ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.5

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СПЛАЙНОВ ПО ТРЕХТОЧЕЧНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕРПОЛЯНТАМ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

Для непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ по сеткам попарно различных узлов $\Delta\colon a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ $(N\geqslant 2)$ исследована скорость сходимости кусочно рациональных функций $R_{N,1}(x)=R_{N,1}(x,f)$ таких, что при $x\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\dots,N)$ имеем $R_{N,1}(x)=(R_i(x)(x-x_{i-1})+R_{i-1}(x)(x_i-x))/(x_i-x_{i-1})$, где $R_i(x)=\alpha_i+\beta_i(x-x_i)+\gamma_i/(x-g_i)$ $(i=1,2,\dots,N-1)$, коэффициенты α_i, β_i и γ_i определяются условиями $R_i(x_j)=f(x_j)$ при $j=i-1,i,i+1$, а полюсы g_i — узлами; считаем $R_0(x)\equiv R_1(x)$, $R_N(x)\equiv R_{N-1}(x)$. Даны оценки скорости сходимости $R_{N,1}(x,f)$ через различные структурные характеристики функции:

1) в случае равномерных сеток узлов — через модуль непрерывности третьего порядка функции $f(x)$;

2) для непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ с выбором узлов сетки — через вариацию и через модуль изменения производных первого и второго порядков; при этом оценки через вариацию имеют порядок наилучших полиномиальных сплайн-приближений.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные сплайны, рациональные сплайны.

A.-R. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. Convergence bounds for splines for three-point rational interpolants of continuous and continuously differentiable functions.

For functions $f(x)$ continuous on an interval $[a,b]$ and grids of pairwise different nodes $\Delta\colon a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ $(N\geqslant 2)$, we study the convergence rate of piecewise rational functions $R_{N,1}(x)=R_{N,1}(x,f)$ such that, for $x\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\dots,N)$, we have $R_{N,1}(x)=(R_i(x)(x-x_{i-1})+R_{i-1}(x)(x_i-x))/(x_i-x_{i-1})$, where $R_i(x)=\alpha_i+\beta_i(x-x_i)+\gamma_i/(x-g_i)$ $(i=1,2,\dots,N-1)$; the coefficients α_i, β_i, and γ_i are defined by the conditions $R_i(x_j)=f(x_j)$ for $j=i-1,i,i+1$; and the poles g_i are defined by the nodes. It is assumed that $R_0(x)\equiv R_1(x)$ and $R_N(x)\equiv R_{N-1}(x)$. Bounds for the convergence rate of $R_{N,1}(x,f)$ are found in terms of certain structural characteristics of the function:

(1) the third-order modulus of continuity in the case of uniform grids;

(2) the variation and the modulus of change of the first and second derivatives in the case of continuously differentiable functions $f(x)$; here, the bounds in terms of the variation have the order of the best polynomial spline approximations.

Keywords: splines, interpolation splines, rational splines.

MSC: 97N50

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-224-233

Введение

Первые существенные результаты по исследованию задачи С. Б. Стечкина о наилучших полиномиальных сплайн-приближениях с выбором узлов для классов дифференцируемых функций с производными из классов Лебега или конечной вариации получили Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных [1].

Подробно исследования наилучших полиномиальных сплайн-приближений для различных классов функций и вопросы выбора узлов можно найти в [2–6] и цитируемых в них работах. При этом изучались также вопросы приближения функций полиномиальными сплайнами определенного порядка по конкретным видам сеток узлов.

Некоторые вопросы о рациональных сплайн-приближениях рассматривались, например, в работах [7–10].

В частности, в [9] для функций $f(x)$ из классов $C_{[a,b]}$ и $C^{(1)}_{[a,b]}$ приведены оценки скорости равномерной сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам и производных этих сплайнов соответственно к функции $f(x)$ и к производной $f'(x)$ через их модули непрерывности первого порядка в случае произвольных сеток попарно различных узлов.

В данной статье представлены оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных функций в случае равномерных сеток — через модуль непрерывности третьего порядка и для непрерывно дифференцируемых функций с выбором узлов сетки — через вариацию и через модуль изменения производных первого и второго порядков.

