized to the L^p metric and other approximation methods.

Keywords: curvature approximation, planar curves from the class W^r, uniform metric.

MSC: 42A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-253-256

В работе [1] изучалась аппроксимация кривизны гладких плоских кривых в среднеквадратической метрике $L_2[0, 2\pi]$. В настоящей работе, как и в ряде более ранних работ (см., например, [2] и цитированные там работы, а также работу 2016 года, опубликованную в настоящем журнале), подобная проблема рассматривается в равномерной метрике.

Далее W^r ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 3$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел) — класс 2π-периодических функций $y = f(x)$, удовлетворяющих условиям: всюду на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ существуют производные

$$y^{(s)} = y^{(s)}(x) = \frac{d^s f(x)}{dx^s} \quad (s = 1, \dots, r-1), \quad \text{причем} \quad \left|y^{(r-1)}(x) - y^{(r-1)}(t)\right| \leq |x - t| \qquad (1)$$

для любых x, t, принадлежащих $\mathbb{R}$, $r \geq 3$. В статье предлагается аппроксимировать в равномерной норме кривизну таких кривых кривизной графиков частных сумм их тригонометрических рядов Фурье. При этом будут использованы результаты И. Г. Соколова [3] об оценках соответствующего остаточного члена при аппроксимации частными суммами ряда Фурье в равномерной норме дифференцируемой функции $f(x)$ из класса (1). А именно если функция

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

$y \in W^r$ $(r \geq 3)$ и $S_n(y,x)$ — частная сумма порядка n ее ряда Фурье, то $y^{(s)} \in W^{r-s}$ $(s = 1,2)$, $S_n^{(s)}(y,x)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье производной $y^{(s)}(x)$ и из результатов И. Г. Соколова следует, что

$$\big\|y^s(x) - S_n^{(s)}(y,x)\big\|_{C[0,2\pi]} \leq \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^{r-s}} + \frac{7}{n^{r-s}} \quad (s = 1,2,\ r \in \mathbb{N},\ r \geq 3). \tag{2}$$

Отметим, что у И. Г. Соколова [3] в формулировке результата вместо числа 7 в (2) стоит $O(1)$, как величина, не зависящая от n и r, но в конце статьи, в зависимости от трех различных возможных вариантов, выписаны явные значения величины $O(1)$ и во всех случаях выписываемые положительные константы не больше 7.

Итак, кривизну

$$K(y;x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} \tag{3}$$

кривой — графика функции $y(x) \in W^r$ $(r \geq 3)$ — аппроксимируем кривизной графиков частных сумм $S_n(y,x)$ ряда Фурье $y(x)$, т. е. кривизной

$$K(S_n;x) = \frac{S_n''(y,x)}{[1 + (S_n'(y;x))^2]^{3/2}}. \tag{4}$$

Вначале рассмотрим функцию

$$\widetilde{K}(u,v) = \frac{u}{(1 + v^2)^{3/2}} \tag{5}$$

двух вещественных переменных u, v и оценим приращение $\Delta\widetilde{K}(u,v)$ этой функции при замене (u,v) на $(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Имеем

$$\Delta\widetilde{K}(u,v) = \frac{u + \Delta u}{(1 + (v + \Delta v)^2)^{3/2}} - \frac{u}{(1 + v^2)^{3/2}} = \frac{\Delta u}{(1 + (v + \Delta v)^2)^{3/2}} + u\Big(\Delta\frac{1}{(1 + v^2)^{3/2}}\Big), \tag{6}$$

где $\Delta(1 + v^2)^{-3/2} = (1 + (v + \Delta v)^{-3/2} - (1 + v^2)^{-3/2})$. По теореме Лагранжа имеем

$$\Delta\big((1+v^2)^{-3/2}\big) = (\Delta v)\frac{d}{d\xi}(1+\xi^2)^{-3/2}\Big|_{\xi=v+\theta\Delta v} = -3(1+(v+\theta\Delta v)^2)^{-5/2}(v+\theta\Delta v)\Delta v \qquad (0 < \theta < 1),$$

откуда получаем неравенство

$$\big|\Delta\big((1 + v^2)^{-3/2}\big)\big| \leq 3|\Delta v| \max_{\xi\geq 0} \lambda(\xi), \tag{7}$$

где $\lambda(\xi) = \xi(1 + \xi^2)^{-5/2}$. Имеем

$$\lambda'(\xi) = (1 + \xi^2)^{-5/2}(1 - 5\xi^2(1 + \xi^2)^{-1}) = (1 + \xi^2)^{-7/2}(1 - 4\xi^2).$$

Так как $\lambda(\xi) = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = +\infty$, то $|\lambda(\xi)|$ достигает своего максимума на $\mathbb{R}$ в точке $\xi = 1/2$, где $\lambda'(1/2) = 0$. Таким образом,

$$3\max_{\xi\geq 0} \lambda(\xi) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\Big(1 + \dfrac{1}{4}\Big)^{5/2}} = \frac{48}{25\sqrt{5}} = \frac{48\sqrt{5}}{125}. \tag{8}$$

Результатом объединения оценок (6)–(8) является следующая лемма об оценке изменения функции (5) при изменении ее аргументов. При этом учтено, что знаменатель в первом слагаемом равенства (6) не меньше 1.

