ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.853

О ПОСТРОЕНИИ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

В работе рассматриваются задачи выпуклого программирования с возможно противоречивой системой ограничений. Такие задачи составляют важный класс несобственных моделей выпуклой оптимизации и часто возникают при математическом моделировании практических постановок из области исследования операций. Частота появления несобственных задач делает актуальной необходимость разработки теории и методов их численной аппроксимации (коррекции), т. е. объективных процедур “развязки” противоречивых ограничений, превращения несобственной модели в совокупность разрешимых задач и выбора среди них оптимальной коррекции. В работе аппроксимирующая задача строится путем вариации правых частей ограничений относительно минимума той или иной векторной нормы. Тип выбранной нормы определяет вид штрафной функции, минимизация которой вместе со стабилизирующей добавкой лежит в основе конкретного метода оптимальной коррекции несобственной задачи. Евклидова норма влечет применение квадратичного штрафа, кусочно-линейная норма (чебышевская, октаэдрическая) предполагает использование точной штрафной функции. Предлагаемые алгоритмы могут быть проинтерпретированы и как методы регуляризации (по Тихонову) задач выпуклого программирования с неточно заданной исходной информацией. Формулируются условия и устанавливаются оценки сходимости рассматриваемых методов.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод регуляризации Тихонова, методы штрафных функций.

V. D. Skarin. On the construction of regularizing algorithms for the correction of improper convex programming problems.

We consider convex programming methods with a possibly inconsistent constraint system. Such problems constitute an important class of improper models of convex optimization and often arise in the mathematical modeling of real-life operations research statements. Since improper problems arise rather frequently, the theory and methods of their numerical approximation (correction) should be developed, which would allow to design objective procedures that resolve inconsistent constraints, turn an improper model into a family of feasible problems, and choose an optimal correction among them. In the present paper, an approximating problem is constructed by the variation of the right-hand sides of the constraints with respect to some vector norm. The type of the norm defines the form of a penalty function, and the minimization of the penalty function together with a stabilizing term is the core of each specific method of optimal correction of improper problems. The Euclidean norm implies the application of a quadratic penalty, whereas a piecewise linear (Chebyshev of octahedral) norm is concerned with the use of an exact penalty function. The proposed algorithms may also be interpreted as (Tikhonov) regularization methods for convex programming problems with inaccurate input information. Convergence conditions are formulated for the methods under consideration and convergence bounds are established.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, Tikhonov regularization method, penalty function methods.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-234-243

Введение

При моделировании конкретных постановок из области исследования операций на основе аппарата математического программирования часто возникают оптимизационные задачи с противоречивой системой ограничений. Соответствующие модели составляют важнейший

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

класс несобственных задач (НЗ) [1] линейного и выпуклого программирования (ВП). Численный анализ подобных задач состоит прежде всего в их коррекции, т. е. построении в некотором смысле близких разрешимых задач, решение которых принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение несобственной проблемы.

Достаточно часто причина возникновения несобственных задач заключается в неточном задании исходных данных. Модели, в которых информация о целевой функции и функциях ограничений носит приближенный характер, типичны для теории некорректных экстремальных задач. Поэтому является естественной попытка применить при исследовании НЗ ВП стандартные способы регуляризации некорректных моделей, такие как метод Тихонова (стабилизирующих функций), метод квазирешений и метод невязки [2].

В работе [3] для построения методов оптимальной коррекции НЗ ВП исследовались возможности метода невязки — одного из классических способов регуляризации некорректных задач оптимизации. В настоящей статье основное внимание уделяется методу Тихонова. Здесь рассматриваются два типа задач, аппроксимирующих исходную несобственную постановку. Задачи первого типа получаются в результате коррекции вектора правых частей ограничений по минимуму евклидовой нормы, второго типа — по минимуму чебышевской нормы. Соответственно возникают два подхода к построению методов оптимальной коррекции: один основан на минимизации квадратичной штрафной функции, второй — на минимизации точной штрафной функции специального вида. В обоих случаях к минимизируемой функции добавляется квадратичный стабилизатор, характерный для метода Тихонова. Для каждого подхода определяются условия и оценки сходимости соответствующих методов.

1. Несобственная задача ВП

Рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \mid f(x) \leq 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, m$. Будем считать, что множество X в задаче (1) может быть пустым. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ функцию Лагранжа для задачи (1), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Определим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \mid \inf\limits_x L(x, \lambda) > -\infty\}$. Если $X = \varnothing$, $\Lambda \neq \varnothing$, то согласно классификации из [1] задача (1) называется НЗ ВП 1-го рода. Это наиболее распространенный класс несобственных постановок, и ниже мы ограничимся рассмотрением таких задач.

Естественный способ оптимальной коррекции НЗ ВП состоит в замене (1) задачей

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\xi}_p}\}, \tag{2}$$

где $\bar{\xi}_p = \arg\min\{\|\xi\|_p \mid \xi \in E\}$, $X_\xi = \{x \mid f(x) \leq \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, $E = \{\xi \mid X_\xi \neq \varnothing\}$, $\|\cdot\|_p$ — символ некоторой векторной нормы в $\mathbb{R}^n$.