1. Уточнение задачи и вспомогательные утверждения

Трехточечные рациональные интерполянты — функции вида

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i} \tag{1.1}$$

— строятся (см. [9]) для непрерывных на данном отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ по произвольной сетке попарно различных узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ так, что коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ удовлетворяют условиям $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$, а в качестве полюса g_i можно взять любое действительное число вне отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Тогда при $i = 1, 2, \ldots, N-1$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Как легко увидеть из выражения $R''_i(x)$, если при некотором $i = 1, 2, \ldots, N-1$ функция $f(x)$ является выпуклой или вогнутой на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, то на этом отрезке $R_i(x)$ является соответственно выпуклой или вогнутой функцией.

Для данных $f \in C_{[a,b]}$, натуральных чисел $N \geqslant 2$ и k, разбиения $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ и произвольного набора чисел $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ построим кусочно-рациональную функцию $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ такую, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ выполняется равенство

$$R_{N,k}(x) = \frac{R_i(x)(x - x_{i-1})^k + R_{i-1}(x)(x_i - x)^k}{(x - x_{i-1})^k + (x_i - x)^k};$$

считаем, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

Далее использованы обозначения

$$\|\varphi\|_{[a,b]} = \sup\{|\varphi(x)|\colon x \in [a, b]\},$$

$$\|\Delta\| = \max\{x_i - x_{i-1}\colon i = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Можно показать, что гладкие сплайны $R_{N,k}(x)$ сами (в отличие от гладких полиномиальных сплайнов) и их производные $R'_{N,k}(x)$ обладают свойством безусловной сходимости (по терминологии Ю. Н. Субботина [11]) для всех функций классов $C_{[a,b]}$ и $C^{(1)}_{[a,b]}$ соответственно.

Укажем также, что при $k \geqslant 2$ сплайны $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ сохраняют выпуклость (вниз или вверх) функции $f(x)$ в некоторых окрестностях узлов сетки Δ.

Заметим, что $R_{N,k}(x)$ имеют наименьшую степень как рациональные функции на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ при $k = 1$, а именно, при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ получаем

$$R_{N,1}(x) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}. \tag{1.3}$$

Поэтому приводимые ниже оценки сплайн-приближений даны для $R_{N,1}(x)$ через различные структурные характеристики.

Модуль непрерывности (гладкости) третьего порядка функции $f \in C_{[a,b]}$ определяем, как обычно, через соответствующую конечную разность $\Delta_h^3 f(x)$:

$$\omega_3(\delta, f) = \sup\{|\Delta_h^3 f(x)| \colon 0 \leqslant h \leqslant \delta; x, x+3h \in [a,b]\} \quad (\delta \geqslant 0).$$

Вариация функции $\varphi \in C_{[a,b]}$ на отрезке $[a,b]$ определяется соотношением

$$V(\varphi, [a,b]) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ и при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Следующее утверждение используется при построении сетки узлов сплайна в случае функций, имеющих на данном отрезке непрерывную вторую производную конечной вариации.

Лемма. *Если $\varphi \in C_{[a,b]}$ и $V = V(\varphi, [a,b]) < \infty$, то при любом натуральном n существует разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ с $m \leqslant n$ такое, что*

$$V(\varphi, [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})^2 \leqslant \frac{1}{n^3} V(b-a)^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

а при $i = 1, 2, \ldots, m-1$ это неравенство обращается в равенство.

Доказательство. Исключив тривиальный случай постоянной функции $\varphi(x)$, положим $t_0 = a$.

Для краткости обозначим $V_i = V(\varphi, [t_{i-1}, t_i])$ и возьмем последовательно все точки $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k \leqslant b$, для которых выполняется равенство

$$V_i (t_i - t_{i-1})^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда, используя неравенство Гельдера для сумм, получим

$$\frac{k}{n} = \sum_{i=1}^{k} \Big(\frac{V_i}{V}\Big)^{1/3} \Big(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\Big)^{2/3} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{V_i}{V}\Big)^{1/3} \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\Big)^{2/3} \leqslant 1,$$

а поэтому $k \leqslant n$.

Если окажется $k = n$, то предыдущие неравенства также обращаются в равенства и должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = b - a,$$

а значит, $t_k = t_n = b$, искомое $m = k$.

Если же окажется $k < n$, то по выбору числа k должно выполняться неравенство

$$V(\varphi, [t_k, b])(b - t_k)^2 < \frac{1}{n^3} V(b-a)^2,$$

поэтому положим $t_{k+1} = b$, т. е. искомое $m = k+1$. Лемма доказана.

