ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.977

ТРИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И БЕРГМАНА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ [1]

Р. Р. Акопян, М. С. Саидусайнов

Пусть $\gamma(\rho)$ — функция неотрицательная, измеримая, почти всюду отличная от нуля на $(0,1)$, у которой произведение $\rho\gamma(\rho)$ суммируемо на $(0,1)$. Обозначим через $\mathcal{B}=B_\gamma^{p,q}$, $1\le p\le\infty$, $1\le q<\infty$, пространство аналитических в круге функций f, для которых суммируема на $(0,1)$ функция $M_p^q(f,\rho)\rho\gamma(\rho)$, где $M_p^q(f,\rho)$ есть p-среднее значение f на окружности радиуса ρ; это пространство наделено нормой

$$\|f\|_{B_\gamma^{p,q}}=\|M_p(f,\cdot)\|_{L^q_{\rho\gamma(\rho)}(0,1)}\,.$$

В случае $q=\infty$ пространство $\mathcal{B}=B_\gamma^{p,\infty}$ отождествляется с пространством Харди H^p. С помощью оператора L, заданного на аналитических в единичном круге функциях $f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_kz^k$ равенством $Lf(z)=\sum_{k=0}^\infty l_kc_kz^k$, определим класс

$$LB_\gamma^{p,q}(N):=\{f\colon \|Lf\|_{B_\gamma^{p,q}}\le N\},\quad N>0.$$

Для пары таких операторов L и G при некоторых ограничениях исследованы три экстремальные задачи.

(1) Найдено наилучшее приближение класса $LB_\gamma^{p_1,q_1}(1)$ классом $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$ по норме пространства $B_\gamma^{p_2,q_2}$ при $2\le p_1\le\infty$, $1\le p_2\le 2$, $1\le p_3\le 2$, $1\le q_1=q_2=q_3\le\infty$ и $q_s=2$ или ∞.

(2) Найдено наилучшее приближение оператора L множеством $\mathcal{L}(N)$, $N>0$, линейных ограниченных операторов из $B_\gamma^{p_1,q_1}$ в $B_\gamma^{p_2,q_2}$ с нормой, не превосходящей N, на классе $GB_\gamma^{p_3,q_3}(1)$ при $2\le p_1\le\infty$, $1\le p_2\le 2$, $2\le p_3\le\infty$, $1\le q_1=q_2=q_3\le\infty$ и $q_s=2$ или ∞.

(3) Получены оценки модуля непрерывности оператора L на классе $GB_\gamma^{p_3,q_3}(1)$, а в гильбертовом случае — его точное значение.

Ключевые слова: пространства Харди и Бергмана; наилучшее приближение класса классом; наилучшее приближение неограниченного оператора ограниченными; модуль непрерывности оператора.

R. R. Akopyan, M. S. Saidusainov. Three extremal problems in the Hardy and Bergman spaces of functions analytic in a disk.

Let a nonnegative measurable function $\gamma(\rho)$ be nonzero almost everywhere on $(0,1)$, and let the product $\rho\gamma(\rho)$ be summable on $(0,1)$. Denote by $\mathcal{B}=B_\gamma^{p,q}$, $1\le p\le\infty$, $1\le q<\infty$, the space of functions f analytic in the unit disk for which the function $M_p^q(f,\rho)\rho\gamma(\rho)$ is summable on $(0,1)$, where $M_p^q(f,\rho)$ is the p-mean of f on the circle of radius ρ; this space is equipped with the norm

$$\|f\|_{B_\gamma^{p,q}}=\|M_p(f,\cdot)\|_{L^q_{\rho\gamma(\rho)}(0,1)}.$$

In the case $q=\infty$, the space $\mathcal{B}=B_\gamma^{p,\infty}$ is identified with the Hardy space H^p. Using an operator L given by the equality $Lf(z)=\sum_{k=0}^\infty l_kc_kz^k$ on functions $f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_kz^k$ analytic in the unit disk, we define the class

$$LB_\gamma^{p,q}(N):=\{f\colon \|Lf\|_{B_\gamma^{p,q}}\le N\},\quad N>0.$$

For a pair of such operators L and G, under some constraints, the following three extremal problems are solved.

(1) The best approximation of the class $LB_\gamma^{p_1,q_1}(1)$ by the class $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$ in the norm of the space $B_\gamma^{p_2,q_2}$ is found for $2\le p_1\le\infty$, $1\le p_2\le 2$, $1\le p_3\le 2$, $1\le q_1=q_2=q_3\le\infty$, and $q_s=2$ or ∞.

(2) The best approximation of the operator L by the set $\mathcal{L}(N)$, $N>0$, of linear bounded operators from $B_\gamma^{p_1,q_1}$ to $B_\gamma^{p_2,q_2}$ with the norm not exceeding N on the class $GB_\gamma^{p_3,q_3}(1)$ is found for $2\le p_1\le\infty$, $1\le p_2\le 2$, $2\le p_3\le\infty$, $1\le q_1=q_2=q_3\le\infty$, and $q_s=2$ or ∞.

(3) Bounds for the modulus of continuity of the operator L on the class $GB_\gamma^{p_3,q_3}(1)$ are obtained, and the exact value of the modulus is found in the Hilbert case.