Если в задаче (1) $X \neq \varnothing$, то $\bar{\xi}_p = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают. В противном случае оптимальный вектор задачи (2) принимается за обобщенное решение НЗ (1). Далее мы увидим, что качество аппроксимации будет зависеть от выбора нормы p.

2. Коррекция с помощью евклидовой нормы

Рассмотрим случай, когда вектор $\bar{\xi}_p = \bar{\xi}$ в задаче (2) определяется с помощью евклидовой нормы $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Нетрудно видеть, что если вектор $\bar{\xi}$ существует, то $\bar{\xi} = f^+(\bar{x})$, где $\bar{x} \in \bar{X} = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(x) = \|f^+(x)\|^2\}$, при этом $X_{\bar{\xi}} = \bar{X}$. Другими словами, задача (2) эквивалентна проблеме

$$\min\{f_0(x) \mid \varphi(x) \leq \bar{\varphi}\}, \tag{3}$$

где $\bar{\varphi} = \min \varphi(x) = \|f^+(\bar{x})\|^2 = \|\bar{\xi}\|^2$.

Задача (3) является частным случаем более общей постановки. Пусть $d(z)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, такая что $d(0) = 0$, $d(z) > 0$ $(\forall z \in \mathbb{R}^m_+,\ z \neq 0)$. Примером подобной функции как раз и служит функция $\varphi(x) = d(f^+(x))$ из задачи (3). С помощью $d(z)$ можно ввести меру совместности системы $f(x) \le 0$, определяющей множество X, а именно

$$\bar{d} = \inf_x d(f^+(x)). \tag{4}$$

Если величина $\bar{d}$ достигается, то $X \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bar{d} = 0$. Достижимость $\bar{d}$ гарантируется в следующих случаях:

1) функции $f_i(x)$ линейны $(i = \overline{1,m})$;

2) множество X_ξ непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0$.

Приведем пример НЗ ВП 1-го рода, когда задача определения вектора $\bar{\xi}$ не имеет решения.

П р и м е р 1. В пространстве $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим задачу

$$\min\{x_1 \mid x_1^{-1} - x_2 \le 0,\ x_1 \ge 1,\ x_2 \le 0\}. \tag{5}$$

Здесь $\inf\{\|\xi\| \mid \xi \in E\} = \inf\limits_x \varphi(x) = 0$, но соответствующие нижние границы не достигаются. Множество X_ξ непустое и неограниченное для любого $\xi > 0$. Двойственная функция для задачи (5) имеет вид

$$\psi(\lambda) = \inf_x\{L(x,\lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^{-1} - x_2) + \lambda_2(-x_1 + 1) + \lambda_3 x_2\} = L(x(\lambda),\lambda),$$

где $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \ge 0$, $x(\lambda)$ — решение уравнения $\bigtriangledown_x L(x,\lambda) = 0$. Решая это уравнение, получим $x_1^2(\lambda) = \lambda_1(1-\lambda_2)^{-1}$, $\lambda_1 = \lambda_3 > 0$, $0 \le \lambda_2 < 1$, $x_2(\lambda) = x_2$ — произвольно. Отсюда $\psi(\lambda) = 2\sqrt{\lambda_1(1-\lambda_2)} + \lambda_2$, $\sup\limits_{\lambda \ge 0} \psi(\lambda) = +\infty$. Очевидно, в задаче (5) $X = \varnothing$, $\Lambda \neq \varnothing$, т. е. (5) — НЗ ВП 1-го рода.

С целью построения алгоритмов оптимальной коррекции НЗ ВП воспользуемся методом Тихонова регуляризации некорректных задач оптимизации. Применительно к разрешимой задаче ВП вида (1) этот метод состоит в решении задачи

$$\min\{g_\alpha(x) \mid x \in X\}, \tag{6}$$

где $g_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha\Omega(x)$, $\alpha > 0$, $\Omega(x)$ — некоторый стабилизатор [2] задачи (1). Для простоты положим $\Omega(x) = \|x\|^2$. Задача (6) при $X \neq \varnothing$ разрешима в единственной точке x_α. Легко видеть, что $|f_0(x_\alpha) - \bar{f}| \le \alpha\|\bar{x}_0\|^2$ и $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = \bar{x}_0$, где $\bar{x}_0$ — решение задачи (1) с минимальной нормой (нормальное решение), $\bar{f} = f_0(\bar{x}_0)$.

Для учета ограничений, определяющих множество X, сведем задачу (6) к минимизации штрафной функции $F_\alpha(x,r) = g_\alpha(x) + r d(x)$, где $r > 0$, $d(x)$ — из (4). Если задача оптимальной коррекции (2) определяется вектором $\bar{\xi}$, связанным с минимизацией функции $\varphi(x)$, то представляется естественным положить $d(x) = \varphi(x)$. В результате возникает задача минимизации регуляризованной квадратичной штрафной функции

$$\min_x \Big\{F_\alpha(x,r) = g_\alpha(x) + r\varphi(x) = f_0(x) + r\sum_{i=1}^m {f_i^+}^2(x) + \alpha\|x\|^2\Big\}. \tag{7}$$

Результаты о сходимости данного метода регуляризации для случая разрешимой задачи ВП хорошо известны (см., например, [2; 4; 5]). Для НЗ ВП 1-го рода из работы [6] следует, что при условии разрешимости задачи (2) и двойственной к ней имеет место сходимость $x_\alpha(r) = \arg\min\limits_x F_\alpha(x,r) \to \tilde{x}_0$, когда $\alpha \to 0$, $r \to \infty$, $r\alpha \to \infty$ ($\tilde{x}_0$ — нормальное решение задачи (2)).