Для оценки скорости сплайн-приближений в случае произвольных дважды непрерывно дифференцируемых функций (без ограничений на вариацию второй производной) ниже используется модуль изменения функции. Это позволяет при необходимости распространить полученную оценку также на обобщенные вариации.

Модуль изменения порядка n $(n = 1, 2, \ldots)$ функции $\varphi \in C[a,b]$ определяется соотношением [12]

$$V_n(\varphi, [a,b]) = \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)| \Big\},$$

где супремум берется при фиксированном n по всем точкам $\alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n < \beta_n$ из отрезка $[a, b]$.

Близкие определения модуля изменения даны в [13; 14].

Ниже использовано также принятое обозначение

$$\Omega(\varphi, [a, b]) = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)|\colon x, y \in [a, b]\}$$

полного колебания функции $\varphi(x)$ на данном отрезке $[a, b]$.

2. Оценки сплайн-приближений

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_{[a,b]}$, *натуральное* $N \geqslant 2$, $\Delta\colon x_i = a + i\dfrac{b-a}{N}$ $(i = 0, 1, \dots, N)$ *— сетка узлов.*

Тогда при любом выборе чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ *с* $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ *сплайн* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|f - R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant W_3\omega_3\Big(\frac{2(b-a)}{3N}, f\Big) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{M}{\mu}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^3, \tag{2.1}$$

где W_3 *— константа Уитни,* $M = \max\{|f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})|\colon i = 1, 2, \dots, N-1\}$, $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i|\colon i = 1, 2, \dots, N-1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при данном $i = 1, 2, \dots, N-1$ имеем $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Представим полином $P(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$ в виде $P(x) = P(g_i) + Q_2(x)(x - g_i)$ с соответствующим полиномом $Q_2(x)$ второй степени.

Пусть теперь $R_i(x)$ — рациональная функция из (1.1), интерполирующая $f(x)$ в узлах x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, с коэффициентами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ из (1.2). Тогда для полинома второй степени

$$P_2(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})Q_2(x)$$

получим

$$f(x) - R_i(x) = f(x) - P_2(x) + \frac{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})}{x - g_i}P(x).$$

Отсюда в силу интерполяционности $R_i(x)$ выводим $P_2(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1, i, i+1)$. Тогда по неравенству Уитни [15] при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$|f(x) - P_2(x)| \leqslant W_3\omega_3\Big(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3}, f\Big) = W_3\omega_3\Big(\frac{2(b-a)}{3N}, f\Big),$$

где константа Уитни ([15]) $W_3 \in \Big(\dfrac{16}{15}, \dfrac{14}{9}\Big)$.

Легко показать, что при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$|P(x)| = |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^3,$$

поэтому

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant W_3\omega_3\Big(\frac{2(b-a)}{3N}, f\Big) + \Big|\frac{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})}{x - g_i}\Big|\frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^3. \tag{2.2}$$

Положим $R_0(x) \equiv R_1(x)$ и $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ и на отрезке $[a, b]$ определим сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ по (1.3).

Используя равенство (1.3) и оценку (2.2), приходим к неравенству (2.1).

Теорема доказана.

Заметим, что правую часть неравенства (2.1) можно сделать сколь угодно близкой к первому ее слагаемому за счет выбора сколь угодно больших по модулю значений полюсов $g_1, g_2, \dots, g_{N-1}$.

Это же замечание относится к полученным ниже оценкам (2.3), (2.10) и (2.15).

До перехода к следующим оценкам для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и произвольной сетки узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ дадим более удобное для этих оценок представление рациональных интерполянтов $R_i(x)$ для каждой тройки узлов $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$, а именно положим

$$R_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i \frac{x - x_i}{x - g_i} \tag{2.3}$$

и найдем значения коэффициентов a_i, b_i, A_i из условий интерполяции $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$.

