ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ[1]

А. В. Мироненко

Рассматривается задача равномерного приближения заданной на отрезке непрерывной функции. В случае аппроксимации классом $W^{(n)}$ (т. е. функциями, имеющими почти всюду ограниченную единицей производную порядка n) известен критерий элемента наилучшего приближения. В нем, кроме прочего, требуется совпадение на каком-то участке приближающей функции с идеальным сплайном степени n с конечным числом узлов. Сами по себе идеальные сплайны содержатся в классе функций $W^{(n)}$, поэтому в работе исследуется сужение задачи: приближение непрерывной функции только множеством идеальных сплайнов с произвольным конечным количеством узлов. В работе устанавливается существование идеального сплайна, являющегося одновременно элементом наилучшего приближения и в классе, и во множестве. Это доказывает равенство величин наилучшего приближения в этих задачах. Также в работе показывается, что элементы наилучшего приближения в этом множестве удовлетворяют критерию, аналогичному критерию элемента наилучшешго приближения в классе $W^{(n)}$. Устанавливается всюду плотность множества идеальных сплайнов в классе $W^{(n)}$.

Ключевые слова: равномерное приближение, функции с ограниченной производной, идеальные сплайны.

A. V. Mironenko. Uniform approximation by perfect splines.

The problem of uniform approximation of a continuous function on a closed interval is considered. In the case of approximation by the class $W^{(n)}$ of functions whose nth derivative is bounded by 1 almost everywhere, a criterion for a best approximation element is known. This criterion, in particular, requires that the approximating function coincide on some subinterval with a perfect spline of degree n with finitely many knots. Since perfect splines belong to the class $W^{(n)}$, we study the following restriction of the problem: a continuous function is approximated by the set of perfect splines with an arbitrary finite number of knots. We establish the existence of a perfect spline that is a best approximation element both in $W^{(n)}$ and in this set. This means that the values of best approximation in the problems are equal. We also show that the best approximation elements in this set satisfy a criterion similar to the criterion of best approximation in $W^{(n)}$. The set of perfect splines is shown to be everywhere dense in $W^{(n)}$.

Keywords: uniform approximation, functions with bounded derivative, perfect splines.

MSC: 41A15, 41A30

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-206-213

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

В статье рассматривается задача равномерного приближения заданной на отрезке непрерывной функции. Введем следующие обозначения.

$C[a,b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой $\|f\| = \|f\|_{C[a,b]} = \max\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\}$.

$AC[a,b]$ — класс абсолютно непрерывных функций из $C[a,b]$. Известно, что у абсолютно непрерывной функции производная существует почти всюду.

$L_\infty[a,b]$ — класс существенно ограниченных суммируемых функций с нормой $\|f\|_{L_\infty[a,b]} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\}$.

$L_\infty^{(n)}[a,b] = \{g\colon g^{(n-1)} \in AC[a,b], g^{(n)} \in L_\infty[a,b]\}$ — класс функций с почти всюду конечной производной порядка n.

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления”.

Пусть $M > 0$, через $MW^{(n)}[a,b]$ обозначим класс функций со старшей производной, ограниченной этим числом:

$$MW^{(n)}[a,b] = \big\{g \in L_\infty^{(n)}[a,b]\colon \|g^{(n)}\|_{L_\infty[a,b]} \leqslant M\big\}.$$

Далее в обозначении $MW^{(n)}[a,b]$ будем опускать указание на отрезок $[a,b]$. При $M = 1$ класс $MW^{(n)}$ будем обозначать просто $W^{(n)}$.

Обозначим положительную срезку функции $f(x)$ через $f(x)_+ = \begin{cases} f(x), & \text{при } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$

Пусть $N \geqslant 1$. Набор точек $\mathcal{T}_N = \{\tau_i\}_{i=0}^N$, удовлетворяющий условиям $c = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = d$, назовем *разбиением отрезка* $[c,d]$. Пусть даны разбиение $\mathcal{T}_N$, некоторое число $M \geqslant 0$ и число σ, равное $+1$ или -1. Функции вида

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sigma \frac{M}{n!}\Big[x^n + 2\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j (x-\tau_j)_+^n\Big],$$