В дальнейшем будем считать, что в задаче (1) вместо $f_i(x)$ известны непрерывные функции $f_i^\varepsilon(x)$, определенные на $\mathbb{R}^n$, такие что

$$|f_i(x) - f_i^\varepsilon(x)| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon \ge 0 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ i = 0,1,\ldots,m). \tag{8}$$

Тогда рассматриваемый метод регуляризации (7) (метод коррекции НЗ ВП) для задачи (1) сведется к задаче

$$\min_x\{F^\varepsilon_\alpha(x,r) = g^\varepsilon_\alpha(x) + r\varphi^\varepsilon(x)\}, \tag{9}$$

где $g^\varepsilon_\alpha(x) = f^\varepsilon_0(x) + \alpha\|x\|^2$, $\varphi^\varepsilon(x) = \|f^{\varepsilon^+}(x)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m \big(f_i^{\varepsilon^+}(x)\big)^2$, $\alpha > 0,\ r > 0,\ \varepsilon \geq 0$.

Лемма. *Для любого фиксированного набора* $s = [\alpha, r, \varepsilon]$ *параметров задачи* (9) *существует точка* $x_s = x^\varepsilon_\alpha(r) = \arg\min\limits_x\{F_s(x) = F^\varepsilon_\alpha(x,r)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале оценим $\varphi(x) = \varphi^\varepsilon(x) + \sum\limits_{i=1}^m \big(f_i^+(x) - f_i^{\varepsilon^+}(x)\big)\big(f_i^+(x) + f_i^{\varepsilon^+}(x)\big) < \varphi^\varepsilon(x) + 2\varepsilon\sum\limits_{i=1}^m f_i^{\varepsilon^+}(x) + m\varepsilon^2 \leq \varphi^\varepsilon(x) + m\varepsilon^2 + \sum\limits_{i=1}^m \big(f_i^{\varepsilon^{+2}}(x) + \varepsilon^2\big) = 2\varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} F_\alpha(x,r) &= g_\alpha(x) + r\varphi(x) < g^\varepsilon_\alpha(x) + 2r(\varphi^\varepsilon(x) + m\varepsilon^2) + \varepsilon \\ &= 2F^\varepsilon_\alpha(x,r) - g^\varepsilon_\alpha(x) + 2mr\varepsilon^2 + \varepsilon < 2F^\varepsilon_\alpha(x,r) - g_\alpha(x) + 2\varepsilon(mr\varepsilon + 1). \end{aligned} \tag{10}$$

Так как $g_\alpha(x)$ — сильно выпуклая функция, то $g_\alpha(x) \geq \bar g_\alpha > -\infty$ $(\forall x)$. Следовательно, из (10) получим

$$F_\alpha(x,r) < 2F^\varepsilon_\alpha(x,r) + 2\varepsilon(mr\varepsilon + 1) - \bar g_\alpha. \tag{11}$$

Пусть $M^\varepsilon_C = \{x \mid F^\varepsilon_\alpha(x,r) \leq C\} \neq \varnothing$ для некоторой константы C. Если $x' \in M^\varepsilon_C$, то в силу (11) $x' \in M_{C_1} = \{x \mid F_\alpha(x,r) \leq C_1\}$, где $C_1 = 2C + 2\varepsilon(mr\varepsilon + 1) - \bar g_\alpha$. Поскольку $F_\alpha(x,r)$ — сильно выпуклая по x функция, то множество M_{C_1} ограничено. Но $M^\varepsilon_C \subset M_{C_1}$, $\min\limits_x F_s(x) = \min\limits_{x\in M^\varepsilon_C} F_s(x)$, поэтому существует $x_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$.

Лемма доказана.

Пусть (1) — НЗ ВП 1-го рода, но вектор коррекции $\bar\xi$ не обязательно достигается. Применяя один из монотонных методов безусловной минимизации дифференцируемой функции n переменных $\varphi(x)$, определим последовательность точек $\{x_k\}$, которая минимизирует $\varphi(x)$ с заданной точностью $\bar\eta > 0$: $\varphi(x_k) - \bar\varphi \leq \bar\eta$, $\forall k \geq \bar k$.

Зафиксируем $k = \bar k$, положим $\xi_k = f^+(x_k)$ и образуем задачу

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\xi_k}\}. \tag{12}$$

Так как $x_k \in X_{\xi_k}$, то $X_{\xi_k} \neq \varnothing$. Задача (12) может иметь решения (как в примере 1 при $\xi = \xi_k$), но может быть и неразрешимой. Так, положим в задаче (5) $f_0(x) = e^{-x_1}$, тогда $\inf\{f_0(x) \mid x \in X_{\xi_k}\} = 0$ не достигается на X_{ξ_k}. В то же время множество $\Lambda = \{\lambda \geq 0 \mid \inf\limits_x\{e^{-x_1} + \lambda_1(x_1^{-1} - x_2) + \lambda_2(-x_1 + 1) + \lambda_3 x_2\} > -\infty\}$ будет непустым (например, $0 \in \Lambda$)), т. е. задача (5) с новой целевой функцией будет оставаться НЗ ВП 1-го рода.