Тогда получим $a_i = f(x_i)$, $A_i = -f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i)$; при этом для b_i в зависимости от того, точка $x \in (x_{i-1}, x_i)$ или же точка $x \in (x_i, x_{i+1})$, воспользуемся соответственно выражениями

$$b_i = f(x_{i-1}, x_i) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - g_i), \quad b_i = f(x_i, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i).$$

Для краткости при $i = 1, 2, \dots, N-1$ положим также

$$D_i(x) = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x - g_i}.$$

Тогда, считая точку x отличной от узлов, соответственно выводим

$$R_i(x) - f(x) = [f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i, x)](x - x_{i-1})(x - x_i) - D_i(x), \tag{2.4}$$

$$R_i(x) - f(x) = [f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) - f(x, x_i, x_{i+1})](x - x_i)(x - x_{i+1}) - D_i(x). \tag{2.5}$$

Как видно из этих равенств, если $f''(x)$ является постоянной на $[a,b]$, то для любой сетки узлов оценка разности $R_i(x) - f(x)$ сводится к оценке лишь величины $D_i(x)$.

Ясно, что при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и любом $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ имеем

$$|D_i(x)| \leqslant \frac{(\max\{x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i\})^3}{4|x - g_i|} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}.$$

Поэтому, переходя в равенствах (2.4) и (2.5) от разделенных разностей к производным второго порядка и учитывая неравенства

$$|(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leqslant \frac{1}{4}(x_i - x_{i-1})^2 \text{ при } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

и

$$|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leqslant \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)^2 \text{ при } x \in [x_i, x_{i+1}],$$

при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ получим

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant \frac{1}{8}\Omega(f'', [x_{i-1}, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_{i-1})^2$$

$$+ \frac{(\max\{x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i\})^3}{4|x - g_i|} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}. \tag{2.6}$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$, *вариация* $V = V(f'', [a,b]) < \infty$, n — *любое натуральное число.*

Тогда существует сетка узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$, *для которой при любом выборе чисел* $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ *с* $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ *сплайн* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|f - R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant \frac{(b-a)^2}{N^3} V + \frac{\|\Delta\|^3}{4\mu} \|f''\|_{[a,b]}, \tag{2.7}$$

где $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i|\colon i = 1, 2, \dots, N-1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При построении сетки узлов будем считать, что $f''(x)$ не является постоянной на $[a,b]$. Для заданного натурального n к функции $f''(x)$ применим лемму, согласно которой существует разбиение $a = t_0 < t_1 \dots < t_m = b$ с $m \leqslant n$ такое, что при $i = 1, 2, \dots, m-1$ выполняется равенство

$$V(f'', [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2,$$

$$V(f'', [t_{m-1}, t_m])(t_m - t_{m-1})^2 \leqslant \frac{1}{n^3} V(b-a)^2. \tag{2.8}$$

Построим теперь промежуточные точки $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Возьмем $\tau_1 \in (t_0, t_1)$. Тогда

$$V(f'', [\tau_1, t_1])(t_1 - \tau_1)^2 < V(f'', [t_0, t_1])(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2.$$

Значит, если возьмем точку τ_2 такую, что $V(f'', [\tau_1, \tau_2])(\tau_2 - \tau_1)^2 = \dfrac{1}{n^3} V(b-a)^2$, то получим $t_1 < \tau_2$.

С другой стороны, имеем $\tau_2 < t_2$, так как

$$V(f'', [\tau_1, t_2])(t_2 - \tau_1)^2 > V(f'', [t_1, t_2])(t_2 - t_1)^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2.$$

Продолжив эту процедуру, получим все точки

$$a = t_0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \dots < t_{m-1} < \tau_m < t_m = b,$$

если неравенство (2.8) также выполняется в виде равенства; если же (2.8) выполняется в виде строгого неравенства, то в качестве точки τ_m берем какую-нибудь точку из (t_{m-1}, t_m).

Переобозначив $x_{2i} = t_i$ $(i = 0, 1, \dots, m)$, $x_{2i-1} = \tau_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, получим сетку узлов

$$\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (N \leqslant 2n) \tag{2.9}$$

такую, что при $i = 1, 2, \dots, N-1$ выполняется неравенство

$$V(f'', [x_{i-1}, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_{i-1})^2 \leqslant \frac{1}{n^3} V(b-a)^2. \tag{2.10}$$

По сетке узлов (2.9) для функции $f(x)$ построим рациональные интерполянты $R_i(x)$ вида (2.3) для каждой тройки узлов $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$.