Keywords: Hardy and Bergman spaces, best approximation of a class by a class, best approximation of an unbounded operator by bounded operators, modulus of continuity of an operator.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

MSC: 30E10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-22-32

1. Введение

В данной статье рассматривается несколько взаимосвязанных экстремальных задач во множестве $\mathcal{A}$ аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости. Для функции $f \in \mathcal{A}$ через $M_p(f,\rho)$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le \rho < 1$, обозначим p-среднее значение функции f на окружности радиуса ρ :

$$M_p(f,\rho) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\{|f(z)| \colon |z| = \rho\}, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что p-среднее, определенное равенством (1.1), не убывает по параметру p, $1 \le p \le \infty$, и не убывает по ρ, $0 \le \rho < 1$ [7, гл. 6, § 3, с. 310]. При $p = 2$ справедливо равенство

$$M_2(f,\rho) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \rho^{2n}\Big)^{1/2}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Пусть $\gamma(\rho)$ — весовая функция на $(0,1)$, т. е. функция неотрицательная, измеримая, почти всюду отличная от нуля на $(0,1)$, у которой произведение $\rho\gamma(\rho)$ суммируемо на $(0,1)$. Рассмотрим множество $\mathcal{B} = B_\gamma^{p,q}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, аналитических в круге функций $f \in \mathcal{A}$, для которых функция $M_p^q(f,\rho)\rho\gamma(\rho)$ является суммируемой на $(0,1)$. Множество $B_\gamma^{p,q}$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{B_\gamma^{p,q}} = \|M_p(f,\cdot)\|_{L^q_{\rho\gamma(\rho)}(0,1)} = \left(\int_0^1 M_p^q(f,\rho)\rho\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \tag{1.2}$$

В случае $q = p$ пространство $B_\gamma^{p,q} = B_\gamma^p$ является пространством Бергмана с (радиальным) весом γ.

В случае $q = \infty$, $1 \le p \le \infty$, пространство $B_\gamma^{p,\infty}$ естественно отождествить с пространством Харди H^p аналитических в единичном круге функций f, для которых функция $M_p(f,\rho)$ является ограниченной на $(0,1)$ или, что то же самое, имеет конечный предел при $\rho \to 1-0$; пространство Харди H^p наделено нормой

$$\|f\|_{H^p} = \|M_p(f,\cdot)\|_{L^\infty(0,1)} = \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p}.$$

Подробную информацию о пространствах функций, аналитических в круге, и их обобщениях можно найти в обзорной работе [12].

С помощью аналитической в единичном круге функции

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$$

определим во множестве $\mathcal{A}$ аналитических в круге функций оператор “свертки” L формулой

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{1.3}$$

Пусть $\mathbb{N}(L) := \{k \in \mathbb{Z}_+ : l_k \neq 0\}$ есть множество номеров ненулевых коэффициентов оператора L. В данной статье будут рассматриваться операторы, у которых $\mathbb{N}(L)$ — множество номеров, начиная с некоторого номера $n(L)$, так что $n(L)$ является наименьшим номером k, для которого $l_k \neq 0$. Согласно этим предположениям ядро оператора L есть множество $\mathcal{P}_{n(L)-1}$ алгебраических многочленов степени, меньшей $n(L)$.

Примерами операторов вида (1.3) являются операторы дифференцирования

$$(\mathcal{D}^n f)(z) = z^n f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(n-k)!}\, c_k z^k, \tag{1.4}$$

$$(D^n f)(z) = \frac{d^n}{dt^n}\, f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^n\, c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}. \tag{1.5}$$

Для числа $N > 0$ и оператора L вида (1.3) выделим класс $L\mathcal{B}(N)$ аналитических в круге функций f, удовлетворяющих условию $Lf \in \mathcal{B}$ и неравенству $\|Lf\|_{\mathcal{B}} \leq N$. В случае, когда $N = 1$, будем использовать обозначение $L\mathcal{B} := L\mathcal{B}(1)$.

В настоящей статье будут исследоваться три экстремальные задачи для тройки пространств аналитических функций $\mathcal{B}_s = B_\gamma^{p_s, q_s}$, $s = 1, 2, 3$, и операторов вида (1.3).

Первой из них является задача вычисления величины

$$\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(L\mathcal{B}_1, G\mathcal{B}_3(N))_{\mathcal{B}_2} := \sup_{f \in L\mathcal{B}_1} \inf_{\varphi \in G\mathcal{B}_3(N)} \|f - \varphi\|_{\mathcal{B}_2}, \quad N > 0, \tag{1.6}$$

наилучшего приближения класса $L\mathcal{B}_1$ классом $G\mathcal{B}_3(N)$, определяемых операторами L и G вида (1.3), по норме пространства $\mathcal{B}_2$.