Чтобы не рассматривать отдельно случаи разрешимости и неразрешимости задачи (12), мы в качестве оптимальной коррекции для задачи (1) будем рассматривать регуляризованную по Тихонову задачу (аналог (6)):

$$\min\{g_\alpha(x) \mid x \in X_{\xi_k}\}. \tag{13}$$

Ее (единственное) решение обозначим через x^k_α, $g_\alpha(x^k_\alpha) = g^k_\alpha$. Будем также считать, что разрешима при этом и двойственная к (13) задача, т. е. найдется вектор $\lambda^k_\alpha \geq 0$ такой, что пара $[x^k_\alpha, \lambda^k_\alpha]$ будет седловой точкой функции $L^k_\alpha(x,\lambda) = g_\alpha(x) + (\lambda, f(x) - \xi_k)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$.

Рассмотрим далее связь между задачами (9) и (13).

Теорема 1. *При сформулированных выше условиях справедливы оценки*

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| \leq A_0(s, \lambda^k_\alpha, \xi_k), \tag{14}$$

$$|g^\varepsilon_\alpha(x_s) - g^k_\alpha| \leq A_1(s, \lambda^k_\alpha, \xi_k), \tag{15}$$

где $A_0(s,\lambda^k_\alpha,\xi_k) = \frac{\|\lambda^k_\alpha\|}{2r} + \left[\frac{\|\lambda^k_\alpha\|^2}{4r^2} + \frac{\varepsilon}{r}\big(\|\lambda^k_\alpha\|_1 + 2\big) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{r^2}\right]^{1/2}$, $A_1(s,\lambda^k_\alpha,\xi_k) = \max\left\{4r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + \frac{1}{r} + 2\varepsilon,\ \|\lambda^k_\alpha\|A_0(s,\lambda^k_\alpha,\xi_k) + \varepsilon(\|\lambda^k_\alpha\|_1+1)\right\}$, $\|z=[z_1,\ldots,z_m]\|_1 = \sum\limits_{i=1}^m |z_i|$.

Доказательство. Согласно лемме существует точка $x_s = x^\varepsilon_\alpha(x)$, для которой выполняется неравенство

$$g^\varepsilon_\alpha(x_s) + r\varphi^\varepsilon(x_s) \le g^\varepsilon_\alpha(x^k_\alpha) + r\varphi^\varepsilon(x^k_\alpha). \tag{16}$$

Оценим $\varphi^\varepsilon(x^k_\alpha) < \varphi(x^k_\alpha) + 2\varepsilon\|f^+(x^k_\alpha)\|_1 + m\varepsilon^2 \le \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2$. С учетом этой оценки из (16) получим $g_\alpha(x_s) - \varepsilon + r\varphi^\varepsilon(x_s) \le g^k_\alpha + r\|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + \varepsilon$, откуда

$$r(\varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2) \le g^k_\alpha - g_\alpha(x_s) + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + 2\varepsilon. \tag{17}$$

Из определения седловой точки $[x^k_\alpha,\lambda^k_\alpha]$ вытекает

$$g^k_\alpha - g_\alpha(x_s) \le (\lambda^k_\alpha, f^+(x_s) - \xi_k) \le \|\lambda^k_\alpha\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon\|\lambda^k_\alpha\|_1. \tag{18}$$

Так как $\{x_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\varphi(x)$, то $\varliminf\limits_{k\to\infty}(\bigtriangledown\varphi(x_k), x - x_k) \ge 0$ $(\forall x)$. Поэтому можно считать

$$(\bigtriangledown\varphi(x_k), x - x_k) \ge -1/r^2 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ r > 1). \tag{19}$$

Поскольку

$$(\bigtriangledown\varphi(x_k), x - x_k) = 2\sum_{i=1}^m f_i^+(x_k)(\bigtriangledown f_i(x_k), x - x_k) \le 2\sum_{i=1}^m \xi^k_i[f_i(x) - f_i(x_k)] = 2(\xi_k, f(x)) - 2\|\xi_k\|^2,$$

где ξ^k_i — i-я компонента вектора ξ_k $(i=\overline{1,m})$, то с учетом (19) имеем

$$(\xi_k, f(x)) - \|\xi_k\|^2 \ge -\frac{1}{2r^2} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{20}$$

Далее получаем

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 = \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 - 2(\xi_k, f^{\varepsilon^+}(x_s)) + \|\xi_k\|^2 \le \varphi^\varepsilon(x_s) - 2(\xi_k, f^+(x_s)) + \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1,$$

что вместе с (20) дает

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \le \varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{r^2}. \tag{21}$$

Объединим неравенства (21), (17), (18):

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \le \frac{1}{r}(g^k_\alpha - g_\alpha(x_s)) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + 2\frac{\varepsilon}{r} + \frac{1}{r^2}$$

$$\le \frac{1}{r}\|\lambda^k_\alpha\|\,\|f^{\varepsilon+}(x_s) - \xi_k\| + \frac{\varepsilon}{r}(\|\lambda^k_\alpha\|_1 + 2) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{r^2}.$$

Отсюда

$$\left(\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| - \frac{\|\lambda^k_\alpha\|}{2r}\right)^2 \le \frac{\|\lambda^k_\alpha\|}{4r^2} + \frac{\varepsilon}{r}(\|\lambda^k_\alpha\|_1 + 2) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, справедлива оценка (14).