Тогда из неравенств (2.6), (2.10) и $N \leqslant 2n$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ получим

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant \frac{1}{N^3} V(b-a)^2 + \frac{\|\Delta\|^3}{4|x - g_i|} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}. \tag{2.11}$$

Пусть теперь $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ — произвольный набор чисел таких, что $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$; будем считать также, что $R_0 \equiv R_1(x)$ и $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

Рассмотрим для заданной функции $f(x)$, сетки узлов Δ и набора чисел g кусочно-рациональную функцию $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ такую, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ выполняется равенство (1.3).

Тогда из (1.3) и (2.11) получим требуемую оценку (2.7).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$, n *— любое натуральное число. Тогда существует сетка узлов* $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$, *для которой при любом выборе чисел* $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ *с* $g_i \notin [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ *сплайн* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|f - R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant 2\frac{(b-a)^2}{N^3}V_n(f'', [a,b]) + \frac{2(b-a)^3}{\mu N^3}\|f''\|_{[a,b]}, \tag{2.12}$$

где $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i|\colon i = 1, 2, \dots, N-1\}$.

Доказательство. Сначала построим точки $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ такие, что $m \leqslant n$ и на каждом частичном отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ полное колебание второй производной $f''(x)$ на нем удовлетворяет неравенству

$$\Omega(f'', [t_{i-1}, t_i]) \leqslant \frac{1}{n}V_n(f'', [a,b]). \tag{2.13}$$

Для построения этих точек по аналогии с леммой применим легко доказываемое равенство

$$V_n(f'', [a,b]) = \sup\sum_{i=1}^{n}\Omega(f'', [t_{i-1}, t_i]),$$

где супремум берется при фиксированном n по всем разбиениям $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Тогда существование точек $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ $(m \leqslant n)$ с неравенством (2.13) очевидно.

К этим точкам добавим равноотстоящие точки $\tau_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$. Переобозначив точки после их объединения, получим новое разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ такое, что $N \leqslant m + n - 1 \leqslant 2n - 1$; причем при $i = 1, 2, \dots, N$ выполняются неравенства

$$x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{b-a}{n}, \quad \Omega(f'', [x_{i-1}, x_i]) \leqslant \frac{1}{n}V_n(f'', [a,b]). \tag{2.14}$$

Для сетки узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ и произвольного набора точек $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ возьмем рациональную функцию $R_i(x)$ вида (2.3), интерполирующую $f(x)$ в узлах x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, для которой имеют место равенства (2.4) и (2.5).

Тогда, применив неравенства (2.14), при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ получим

$$\begin{aligned}|f(x) - R_i(x)| &\leqslant \frac{(b-a)^2}{4n^3}V_n(f'', [a,b]) + \frac{(b-a)^3}{4n^3|x - g_i|}\|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}\\ &\leqslant 2\frac{(b-a)^2}{N^3}V_n(f'', [a,b]) + \frac{2(b-a)^3}{N^3|x - g_i|}\|f''\|_{[a,b]}.\end{aligned}$$

Далее доказательство завершается вполне аналогично теореме 2.

Теорема доказана.

Приведем также оценку скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывно дифференцируемой на отрезке функции через модуль изменения ее производной.

Теорема 4. *Пусть* $f \in C^{(1)}_{[a,b]}$, n *— любое натуральное число. Тогда существует сетка узлов* $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$, *для которой при любом выборе чисел* $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ *с* $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ *сплайн* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|f - R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant 6\frac{b-a}{N^2}\Big(1 + \frac{b-a}{\mu N}\Big)V_n(f', [a,b]), \tag{2.15}$$

где $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i|\colon i = 1, 2, \dots, N-1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится по аналогии с оценкой (2.12) по следующей схеме. Сначала построим точки $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ такие, что $m \leqslant n$ и при $i = 1, 2, \dots, m$ выполняется неравенство

$$\Omega(f', [t_{i-1}, t_i] \leqslant \frac{1}{n} V_n(f', [a, b]).$$

Объединив точки $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ с точками $\tau_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$, получим сетку узлов Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ такую, что $N \leqslant 2n - 1$, $x_i - x_{i-1} \leqslant \dfrac{b-a}{n}$,

$$\Omega(f', [x_{i-1}, x_i]) \leqslant \frac{1}{n} V_n(f', [a, b]) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \tag{2.16}$$

Для произвольного набора чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ возьмем рациональную функцию $R_i(x)$ в виде (2.3), для которой выполняются равенства (2.4) и (2.5). В этих равенствах разделенные разности второго порядка выразим через разделенные разности первого порядка, а их через производные первого порядка. При этом применим равенство (2.4), если $x \in [x_{i-1}, x_i]$, и равенство (2.5), если $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда с использованием (2.16) получим при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ неравенство

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant \frac{3}{2}\frac{b-a}{n^2}\Big(1 + \frac{b-a}{3n\mu}\Big) V_n(f', [a, b]). \tag{2.17}$$

Положим, как и выше, $R_0(x) \equiv R_1(x)$ и $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ и рассмотрим сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$, который при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ удовлетворяет равенству (1.3).