заданные на отрезке $[\tau_0, \tau_N]$, будем называть *M-идеальными сплайнами степени n.* Точки τ_i будем называть *узлами* сплайна, а при $0 < i < N$ — *внутренними узлами.* Множество M-идеальных сплайнов степени n, построенных по разбиению $\mathcal{T}_N$, будем обозначать через $M\Gamma_n(\mathcal{T}_N)$. Отметим, что M-идеальные сплайны степени n имеют дефект 1 (т. е. имеют непрерывную производную порядка $n-1$), а равенство $|p^{(n)}(x)| = M$ справедливо всюду, кроме точек τ_j, и в каждой точке τ_j производная $p^{(n)}(x)$ меняет знак. Также отметим, что M-идеальные сплайны второй степени могут рассматриваться как течение во времени некоторого процесса, управлемого переключением его второй производной из максимального в минимальное значение и наоборот в моменты времени τ_j (так называемый *bang-bang control*).

Через $\Gamma_n(\mathcal{T}_N) = \Gamma_n[\tau_0, \ldots, \tau_N]$ обозначаем множество $M\Gamma_n(\mathcal{T}_N)$ при $M = 1$. В этом случае будем называть M-идеальные сплайны просто *идеальными сплайнами.* Отметим, что если $\mathcal{T}_N$ есть разбиение отрезка $[a,b]$, то $\Gamma_n(\mathcal{T}_N) \subset W^{(n)}$.

Обозначим объединение множеств $\Gamma_n(\mathcal{T}_N)$ по всем возможным разбиениям отрезка $[a,b]$ (любой конечной мощности) через Γ_n. Иными словами, Γ_n — это множество идеальных сплайнов степени n с произвольными количеством и расположением узлов. Очевидно, что $\Gamma_n \subset W^{(n)}$. Более того, ниже мы покажем, что Γ_n всюду плотно в $W^{(n)}$.

Следуя [1], набор точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ будем называть *чебышёвским альтернансом* (или просто *альтернансом*) для непрерывной функции h, если существует такая константа σ, равная $+1$ или -1, что $h(x_i) = \sigma(-1)^{i+1}\|h\|$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть даны функция $f \in C[a,b]$ и произвольный класс функций $Q \subset C[a,b]$. Величина $E(f;Q) = \inf\limits_{g\in Q}\|f-g\|$ называется *величиной наилучшего приближения* (ВНП) функции f классом функций Q. Любая функция $g_* \in Q$, удовлетворяющая условию $\|f - g_*\| = E(f;Q)$, называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) функции f классом функций Q.

В силу замкнутости и локальной компактности класса $W^{(n)}$ для любой непрерывной функции f хотя бы один ЭНП в этом классе всегда существует, но не всегда он единствен.

Критерий ЭПН в классе $W^{(1)}$ сформулирован в статье [2, теорема 1]. Фактически он был найден Н. П. Корнейчуком еще в работах [3; 4]. В этом критерии одним из условий является наличие двух точек альтернанса на отрезке, на котором ЭНП совпадает с идеальным сплайном первой степени без внутренних узлов. Общий критерий ЭНП в классе $W^{(n)}$ при $n \geqslant 1$ доказал с небольшими ошибками немецкий математик Ульрих Заттес (Ullrich Sattes) в своей диссертации 1980 г. (см. [5]). Также этот критерий был опубликован без доказательства в чуть более доступной его работе [6]. Позднее несколько раз была доказана (см. А. Л. Браун [7], Дж. А. Орам [8], А. В. Мироненко [2, теорема 2]) другая, более короткая, формулировка этого критерия. В ней утверждается, что ЭНП должен, кроме прочих условий, совпадать на каком-то отрезке с неким идеальным сплайном степени n и иметь на этом отрезке на $n+1$ точку альтернанса больше, чем количество внутренних узлов этого сплайна. Видно, что идеальные сплайны играют важную роль в этой задаче, и естественно исследовать отдельно вопрос приближения идеальными сплайнами. Устанавливаемая в данной работе теорема 1 показывает, что множество Γ_n в некотором смысле экстремально в классе $W^{(n)}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in C[a,b] \setminus W^{(n)}$, $n \geqslant 1$. Тогда $E\bigl(f; W^{(n)}\bigr) = E(f;\Gamma_n)$. Более того, существует идеальный сплайн g_*, являющийся* ЭНП *функции f одновременно как во множестве Γ_n, так и в классе $W^{(n)}$.*