Оценим разность $|g^\varepsilon_\alpha(x_s) - g^k_\alpha|$. Из неравенства (17) вытекает

$$g^\varepsilon_\alpha(x_s) - g^k_\alpha \le r(\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s)) + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

Так как из неравенства (21) следует $\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s) \le 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{r^2}$, то

$$g_\alpha^\varepsilon(x_s) - g_\alpha^k \le 4r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + \frac{1}{r} + 2\varepsilon. \tag{22}$$

С другой стороны, из (18) и (14) получим

$$g_\alpha^k - g_\alpha^\varepsilon(x_s) < g_\alpha^k - g_\alpha(x_s) + \varepsilon \le \|\lambda_\alpha^k\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 1) \le \|\lambda_\alpha^k\| A_0(s, \lambda_\alpha^k, \xi_k) + \varepsilon(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 1).$$

Отсюда и из (22) имеем оценку (15).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть в задаче* (14) $\alpha = \bar{\alpha} > 0,\ k = \bar{k}$, *параметры* r *и* ε *в* (9) *выбраны так, чтобы* $r \to \infty,\ \varepsilon \to 0,\ r\varepsilon \to 0$. *Тогда* $\lim x_s = x_\alpha^k$.

В самом деле, поскольку $g_\alpha(x)$ — сильно выпуклая по x функция, то множество $M_0 = \{x \mid g_\alpha(x) \le g_\alpha(x_0)\}$ ограничено для произвольного фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}^n$. В силу (22) ограниченной будет и последовательность $\{x_s\}$. Пусть $\tilde{x}_\alpha$ — ее предельная точка. Согласно соотношениям (14) и (22) $\tilde{x}_\alpha \in X_{\xi_k},\ g_\alpha(\tilde{x}_\alpha) = g_\alpha^k$, т. е. $\tilde{x}_\alpha$ — решение (13). Но задача (13) имеет единственное решение x_α^k, поэтому $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha^k$ и $\lim x_s = x_\alpha^k$.

Далее применим метод регуляризации (9) непосредственно к задаче (12).

Теорема 2. *Пусть задача* (12) *разрешима при* $k = \bar{k}$, x_0^* — *ее нормальное решение,* λ_0^* — *соответствующий* x_0^* *вектор множителей Лагранжа. Если параметры* $s = [r, \alpha, \varepsilon]$ *в методе* (9) *выбраны так, чтобы*

$$r \to \infty, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad \alpha \to 0, \qquad \alpha r \to \infty, \qquad \frac{\varepsilon r}{\alpha} \to 0, \tag{23}$$

то $\lim x_s = x_0^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем придерживаться схемы доказательства предыдущей теоремы. Вспоминая, что $g_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha\|x\|^2$, перепишем неравенство (17) в виде

$$r(\varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2) \le f_0(x_0^*) - f_0(x_s) + \alpha\|x_0^*\|^2 + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + mr\varepsilon^2 + 2\varepsilon. \tag{24}$$

По аналогии с (18) имеем

$$f_0(x_0^*) - f_0(x_s) \le \|\lambda_0^*\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1. \tag{25}$$

С учетом неравенства (21), справедливого и в этой ситуации, из (24) и (25) получим

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 - \frac{\|\lambda_0^*\|}{r}\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| \le A_2(s, \lambda_0^*, \xi_k),$$

где $A_2(s, \lambda_0^*, \xi_k) = \frac{\varepsilon}{r}(\|\lambda_0^*\|_1 + 2) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{\alpha}{r}\|x_0^*\|^2 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{r^2}$. Отсюда

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| \le \frac{\|\lambda_0^*\|}{2r} + \Big(\frac{\|\lambda_0^*\|^2}{4r^2} + A_2(s, \lambda_0^*, \xi_k)\Big)^{1/2}. \tag{26}$$

Аналогично неравенству (22) имеем

$$f_0(x_s) - f_0(x_0^*) \le \alpha\|x_0^*\| + 4r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + mr\varepsilon^2 + \frac{1}{r} + 2\varepsilon. \tag{27}$$

Далее, из неравенства $F_s(x_s) \le F(x_0^*)$ следует

$$\alpha\|x_s\|^2 \le \alpha\|x_0^*\|^2 + r(\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s)) + f_0(x_0^*) - f_0(x_s) + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + mr\varepsilon^2 + 2\varepsilon. \tag{28}$$

С помощью (21) и (25) оценим выражение

$$r(\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s)) + f_0(x_0^*) - f_0(x_s)$$

$$\le -r\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{r} + \|\lambda_0^*\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1$$

$$= -\Big(\sqrt{r}\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| - \frac{\|\lambda_0^*\|}{2\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{\|\lambda_0^*\|^2}{4r} + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{r} + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1$$

$$\le \frac{\|\lambda_0^*\|^2}{4r} + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1 + \frac{1}{r}.$$