Тогда из (1.3) и (2.17) получим требуемое неравенство (2.15).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций // Мат. заметки. 1970. Т. 7, вып. 1. С. 31–42.
2. **Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
3. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн–функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
6. **Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Полиномиальные сплайны. Л.: Изд–во ЛГУ, 1986. 120 с.
7. **Schaback R.** Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 2. P. 281–292.
8. **Edeo A., Gofeb G., Tefera T.** Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences (ASRJETS). 2015. Vol. 12, no. 1. P. 110–122.
9. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестанские электрон. мат. изв. 2015. Вып. 4. С. 22–31.
10. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Сплайны по четырехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 233–246.
11. **Субботин Ю.Н.** Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.
12. **Севастьянов Е.А.** Кусочно-монотонная аппроксимация и Ф–вариации // Analysis Math. 1975. Вып. 1. С. 141–164.
13. **Lagrange R.** Sur oscillations d‘order superior d‘une functions numerique // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1965. Vol. 82, no 2. P. 101–130.

14. **Чантурия З.А.** О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 534–554.
15. **Whitney H.** On functions with bounded n–th differences // J. Math. Pures Appl. 1957. Vol. 6 (9), no. 36. P. 67–95.

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Дагестанский государственный университет
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН
г. Махачкала, республика Дагестан,
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила 17.04.2017

Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Дагестанский государственный университет
г. Махачкала, республика Дагестан
e-mail: vazipat@rambler.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu. N., Chernykh N. I. Order of the best spline approximations of some classes of functions. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1970, vol. 7, no. 1, pp. 20–26. doi: 10.1007/BF01093336 .
2. Ahlberg J., Nilson E., Waish J. *The theory of splines and their applications.* New York: Acad. Press, 1967, 284 p. ISBN: 9781483222950 . Translated under the title *Teorija splajnov i ee prilozhenija.* M.: Mir, 1972, 319 p.
3. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splajny v vychislitelnoy matematike* [Splines in computational mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p.
4. Zavialov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splajn funkcij* [Methods of spline–functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
5. Korneichuk N.P. *Splajny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 352 p.
6. Malozyomov V. N., Pevny A. B. *Polinomial'nye splainy* [Polynomial splines]. Leningrad, LGU, 1986, 120 p.
7. Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen. *J. Approx.Theory*, 1973, vol. 7, no. 3,pp. 281–292. doi: 10.1016/0021-9045(73)90072-5 .
8. Edeo A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences* (*ASRJETS*), 2015, vol. 12, no. 1, pp. 110–122.
9. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines on rational interpolants. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, iss. 4, pp. 22–31 (in Russian).
10. Ramazanov A.-R. K., Magomedova V. G. Splines for four-point interpolants. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 233–246 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-233-246 .
11. Subbotin Yu.N. Variations on a spline theme. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1043–1058 (in Russian).
12. Sevastyanov E. A. Piecewise-monotone approximation and Φ–variations. *Analysis Math.*, 1975, vol. 1, pp. 141–164 (in Russian).
13. Lagrange R. Sur oscillations d'order superior d'une functions numerique. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 1965, vol. 82, no 2, pp. 101–130.

14. Chanturiya Z. A. On uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 29, no. 4, pp. 475–495. doi: 10.1070/SM1976v029n04ABEH003682 .
15. Whitney H. On functions with bounded n–th differences. *J. Math. Pures Appl.*, 1957, vol. 6 (9), no. 36, pp. 67–95.

The paper was received by the Editorial Office on April 17, 2017.

Abdul-Rashid Kehrimanovich Ramazanov, Dr. Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru .

Vazipat Gusenovna Magomedova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia, e–mail: vazipat@rambler.ru .