Вторая рассматриваемая задача — задача о модуле непрерывности оператора L из $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$ на классе $G\mathcal{B}_3$. *Модулем непрерывности оператора* L будем называть функцию переменной $\delta > 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; L, G\mathcal{B}_3)_{\mathcal{B}_2} := \sup\left\{\|Lf\|_{\mathcal{B}_2} : f \in G\mathcal{B}_3,\ \|f\|_{\mathcal{B}_1} \leq \delta\right\}. \tag{1.7}$$

Из определения (1.7) модуля непрерывности для функций $f \in \mathcal{B}_1$, для которых $Gf \in \mathcal{B}_3$, следует точное неравенство

$$\|Lf\|_{\mathcal{B}_2} \leq \|Gf\|_{\mathcal{B}_3}\, \omega\Big(\frac{\|f\|_{\mathcal{B}_1}}{\|Gf\|_{\mathcal{B}_3}}\Big). \tag{1.8}$$

Если для пары операторов L и G имеет место (мультипликативное) неравенство колмогоровского типа, т. е. неравенство

$$\|Lf\|_{\mathcal{B}_2} \leq \mathcal{C}\, \|f\|_{\mathcal{B}_1}^{\alpha}\, \|Gf\|_{\mathcal{B}_3}^{1-\alpha}, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(L, G, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3), \quad \alpha = \alpha(L, G, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3), \quad 0 < \alpha < 1,$$

то для модуля непрерывности справедлива оценка сверху

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{C}\, \delta^{\alpha}.$$

Таким образом, неравенство (1.8) является уточнением неравенства (1.9).

Ряд неравенств вида (1.9) для операторов дифференцирования и дифференцирования по аргументу (1.5) в пространствах B^2 и B^2_γ получены в последнее время в работах С. Б. Вакарчука, М. Б. Вакарчука, М. Ш. Шабозова, М. С. Саидусайнова, (см. [4–6; 8; 11] и приведенную там библиографию).

Третьей является задача наилучшего приближения оператора L линейными ограниченными операторами на классе $Q = G\mathcal{B}_3$. Обозначим через $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N)_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$, $N > 0$, множество линейных ограниченных операторов из $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$, норма которых не превосходит N. Для оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ величина

$$\mathcal{U}(T) := \sup\left\{\|Lf - Tf\|_{\mathcal{B}_2} : f \in G\mathcal{B}_3\right\}$$

Т а б л и ц а

$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_2$	$\mathcal{B}_3$	a_k	b_k	ω_k	δ_k
$B_\gamma^{p_1,q}$	$B_\gamma^{p_2,q}$	$B_\gamma^{p_3,q}$	$\lvert l_k\rvert^{-1}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}$	$\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}$
H^{p_1}	$B_\gamma^{p_2,2}$	H^{p_3}	$\lvert l_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$	$\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}$
$B_\gamma^{p_1,2}$	H^{p_2}	$B_\gamma^{p_3,2}$	$\lvert l_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$	$\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}$
$B_\gamma^{p_1,2}$	$B_\gamma^{p_2,2}$	H^{p_3}	$\lvert l_k\rvert^{-1}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$	$\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$
$B_\gamma^{p_1,2}$	H^{p_2}	H^{p_3}	$\lvert l_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}$	$\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$
H^{p_1}	H^{p_2}	$B_\gamma^{p_3,2}$	$\lvert l_k\rvert^{-1}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$	$\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$
H^{p_1}	$B_\gamma^{p_2,2}$	$B_\gamma^{p_3,2}$	$\lvert l_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{1/2}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}$	$\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}$	$\lvert g_k\rvert^{-1}\, m_{2k+1}^{-1/2}$

является уклонением оператора T от оператора L на классе $Q = G\mathcal{B}_3$. Соответственно

$$E(N) := \inf\left\{\mathcal{U}(T)\colon T \in \mathcal{L}(N)\right\} \tag{1.10}$$

есть величина наилучшего приближения оператора L множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе $G\mathcal{B}_3$.

Задача (1.10) является конкретным вариантом задачи наилучшего приближения оператора линейными ограниченными операторами (задачи Стечкина). Историю исследования задачи Стечкина и взаимосвязанных экстремальных задач, в том числе задач о модуле непрерывности (неравенстве Колмогорова), и приближения одного класса функций другим можно найти в обзорной работе [2] (см. также [3] и приведенную там библиографию). Представим здесь лишь следующий результат, частный случай более общего утверждения С. Б. Стечкина (1965–1967) [9] (см. также [2, теорема 1.1]) о взаимосвязи задач (1.7) и (1.10). Имеют место следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} &E(N) \ge \sup\left\{\omega(\delta) - N\delta\colon \delta > 0\right\}, \quad N > 0,\\ &\omega(\delta) \le \inf\left\{E(N) + N\delta\colon N > 0\right\}, \quad \delta > 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Задача Стечкина и задача о модуле непрерывности оператора взаимосвязаны и с задачей наилучшего приближения одного класса другим [1] (см. также [2]); эта взаимосвязь в данной работе не используется.

Отправной точкой нашего исследования являются два утверждения Л. В. Тайкова (1967), полученные в работе [10] в теоремах 3 и 4, где даны решения задач (1.6) и (1.10) для операторов дифференцирования (1.4) и тройки пространств $\mathcal{B}_s = H^{p_s}$, $s = 1,2,3$, $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $1 \le p_3 \le 2$. В настоящей статье будут использоваться идеи работы [10] и взаимосвязь задач (1.11). Мы получим решения задач (1.6), (1.10) и исследуем задачу (1.7) для троек пространств $\mathcal{B}_s$, $s = 1,2,3$, в случаях, описанных в первых трех столбцах приведенной выше таблицы. Решения задач будут выписано в терминах последовательностей A, B, W и D, элементы которых, соответственно a_k, b_k, ω_k и δ_k, также описаны в ней.