Поэтому из (28) вытекает

$$\|x_s\|^2 \le \|x_0^*\|^2 + \frac{1}{\alpha r}\Big(\frac{1}{4}\|\lambda_0^*\|^2 + 1\Big) + \frac{r\varepsilon}{\alpha}(4\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\alpha}(\|\lambda_0^*\|_1 + 2). \tag{29}$$

Переходя в (29) к пределу при условиях (23), заключаем, что последовательность $\{x_s\}$ ограничена. Пусть $\tilde{x}$ — ее предельная точка. Из (26), (27), (29) и (23) следует $\tilde{x} \in X_{\xi_k},\ f_0(\tilde{x}) \le f_0(x_0^*),\ \|\tilde{x}\| \le \|x_0^*\|$. В силу единственности решения x_0^* выполняется $\tilde{x} = x_0^*$ и $\lim x_s = x_0^*$.

Теорема доказана.

Приведем пример последовательностей $r = r_t,\ \varepsilon = \varepsilon_t,\ \alpha = \alpha_t$, удовлетворяющих условию (23) при $t \to \infty$: $r_t = r^t$ $(r > 1)$, $\varepsilon_t = \frac{1}{r_t\sqrt{r_t}},\ \alpha_t = \frac{1}{\sqrt[4]{r_t}}$.

3. Особенности применения кусочно-линейных норм

Как уже отмечалось в разд. 1, в задаче (2) оптимальной коррекции НЗ ВП наряду с евклидовой могут применяться и другие векторные нормы. Широкое распространение имеют, например, кусочно-линейные нормы: октаэдрическая $\|z = [z_1, \ldots, z_n]\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|$ и чебышевская $\|z\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} |z_j|$. В результате использования этих норм изменится метод (9), который можно будет трактовать как регуляризованный метод точных штрафных функций [7] применительно к НЗ ВП. Ниже рассмотрим особенности данного подхода на примере чебышевской нормы.

Поставим в соответствие НЗ ВП (1) аппроксимирующую задачу

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\xi_\infty}\}, \tag{30}$$

где $\xi_\infty = \arg\min\{\|\xi\|_\infty \mid \xi \in E\}$. Пусть $\varphi_\infty(x) = \|f^+(x)\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} f_i^+(x)$, $\bar{X}_\infty = \operatorname{Arg}\min\limits_x \varphi_\infty(x)$, $x_\infty^* \in \bar{X}_\infty$, $\varphi_\infty(x_\infty^*) = \varphi_\infty^*$. Легко видеть, что в качестве ξ_∞ в (30) можно взять вектор $\xi^* = f^+(x_\infty^*)$. При этом если для евклидовой нормы вектор оптимальной коррекции $\bar{\xi}$ в (2) определялся однозначно, то в случае чебышевской нормы свойство единственности ξ_∞ может не выполняться.

П р и м е р 2. Требуется найти

$$\min\{2x_1 + x_2 \mid x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_1 \ge 1\}.$$

Очевидно, $X = \varnothing$. Функция $\varphi_\infty(x) = \max\{x_1^+, x_2^+, (-x_1+1)^+\}$ достигает минимума $\varphi_\infty^* = 0.5$ в точках множества $\bar{X}_\infty = \{x = [x_1, x_2] \mid x_1 = 0.5,\ x_2 \le 0.5\}$. Для точек $(x_\infty^*)_1 = [0.5, 0.2] \in \bar{X}_\infty$ и $(x_\infty^*)_2 = [0.5, 0] \in \bar{X}_\infty$ получим соответственно векторы $(\xi_\infty)_1 = [0.5, 0.2, 0.5]$ и $(\xi_\infty)_2 = [0.5, 0, 0.5]$. При этом $\bar{X}_\infty \supset X_{(\xi_\infty)_i},\ i = 1, 2$.

Задача определения φ_∞^* при $X = \varnothing$ эквивалентна проблеме

$$\min\{\sigma \mid f_i^+(x) \le \sigma,\ i = \overline{1, m}\} \tag{31}$$

нахождения чебышевского приближения (см. например, [8]) несовместной системы выпуклых неравенств. Если положить $\bar{\xi}_\sigma = [\bar{\sigma}, \dots, \bar{\sigma}] \in \mathbb{R}^m_+$, где $\bar{\sigma}$ — решение (31), то, очевидно, $\bar{\xi}_\sigma = \xi_\infty$, причем $\bar{X}_\infty = X_{\bar{\xi}_\sigma}$.

Заметим, что использование в задаче (30) вектора ξ_∞ с равными компонентами может быть оправданным [9] при построении конкретных итерационных методов оптимальной коррекции НЗ ВП. Поэтому далее будем считать, что в задаче (30) $\xi_\infty = \bar{\xi}_\sigma$ и $X_{\bar{\xi}_\sigma} = \{x \mid \varphi_\infty(x) \le \bar{\sigma}\}$.

Задаче (30) поставим в соответствие проблему нахождения

$$\min_x \{P^\varepsilon_\alpha(x,r) = f^\varepsilon_0(x) + \alpha\|x\|^2 + r\varphi^\varepsilon_\infty(x)\}, \tag{32}$$

где $\varphi^\varepsilon_\infty(x) = \max\limits_{1\le i\le m} f^{\varepsilon^+}_i(x)$, $f^\varepsilon_i(x)$ удовлетворяют (8), $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varepsilon \ge 0$.