Лемма. *При любых вещественных u, u_1, v, v_1 справедливо неравенство*

$$|\widetilde{K}(u,v) - \widetilde{K}(u_1,v_1)| \le |u-u_1| + \frac{48\sqrt{5}}{125}|u| \cdot |v-v_1|. \qquad (9)$$

Из определений (3)–(5) функций $K(y;x)$, $K(S_n;x)$ и $\widetilde{K}(u,v)$ следует, что

$$K(y;x) = \widetilde{K}(y''(x), y'(x)), \qquad K(S_n;x) = \widetilde{K}(S_n(y'';x), S_n(y';x)).$$

Введем обозначение $G = (48\sqrt{5})/125 \approx 0.859$. Полагая в неравенстве (9) леммы $u = y''(x)$, $u_1 = S''_n(y;x)$, $v = y'(x)$, $v_1 = s'_n(y;x)$, получаем следующее утверждение о поточечной аппроксимации кривизны 2π-периодической кривой (графика функции $y = y(x)$) кривизной графика функции $S_n(y;x)$.

Теорема. *Пусть функция $y(x) \in W^r$ $(r \ge 3,\ r \in \mathbb{N})$ и $S_n(y;x)$ — ее сумма Фурье:*

$$S_n(y;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(x)\cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(x)\sin kx\, dx.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$|K(y;x) - K(S_n(y;\cdot);x)| \le |y''(x) - S''_n(y;x)| + G|y''(x)||y'(x) - S'_n(y;x)|. \qquad (10)$$

Неравенство (10) *является точным в следующем смысле. Константа* 1 *перед первым слагаемым в правой части* (10) *достигается в тех точках x, где $y'(x) = S'_n(y;x) = 0$, а константа G перед вторым слагаемым в* (10) *достигается асимптотически при $n \to \infty$ в тех точках, где $y'(x) = 1/2$.*

Само неравенство (10) вытекает из леммы при указанных функциональных значениях аргументов функции (5). А утверждения теоремы о точности оценки (10) следуют из вывода оценок (8) и (9).

Так как при $r \ge 3$ для функций $y(x)$ из класса W^r справедливо неравенство Фавара (см., например, [4, с. 282])

$$\|y''(x)\|_{C[0,2\pi]} \le K_{r-2},$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(r+1)k}}{(2k+1)^{r+1}}, \qquad \frac{\pi^2}{8} = K_2 < K_4 < K_6 < \dots < K_3 < K_1 = \frac{\pi}{2},$$

то, применяя это неравенство и оценку (2) к правой части неравенства (10), получаем следующую, равномерную на периоде, оценку погрешности рассматриваемой аппроксимации кривизны гладких кривых.

Следствие. *Для функций $y(x) \in W^r$ $(r \ge 3)$ и частных сумм $S_n(y;x)$ справедливо неравенство*

$$\|K(y;x) - K(S_n(y,\cdot);x)\|_{C[0,2\pi]} \le \Big(\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^{r-2}} + \frac{7}{n^{r-2}}\Big)\Big(1 + \frac{GK_{r-2}}{n}\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.
2. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционные всплески в задаче оценки кривизны // Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе: Изд-во “Офсет”, 2016. С. 231–233.

3. **Соколов И.Г.** Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103, № 1. С. 23–26.
4. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л: Гостехиздат, 1947. 323 с.

Поступила 01.06.2017

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. Approximation of the curvature for certain smooth classes of plane curves by elements of finite-dimensional spaces. *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestvennye nauki.* 2012, no. 3, pp. 41–47 (in Russian).
2. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. *Interpolyatsionnye vspleski v zadache otsenki krivizny* [Interpolation wavelets in the problem of estimating the curvature]. Proc. Internat. Summer Math. Stechkin School-Conf. on Function Theory. Dushanbe, Offset Publ., 2016, pp. 231–233.
3. Sokolov I.G. The remainder term of the Fourier series of differentiable functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1955, vol. 103, no. 1, pp. 23–26 (in Russian).
4. Achieser N.I. *Theory of approximation.* Reprint of the 1956, New York: Dover Publ., Inc., 1992, 307 p. ISBN: 0486671291 . Original Russian text published in Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii.* Moscow, Leningrad: OGIZ Publ., 1947, 323 p.

The paper was received by the Editorial Office on June, 1, 2017.

Yurii Nikolaevich Subbotin, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

Nikolai Ivanovich Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: chernykh@imm.uran.ru .