2. Вспомогательные утверждения

В этом разделе будут вычислены нормы оператора вида (1.3)

$$\mathcal{N}(L, p_1, q_1, p_2, q_2, \gamma) := \|L\|_{B_\gamma^{p_1,q_1} \to B_\gamma^{p_2,q_2}}$$

при некоторых, нужных нам в дальнейшем, значениях параметров. Обозначим через m_s степенной момент весовой функции γ порядка s, т. е. величину, определяемую равенством

$$m_s = m_s(\gamma) := \int_0^1 \gamma(\rho)\rho^s\, d\rho.$$

Ясно, что $m_s(\gamma)$ убывает по s. При этом если функция γ ограниченная и отделена от нуля, т. е.

$$\exists_{c_2>c_1>0} : \forall_{\rho\in(0,1)} \quad c_1 \le \gamma(\rho) \le c_2,$$

то для произвольного $s \ge 0$ справедливо неравенство

$$\frac{c_1}{s+1} \le m_s(\gamma) \le \frac{c_2}{s+1}.$$

Через $\eta_{s,q}$ будем обозначать норму степенной функции z^s в пространстве $B^{p,q}_\gamma$; имеем

$$\eta_{s,q} = \eta_{s,q}(\gamma) := \|z^s\|_{B^{p,q}_\gamma} = \begin{cases} m^{1/q}_{qs+1}, & 1 \le q < \infty, \\ 1, & q = \infty. \end{cases}$$

Лемма 1. *При* $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $1 \le q \le \infty$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{N}(L, p_1, q, p_2, q, \gamma) = \sup\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{N}(L, p_1, 2, p_2, \infty, \gamma) = \sup\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{N}(L, p_1, \infty, p_2, 2, \gamma) = \sup\{|l_n|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Нужные оценки снизу норм оператора дают функции $f_k(z) = \eta^{-1}_{k,q_1} z^k$. Получим такие же оценки сверху, а следовательно — точные значения норм.

В обоснование (2.1) оценку сверху нормы оператора выводим из следующей цепочки соотношений:

$$\|Lf\|_{B^{p_2,q}_\gamma} \le \|Lf\|_{B^{2,q}_\gamma} = \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2\, |c_k|^2\, \rho^{2k} \right)^{q/2} \rho\gamma(\rho)\, d\rho \right)^{1/q}$$

$$\le \sup\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\} \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2\, \rho^{2k} \right)^{q/2} \rho\gamma(\rho)\, d\rho \right)^{1/q}$$

$$= \sup\left\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\}\, \|f\|_{B^{2,q}_\gamma} \le \sup\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\}\, \|f\|_{B^{p_1,q}_\gamma}.$$

Оценку сверху для доказательства равенства (2.2) получим следующим образом:

$$\|Lf\|_{B^{p_2,2}_\gamma} \le \|Lf\|_{B^{2,2}_\gamma} = \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2\, |c_k|^2\, \rho^{2k+1}\, \gamma(\rho) \right) d\rho \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2\, |c_k|^2\, m_{2k+1} \right)^{1/2} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \sup\left\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{2,\infty}_\gamma} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{p_1,\infty}_\gamma}.$$

Наконец, оценка сверху при доказательстве равенства (2.3) такова:

$$\|Lf\|_{B^{p_2,\infty}_\gamma} \le \|Lf\|_{B^{2,\infty}_\gamma} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2\, |c_k|^2 \right)^{1/2} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2\, m_{2k+1} \right)^{1/2}$$

$$= \sup\left\{|l_k|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{2,2}_\gamma} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{p_1,2}_\gamma}.$$

Лемма 1 доказана.

Для двух последовательностей, $A = \{a_k\}_{k\ge n}$ и $B = \{b_k\}_{k\ge n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, определим числовую последовательность $N(A,B) = \{N_k\}_{k\ge n}$, элементы которой задаются равенствами

$$N_k := \frac{a_k - a_{k+1}}{b_k - b_{k+1}}, \quad k \ge n. \tag{2.4}$$

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть A и B — убывающие последовательности положительных чисел, а последовательность $N(A,B)$ не убывает. Тогда для любого $N_{n-1}, 0 \le N_{n-1} \le N_n$, функция μ переменой N, определенная при $N \in [N_{n-1}, +\infty)$ равенством*

$$\mu(N) = \mu(N; A, B) := \max\left\{a_k - N\, b_k \colon k \ge n\right\},$$

является непрерывной кусочно линейной и для нее справедливо равенство

$$\mu(N) = a_k - N\, b_k, \quad N \in [N_{k-1}, N_k], \quad \kappa \ge n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейные функции $\mu_j(N) := a_j - N\, b_j$, $j \ge n$. В точках N_j значения функций μ_j и μ_{j+1} равны: $\mu_j(N_j) = \mu_{j+1}(N_j)$. Из условия убывания последовательности A следует, что $\mu_j(N) > \mu_{j+1}(N)$, если $N < N_j$, и $\mu_j(N) < \mu_{j+1}(N)$, если $N > N_j$. Отсюда для произвольного $k \ge n$, используя монотонность последовательности $N(A,B)$, индукцией по j получим: для любого $j < k$ и $N > N_{k-1}$ справедливо неравенство $\mu_j(N) < \mu_k(N)$; для любого $j > k$ и $N < N_k$ — неравенство $\mu_j(N) < \mu_k(N)$. Таким образом, при $N \in [N_{k-1}, N_k]$ для всех $j \ge n, j \ne k$ имеем $\mu_j(N) < \mu_k(N)$. Лемма 2 доказана.