Применяя схему доказательства леммы, легко показать, что задача (32) разрешима в некоторой точке $x'_s = x'(\alpha, r, \varepsilon)$, $s = [\alpha, r, \varepsilon]$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varepsilon \ge 0$.

Теорема 3. *Пусть функция Лагранжа* $\mathcal{L}_{\bar{\sigma}}(x,\lambda) = f_0(x) + \lambda(\varphi_\infty(x) - \bar{\sigma})$ *для задачи* (30) *имеет седловую точку* $[\bar{x}_\infty, \bar{\lambda}_\infty]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. *Если в задаче* (32) $r \ge \bar{r} = \bar{\lambda}_\infty + 1$, *то справедливы оценки*

$$\varphi_\infty(x_s) - \bar{\sigma} \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(\bar{r}+1); \tag{33}$$

$$|f_0(x_s) - \bar{f}| \le \bar{r}(\alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(\bar{r}+1)); \tag{34}$$

$$\|x_s\|^2 \le \|\bar{x}_\infty\|^2 + \frac{2\varepsilon}{\alpha}(\bar{r}+1). \tag{35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $|f^+_i(x) - f^{\varepsilon^+}_i(x)| \le |f_i(x) - f^\varepsilon_i(x)| \le \varepsilon$, $\varphi^\varepsilon_\infty(x) \le \varphi_\infty(x) + \varepsilon$ $(\forall x)$, из неравенства $P^\varepsilon_\alpha(x'_s, r) \le P^\varepsilon_\alpha(\bar{x}_\infty, r)$ получим

$$r(\varphi_\infty(x'_s) - \bar{\sigma}) \le \bar{f} - f_0(x'_s) + \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r+1). \tag{36}$$

По определению седловой точки имеем

$$\bar{f} - f_0(x'_s) \le \bar{\lambda}_\infty(\varphi_\infty(x'_s) - \bar{\sigma}). \tag{37}$$

Поэтому из неравенства (36) следует $(r - \bar{\lambda}_\infty)(\varphi_\infty(x'_s) - \bar{\sigma}) \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r+1)$, что с учетом условия $r \ge \bar{r}$ приводит к оценке (33).

Далее из (36) вытекает неравенство $f_0(x'_s) - \bar{f} \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r+1)$. Используя наряду с этим оценки (37) и (33), приходим к (34).

Наконец, для получения (35) применим еще раз соотношение $P^\varepsilon_\alpha(x'_s, r) \le P^\varepsilon_\alpha(\bar{x}_\infty, r)$. Имеем $\alpha\|x'_s\| \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + r(\bar{\sigma} - \varphi_\infty(x'_s)) + \bar{f} - f_0(x'_s) + 2\varepsilon(r+1) \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + (r - \bar{\lambda}_\infty)(\bar{\sigma} - \varphi_\infty(x'_s)) + 2\varepsilon(r+1) \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r+1)$, т. е. справедлива оценка (35).

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть в задаче* (32) *параметры* r, α, ε *выбраны так, чтобы* $r \ge \bar{r}$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\frac{\varepsilon}{\alpha} \to 0$. *Тогда* $\lim x'_s = \bar{\bar{x}}_\infty$, *где* $\bar{\bar{x}}_\infty$ *— нормальное решение задачи* (30).

В самом деле, в силу (35) последовательность $\{x'_s\}$ ограничена при $\varepsilon \to 0$, $\alpha \to 0$, $\frac{\varepsilon}{\alpha} \to 0$, $r \ge \bar{r}$. Обозначим через $\tilde{x}$ ее предельную точку. Из неравенства (33) следует $\varphi_\infty(\tilde{x}) = \bar{\sigma}$, из (34) и (35) — $f_0(\tilde{x}) \le \bar{f}$, $\|\tilde{x}\| \le \|\bar{\bar{x}}_\infty\|$. Таким образом, $\tilde{x}$ — решение (30) с минимальной нормой, а единственность нормального решения влечет $\lim x'_s = \bar{\bar{x}}_\infty$.

В качестве последовательностей $\varepsilon = \varepsilon_t$, $\alpha = \alpha_t$, удовлетворяющих условию данного следствия, можно взять $\varepsilon_t = \varepsilon^t_0$ $(\varepsilon_0 < 1)$, $\alpha_t = \sqrt{\varepsilon_t}$ $(t \to \infty)$.

Значение $\bar{\sigma} = \varphi^*_\infty$ в задаче (30) может не достигаться. Тогда по аналогии с (12), (13) будем считать известной минимизирующую последовательность $\{x_k\}$: $\varphi_\infty(x_k) \searrow \inf\limits_x \varphi_\infty(x) = \varphi^*_\infty$ $(k \to \infty)$. Зафиксируем определенную точность $\nu > 0$, и пусть номер $\bar{k}$ таков, что

$$\varphi_\infty(x_k) - \varphi^*_\infty \le \nu \qquad (\forall k \ge \bar{k}). \tag{38}$$

Положим $\varphi_\infty(x_k) = \ \sigma_k,\ \bar\xi_{\sigma_k} = [\sigma_k, \ldots, \sigma_k] \in \mathbb{R}^m_+$. Образуем задачу

$$\min\left\{g_\alpha(x) \mid x \in X_{\bar\xi_{\sigma_k}}\right\}, \tag{39}$$

$g_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha\|x\|^2,\ \alpha = \bar\alpha > 0,\ k \geq \bar k$. Обозначим решение задачи (39) через $x^*_{\alpha k},\ g^*_{\alpha k} = g_\alpha(x^*_{\alpha k})$.