Отметим, что в условиях леммы 2 последовательность $\{a_k/b_k\}_{k \ge n}$ не убывает и последовательность A является выпуклой относительно последовательности B, т. е.

$$\frac{b_k - b_{k+1}}{b_{k-1} - b_{k+1}}\, a_{k-1} + \frac{b_{k-1} - b_k}{b_{k-1} - b_{k+1}}\, a_{k+1} \le a_k, \quad k \ge n+1.$$

В дальнейшем будем считать, что справедливы условия

$$\lim_{k \to +\infty} b_k = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} N_k = +\infty.$$

В случае $N_{n-1} > 0$ примем, что значение функции μ на $(0, N_{n-1})$ равно $+\infty$.

Определим кусочно линейную функцию ξ положительной переменной δ равенством

$$\xi(\delta) = \xi(\delta; A, B) := \begin{cases} a_k + N_k(\delta - b_k), & \delta \in [b_{k+1}, b_k],\ k \ge n, \\ a_n + N_{n-1}(\delta - b_n), & \delta \ge b_n, \end{cases} \tag{2.5}$$

в котором последовательность $N(A,B) = \{N_k\}_{k \ge n-1}$ определена в (2.4). Имеет место следующее утверждение, связывающее функции $\mu(N; A, B)$ и $\xi(\delta; A, B)$.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 справедливы равенства*

$$\sup\left\{\xi(\delta) - N\delta \colon \delta > 0\right\} = \mu(N), \tag{2.6}$$

$$\inf\left\{\mu(N) + N\delta \colon N > 0\right\} = \xi(\delta). \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $N > 0$ функция $\xi(\delta) - N\delta$ переменной δ является кусочно линейной, следовательно,

$$\sup\left\{\xi(\delta) - N\delta \colon \delta > 0\right\} = \sup\left\{\xi(b_k) - Nb_k \colon k \ge n\right\} = \sup\left\{a_k - Nb_k \colon k \ge n\right\}.$$

Теперь равенство (2.6) вытекает из леммы 2.

Так же для произвольного $\delta > 0$ функция $\mu(N) + N\delta$ является кусочно линейной, и, значит, имеет место равенство

$$\inf\left\{\mu(N) + N\delta \colon N > 0\right\} = \inf\left\{\mu(N_k) + N_k\delta \colon k \ge n-1\right\} = \inf\left\{a_k + N_k(\delta - b_k) \colon k \ge n-1\right\}.$$

При вычислении последней нижней грани, проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2, получим равенство (2.7). Лемма 3 доказана.

3. Приближение класса классом

Пусть L, G — пара линейных операторов вида (1.3), определяемых аналитическими в единичном круге функциями

$$L(z) = \sum_{k=n(L)}^{\infty} l_k z^k, \quad G(z) = \sum_{k=n(G)}^{\infty} g_k z^k. \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что ядро оператора G содержит ядро оператора L, т. е. выполняется условие $n(G) \geq n(L)$. Обозначим $A := \{a_k\}_{k \geq n}$ и $B := \{b_k\}_{k \geq n}$, $n = n(G)$, — последовательности с элементами

$$a_k := |l_k|^{-1}\, \eta_{k,q_1}^{-1}\, \eta_{k,q_2}, \quad b_k := |g_k|^{-1}\, \eta_{k,q_3}^{-1}\, \eta_{k,q_2}; \tag{3.2}$$

вид a_k и b_k для рассматриваемых случаев пространств приведен в таблице на с. 25. В этой части статьи в определении функции $\mu(N; A, B)$ считаем $N_{n-1} = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $2 \leq p_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq 2$, $1 \leq p_3 \leq 2$, $1 \leq q \leq \infty$, $N > 0$ *и последовательности* A *и* B *убывают к нулю, а* $N(A, B)$ *не убывает и неограниченная. Тогда в случаях пространств* $\mathcal{B}_\nu, \nu = 1, 2, 3,$ *описанных в таблице на с.* 25, *для значения величины* (1.6) *наилучшего приближения класса классом справедливы равенства*

$$\mathcal{E}(L\mathcal{B}_1, G\mathcal{B}_3(N))_{\mathcal{B}_2} = \max\{a_k - N\, b_k \colon k \geq n(G)\} = \mu(N; A, B).$$

Доказательство. Для оценки снизу рассмотрим функцию $f(z) = \alpha z^k$, где $k \geq n(G)$. При таком выборе k значения g_k и, следовательно, l_k отличны от нуля. В случае $\alpha = |l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1}$ функция f принадлежит классу $LB_\gamma^{p_1,q_1}$. Действительно, имеет место равенство

$$\|Lf\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}} = \|l_k \alpha z^k\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}} = \alpha |l_k| \|z^k\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}} = 1.$$

Элементом наилучшего приближения функции $f(z) = \alpha z^k$ классом $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$ является функция вида $\varphi_0(z) = Cz^k, C > 0$. Для того чтобы φ_0 принадлежала классу $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\|G\varphi_0\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = \|g_k C z^k\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = C|g_k|\eta_{k,q_3} \leq N.$$

Соответственно наилучшее приближение вычисляется следующим образом:

$$\inf\big\{\big\|\alpha z^k - Cz^k\big\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} \colon C \leq N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\big\} = \max\big\{0, |l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1} - N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\big\}\eta_{k,q_2},$$

откуда получаем оценку снизу величины (1.6):

$$\mathcal{E}(LB_\gamma^{p_1,q_1}, GB_\gamma^{p_3,q_3}(N))_{B_\gamma^{p_2,q_2}} \geq \max\big\{|l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1}\eta_{k,q_2} - N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\eta_{k,q_2}\big\},$$

где максимум берется по номерам k, для которых справедливо неравенство

$$|l_k|^{-1}|g_k|\eta_{k,q_1}^{-1}\eta_{k,q_3} > N. \tag{3.3}$$

Заметим, что если максимум брать по всем номерам $k \geq n$, то его величина не изменится. Тогда по лемме 2 в рассматриваемых случаях эта величина равна $\mu(N; A, B)$.

Для оценки сверху достаточно для произвольной функции $f \in LB_\gamma^{p_1,q_1}$ получить оценку сверху ее наилучшего приближения классом $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$ по норме пространства $B_\gamma^{p_2,q_2}$. Рассмотрим линейный метод приближения Λ, определяемый равенством

$$\Lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

в котором множители λ_k выберем следующим образом: $\lambda_k = N|l_k|\,|g_k|^{-1}\,\eta_{k,q_1}\eta_{k,q_3}^{-1}$, если справедливо неравенство (3.3), и $\lambda_k = 1$ для номеров k, для которых (3.3) не выполняется. Убедимся, что функция Λf принадлежит классу $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$. Действительно, если $f \in LB_\gamma^{p_1,q_1}$, то для рассматриваемого случая пространств из леммы 1 получаем неравенство

$$\|G\Lambda f\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = \Big\|\sum_{k=n}^{\infty}(g_k\lambda_k l_k^{-1})l_k c_k z^k\Big\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} \le \sup\big\{|\lambda_k g_k l_k^{-1}|\eta_{k,q_3}\eta_{k,q_1}^{-1} \colon k \ge n\big\}\|Lf\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}} \le N.$$

Так же, используя лемму 1, оценим уклонение

$$\|f - \Lambda f\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} = \Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{l_k}\,l_k c_k z^k\Big\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} = \max\big\{|l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1}\eta_{k,q_2} - N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\eta_{k,q_2}\big\}\|Lf\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}},$$

где максимум берется по номерам k, для которых справедливо неравенство (3.3) или, что то же самое, по $k \ge n$. Соответственно по лемме 2 получаем оценку сверху

$$\mathcal{E}(LB_\gamma^{p_1,q_1}, GB_\gamma^{p_3,q_3}(N))_{B_\gamma^{p_2,q_2}} \le \mu(N; A, B).$$

Оценки снизу и сверху совпали. Теорема доказана.

4. Модуль непрерывности оператора и задача Стечкина

Пусть L, G — пара линейных операторов вида (1.3), определяемых функциями (3.1). В этой части статьи будем использовать следующие обозначения:

$$\varphi_k(z) := g_k^{-1}\,\eta_{k,q_3}^{-1}\,z^k, \quad k \ge n, \quad n = n(G); \tag{4.1}$$

$W := \{\omega_k\}_{k\ge n}$ и $D := \{\delta_k\}_{k\ge n}$ — последовательности с элементами

$$\omega_k := \|L\varphi_k\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} = |l_k|\,|g_k|^{-1}\,\eta_{k,q_3}^{-1}\,\eta_{k,q_2}, \quad \delta_k := \|\varphi_k\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}} = |g_k|^{-1}\,\eta_{k,q_3}^{-1}\,\eta_{k,q_1}; \tag{4.2}$$

вид ω_k и δ_k для рассматриваемых случаев пространств приведен в таблице на с. 25. Соответственно элементы последовательности $N(W, D)$ и число N_{n-1} задаются равенствами

$$N_k = \frac{\omega_k - \omega_{k+1}}{\delta_k - \delta_{k+1}}, \quad k \ge n; \quad N_{n-1} := |l_{n-1}|\,\eta_{n-1,q_1}^{-1}\,\eta_{n-1,q_2}.$$

Рассмотрим оператор $T_0 = T_0[L, N]$ вида (1.3), определяемый функцией $T_0(z) := \sum_{k=n(L)}^{\infty}\tau_k z^k$ по формулам

$$(T_0 f)(z) = \sum_{k=n(L)}^{\infty}\tau_k c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k, \tag{4.3}$$

$$|\tau_k| := \min\big\{|l_k|,\, N\,\eta_{k,q_1}\,\eta_{k,q_2}^{-1}\big\}, \quad \arg\tau_k := \arg l_k. \tag{4.4}$$

В частности если $|l_k| \le N\,\eta_{k,q_1}\,\eta_{k,q_2}^{-1}$, то $\tau_k = l_k$.