Поскольку последовательность $\varphi_\infty(x_k)$ монотонно убывает, то можно считать, что задача (39) удовлетворяет условию Слейтера: $\exists x_0 \in X_{\bar\xi_{\sigma_k}} : \varphi_\infty(x_0) < \sigma_k$. Поэтому функция Лагранжа для задачи (39) $\mathcal{L}^k_\alpha(x,\lambda) = g_\alpha(x) + \lambda(\varphi_\infty(x) - \sigma_k)$ имеет седловую точку $[x^*_{\alpha k}, \lambda^*_{\alpha k}]$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (32) $\alpha = \bar\alpha > 0$, *параметр* r *выбран так, чтобы* $r \geq \bar r = \dfrac{\lambda^*_{\alpha k}(C+1)+2}{C-1}$, *где* $C = \mathrm{const},\ C > 1$. *Справедливы оценки*

$$\begin{cases} (\varphi^\varepsilon_\infty(x'_s) - \sigma_k)^+ \leq C\varepsilon, \\ |g^\varepsilon_\alpha(x'_s) - g^*_{\alpha k}| \leq \bar r\nu + C_1\varepsilon, \end{cases} \tag{40}$$

ν — *из* (38), $C_1 = C_1(\alpha, k) = \max\{\lambda^*_{\alpha k}(C+1)+1, \bar r + 3\}$.

Вывод оценок (40) проводится по схеме доказательства теоремы 3 и будет здесь опущен.

Оценки (40) могут служить указанием к выбору параметров $\varepsilon,\ r,\ \nu$ с тем, чтобы обеспечить требуемую степень приближения для значения $g^*_{\alpha k}$.

Заключение

В работе рассматривались методы коррекции НЗ ВП, основанные на применении метода Тихонова для регуляризации некорректных задач оптимизации. Исходной задаче ВП с возможно несовместной системой ограничений ставится в соответствие аппроксимирующая задача, полученная в результате коррекции вектора правых частей относительно минимума некоторой векторной нормы. Исследуются два типа норм: евклидова и чебышевская. Каждый тип нормы влечет соответствующий вид штрафной функции: евклидова — квадратичную, чебышевская — точную штрафную функцию. Решение задачи минимизации этих штрафных функций с добавленным квадратичным стабилизатором определяет два подхода к построению методов оптимальной коррекции НЗ ВП. Для каждого подхода находятся условия сходимости метода и устанавливаются оценки качества сходимости к обобщенному решению исходной задачи.

Отдельно рассматриваются ситуации, когда функции задачи заданы с некоторой погрешностью, когда вектор оптимальной коррекции не достигается, когда откорректированная задача не имеет решения. Показано, что в предлагаемых методах отражается специфика сходимости соответствующих алгоритмов штрафных функций. Для квадратичного штрафа это неограниченное возрастание штрафного коэффициента, а для точной штрафной функции — наличие у этого коэффициента определенного порога, начиная с которого достигается требуемая точность метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
3. **Скарин В. Д.** О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.

4. **Антипин А. С.** Метод регуляризации в задачах выпуклого программирования // Экономика и мат. методы. 1975. Т. 11, № 2. С. 336–342.
5. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
6. **Скарин В. Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
7. **Еремин И. И.** К методу штрафов в математическом программировании // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 4. С. 459–461.
8. **Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.** Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967. 460 с.
9. **Скарин В. Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.

Скарин Владимир Дмитриевич
доктор физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 1.06.2017

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ. 1983. 336 p.
2. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Factorial Press. 2002. 824 p.
3. Skarin V.D. On the application of regularization method for correction of improper problems of convex programming. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2013, vol. 283, suppl. 1, pp. 126–138. doi: 10.1134/S0081543813090137 .
4. Antipin A.S. A regularization method for the problems of convex programming. *Economic and Math. Methods.* 1975, vol. 11, no. 2, pp. 336–342. (in Russian).
5. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [An introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ. 1976. 192 p.
6. Skarin V.D. On a regularization method for inconsistent convex programming problems. *Russian Math.* (*Izv. VUZ*). 1995, vol. 39, no. 12, pp. 78–85.
7. Eremin I.I. On the penalty method in mathematical programming. *Dokl. Math.* 1996. vol. 53, no. 1, pp. 138–140.
8. Zukhovitskii S.I., Avdeeva L.I. *Lineinoe i vypukloe programmirovanie* [Linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ. 1967, 460 p.
9. Skarin V.D. Barrier function method and correction algorithms for improper convex programming problems. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. S120–S134. doi:10.1134/S0081543808060126 .

The paper was received by the Editorial Office on June 1, 2017.

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: skavd@imm.uran.ru .