Теорема 2. *Пусть* $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $2 \le p_3 \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $N > 0$ *и последовательности* W *и* D *убывают к нулю, а* $N(W, D)$ *не убывает и неограниченная. Тогда в случаях пространств* $\mathcal{B}_s, s = 1, 2, 3,$ *описанных в таблице на с. 25, для наилучшего приближения* (1.10) *оператора* L *линейными ограниченными операторами* $\mathcal{L}(N)$ *на классе* $Q = G\mathcal{B}_3$ *справедливы равенства*

$$E(N) = \max\{\omega_k - N\,\delta_k \colon k \ge n(G)\} = \mu(N; W, D).$$

Оператором наилучшего приближения является оператор $T_0 = T_0[L, N]$, *задаваемый равенствами* (4.3), (4.4).

Доказательство. Вначале отметим, что в случае, когда ядро оператора L не содержит ядро оператора G, т.е. $n(L) < n(G)$, для значений параметра N, $0 < N < N_{n-1}$, уклонение $U(T) = +\infty$ для любого $T \in \mathcal{L}(N)$, следовательно, $E(N) = +\infty$.

Получим оценку сверху наилучшего приближения при $N \geq N_{n-1}$. Рассмотрим оператор T_0, определяемый равенствами (4.3), (4.4). Для рассматриваемых случаев пространств по лемме 1 получим неравенство $\|T_0\|_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \leq N$, т.е. $T_0 \in \mathcal{L}(N)$. Оценим уклонение оператора T_0 от оператора L. Справедливо представление $Lf - T_0 f = S(Gf)$, в котором оператор S имеет вид (1.3) и определяется функцией $S(z) := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{l_k - \tau_k}{g_k} z^k$. Используя определение оператора T_0, леммы 1 и 2, для уклонения выводим оценку

$$\|Lf - T_0 f\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} \leq \|S\|_{B_\gamma^{p_3,q_3} \to B_\gamma^{p_2,q_2}} \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = \max\left\{\left|\frac{l_k - \tau_k}{g_k}\right| \eta_{k,q_3}^{-1} \eta_{k,q_2} \colon k \geq n\right\} \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}}$$

$$= \max\{\omega_k - N\delta_k \colon k \geq n\} \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = \mu(N; W, D) \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины наилучшего приближения $E(N) \leq \mu(N; W, D)$.

Для получения оценки снизу рассмотрим функции φ_k, определенные равенствами (4.1). Для произвольного k, $k \geq n$, функции φ_k принадлежат классу $GB_\gamma^{p_3,q_3}$, поэтому из определения наилучшего приближения (1.10) следует

$$E(N) \geq \sup_{k \geq n} \inf_{T \in \mathcal{L}(N)} \left\{\|L\varphi_k - T\varphi_k\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}}\right\} = \sup\{\omega_k - N\delta_k \colon k \geq n\}.$$

Теперь по лемме 2 имеем оценку снизу $E(N) \geq \mu(N; W, D)$. Теорема доказана.

В следующем утверждении в случаях, описанных в таблице на с. 25, будут получены оценки сверху величины модуля непрерывности (1.7) и точное значение в некоторых точках.

Следствие. *В условиях теоремы* 2 *для модуля непрерывности* (1.7) *оператора* L *на классе* $G\mathcal{B}_3$ *справедливо неравенство*

$$\omega(\delta) \leq \xi(\delta; W, D), \quad \delta > 0, \tag{4.5}$$

где функция l *определяется равенством* (2.5). *При этом* $\omega(\delta_k) = \omega_k, k \geq n$, *и в данном случае экстремальными функциями в* (1.7) *являются* φ_k, *заданные равенствами* (4.1). *Если* $n(L) = n(G)$, *то* $\omega(\delta) = \omega_n$, $\delta \geq \delta_n$.

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из теоремы 2, неравенства (1.11) и равенства (2.7) леммы 3.

Далее для значений $q_s = 2$ или ∞ будут улучшена оценка (4.5) величины модуля непрерывности (1.7) и получено точное значение в случаях гильбертовых пространств, т.е. при $p_s = 2$. Введем обозначения: $W^2 := \{\omega_k^2\}_{k \geq n}$ и $D^2 := \{\delta_k^2\}_{k \geq n}$, где ω_k, δ_k определены в (4.2).

Теорема 3. *Пусть* $2 \leq p_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq 2$, $2 \leq p_3 \leq \infty$, $q_s = 2$ *или* ∞ *и* $\delta > 0$; *последовательности* W^2 *и* D^2 *убывают к нулю, а* $N(W^2, D^2)$ *не убывает и неограниченная. Тогда в случаях пространств* $\mathcal{B}_s, s = 1, 2, 3$, *описанных в таблице на с.* 25, *для модуля непрерывности* (1.7) *оператора* L *на классе* $Q = G\mathcal{B}_3$ *справедливо неравенство*

$$\omega(\delta) \leq \xi^{1/2}(\delta^2; W^2, D^2). \tag{4.6}$$

При $p_s = 2$, $s = 1, 2, 3$, *неравенство* (4.6) *является равенством.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда пространства $\mathcal{B}_s = B_\gamma^{p_s,q_s}$, $s = 1, 2, 3$, являются гильбертовыми, т. е. когда $p_s = 2$, $q_s = 2$ или ∞, $s = 1, 2, 3$. В этом случае справедливы равенства

$$\|f\|_{\mathcal{B}_1}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \eta_{k,q_1}^2, \quad \|Lf\|_{\mathcal{B}_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 |c_k|^2 \eta_{k,q_2}^2, \quad \|Gf\|_{\mathcal{B}_3}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|^2 |c_k|^2 \eta_{k,q_3}^2$$

и, следовательно, для модуля непрерывности (1.7) верно равенство

$$\omega^2(\delta)=\max\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}|l_k|^2\eta_{k,q_2}^2\,x_k:\ \sum_{k=0}^{\infty}|g_k|^2\eta_{k,q_3}^2\,x_k\le 1,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\eta_{k,q_1}^2\,x_k\le\delta^2,\quad x_k\ge 0\Big\}. \tag{4.7}$$

Задача в правой части равенства (4.7) является задачей линейного программирования. Когда параметр δ удовлетворяет условию $\delta_{k+1}\le\delta\le\delta_k$, максимум достигается в точке

$$x_k=\eta_{k,q_1}^{-2}\,\frac{\delta_k^2(\delta^2-\delta_{k+1}^2)}{\delta_k^2-\delta_{k+1}^2},\quad x_{k+1}=\eta_{k+1,q_1}^{-2}\,\frac{\delta_{k+1}^2(\delta_k^2-\delta^2)}{\delta_k^2-\delta_{k+1}^2},\quad x_j=0,\quad j\ne k,k+1.$$

Отсюда следует, что $\omega(\delta)=\xi^{1/2}(\delta^2;W^2,D^2)$. Верхняя грань в (1.7) достигается на функциях $f_\delta(z)=\varepsilon_1\sqrt{x_k}z^k+\varepsilon_2\sqrt{x_{k+1}}z^{k+1}$, $|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=1$.

Теперь для произвольных $2\le p_1\le\infty$, $1\le p_2\le 2$, $2\le p_3\le\infty$ и $q_s=2$ или ∞, $s=1,2,3$, неравенство (4.6) вытекает из монотонности p-средних (1.1) аналитических функций на окружности. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В.** О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной. Приближение функций и операторов // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 3–28.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.
3. **Arestov V., Filatova M.** Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 187, № l. P. 65–81. doi:10.3103/S1066369X13050010.
4. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** О мультипликативных неравенствах типа Харди—Литтльвуда—Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных // Віснік Дніпропетровского університету, сер. Математика. 2010. Т. 18, № 6/1. С. 81–87.
5. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 12. - С. 1579–1601.
6. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций // Віснік Дніпропетровского університету, сер. Математика. 2012. Т. 17, № 61. С. 82–88.
7. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978. 392 с.
8. **Саидусайнов М.С.** Точные неравенства типа Колмогорова для функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана // Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа, 2016). 2016. С. 217–223.
9. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып 2. С. 137–148.
10. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.
11. **Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.** Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // Докл. АН республики Таджикистан. 2007. Т. 50, № 1. С. 14–19.
12. **Шведенко С.В.** Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1985. Т. 23. С. 3–124.

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук
Уральский федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

Поступила 15.05.2017

Саидусайнов Муким Саидусайнович
канд. физ.-мат. наук
Таджикский национальный университет, г. Душанбе, Таджикистан
e-mail: smuqim@gmail.com

REFERENCES

1. Arestov V.V. On some extremal problems for differentiable functions of one variable. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 1–29.
2. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
3. Arestov V., Filatova M. Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 187, no. 1, pp. 65–81. doi:10.3103/S1066369X13050010 .
4. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On multiplicative inequalities of Hardy–Littlewood–Polya type for analytic functions of one and two complex variables. *Visn. Dnipropetr. Univ., Ser. Mat.*, 2010, vol. 18, no. 6/1, pp. 81–87 (in Ukrainian).
5. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On the exponential decay of vibrations of damped elastic media. *Ukr. Mat. Zh.*, 2011. vol. 63, no. 12, pp. 1579–1601.
6. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On inequalities of Kolmogorov type for analytic functions in a disc. *Visn. Dnipropetr. Univ., Ser. Mat.*, 2012, vol. 17, no. 61, pp. 82–88 (in Ukrainian).
7. Polya G., Szegö G. *Problems and theorems in analysis. Vol. I: Series, integral calculus, theory of functions*. Translation from German to English. Springer Study Edition. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976, 389 p. Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza. Vol. 1*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 392 p.
8. Saidusainov M.S. *Tochnye neravenstva tipa Kolmogorova dlya funktsii, prinadlezhashchikh vesovomu prostranstvu Bergmana* [Exact inequalities of Kolmogorov type for functions belonging to the weighted Bergman space]. Trudy Mezhdunarodnoi letnei matematicheskoi shkoly-konferentsii S.B.Stechkina po teorii funktsii [Proceedings of the International Mathematical School of the School-Conference S.B. Stechkin on the theory of functions]. Tajikistan, Dushanbe, 15-25 August, 2016, pp. 217–223.
9. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99. doi: 10.1007/BF01268056 .
10. Taikov L.V. Best approximation in the mean of certain classes of analytic functions. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 104–109. doi: 10.1007/BF01268058 .
11. Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. Inequality of Kolmogorov type in the weighted Bergman space. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2007, vol. 50, no. 1, pp. 14–19 (in Russian).
12. Shvedenko S.V. Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit circle, polydisc, and ball. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 39, no. 6, pp. 3011–3087. doi: 10.1007/BF01087546 .

The paper was received by the Editorial Office on May 15, 2017.

Roman Razmikovich Akopyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .

Mukim Saidusainovich Saidusainov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan, e-mail: smuqim@gmail.com .