Критерий из работ [2; 5–8] утверждает, что любой ЭНП в классе $W^{(n)}$ на каком-то подотрезке обязательно является идеальным сплайном. Теорема 1 уточняет, что среди всех ЭНП обязательно найдется хотя бы один, являющийся идеальным сплайном и на остальной части отрезка $[a,b]$. Также теорема 1 решает вопрос о существовании ЭНП в множестве Γ_n, она же позволяет свести задачу численного построения ЭНП в классе $W^{(n)}$ к более простой задаче построения ЭНП в множестве Γ_n.

Теорема 2, доказываемая в данной работе для случая аппроксимации множеством Γ_n, аналогична критерию для случая приближения классом $W^{(n)}$ из работ [2; 5–8].

Теорема 2. *Пусть $f \in C[a,b] \setminus W^{(n)}$, $n \geqslant 1$. Идеальный сплайн $g_* \in \Gamma_n$ является* ЭНП *функции f в множестве Γ_n тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия*:

1. *У сплайна g_* есть набор из $s+1$ подряд идущих узлов $\{\tau_i\}_{i=j}^{j+s}$ (при каком-то $s>0$) такой, что на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+s}]$ есть альтернанс функции $f - g_*$ из $s+n$ точек $\{x_i\}_{i=1}^{s+n}$.*
2. *На каждом из интервалов $(\tau_{j+i}, \tau_{j+i+1})$ выполняется*

$$g_*^{(n)}(x) \equiv (-1)^{n+i} \operatorname{sign}\left((f - g_*)(x_1)\right).$$

Более того, на отрезке $[x_1, x_{s+n}]$ все ЭНП *совпадают друг с другом.*

Отметим, что здесь (как и в случае приближения классом $W^{(n)}$), хотя все ЭНП и обязаны совпадать на отрезке между крайними точками альтернанса, в общем случае нет единственности ЭНП на остальной части отрезка $[a,b]$. Можно легко построить пример двух таких несовпадающих ЭНП.

Условие $f \notin W^{(n)}$ в теореме 2 существенно. Это показывает устанавливаемая в данной работе теорема 3.

Теорема 3. *Любую функцию f из класса $W^{(n)}$ можно приблизить идеальными сплайнами сколь угодно точно, т. е. $E(f;\Gamma_n) = 0$.*

Фактически теорема 3 означает, что множество Γ_n всюду плотно в классе $W^{(n)}$.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ и на некотором отрезке $[c,d]$ задана последовательность $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{n+k}$, удовлетворяющая условиям

$$c = \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \dots \leqslant \theta_{n+k} = d \quad \text{и} \quad \theta_i < \theta_{i+n} \text{ для всех } i \in \overline{1,k}. \tag{2.1}$$

Пусть также дан набор чисел $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n+k}$. Будем говорить, что функция f из класса $L_\infty^{(n)}[c,d]$ принимает значения $\boldsymbol{\alpha}$ на сетке Θ, если при $i = 1, 2, \dots, n+k$ выполняются равенства $f^{(m)}(\theta_i) = \alpha_i$, где $m = \max\{j : \theta_{i-m} = \theta_i\}$. В этом случае мы будем писать $f|_\Theta = \boldsymbol{\alpha}$. Через $\Pi(\Theta, \boldsymbol{\alpha}) = \bigl\{f \in L_\infty^{(n)}[c,d]\colon\ f|_\Theta = \boldsymbol{\alpha}\bigr\}$ обозначим множество функций, принимающих заданные значения $\boldsymbol{\alpha}$ на сетке Θ.

В этих обозначениях теорему С. Карлина и К. де Боора из работы [9] сформулируем следующим образом.

Теорема А. *Пусть последовательность* Θ *удовлетворяет условиям* (2.1)*. Тогда в множестве* $\Pi(\Theta, \boldsymbol{\alpha})$ *обязательно содержится* M*-идеальный сплайн* $g(x)$ *(для некоторого числа* M*), имеющий менее чем* k *внутренних узлов. Более того, на этом сплайне достигается минимум* $\|f^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]}$ *среди всех функций* f *из множества* $\Pi(\Theta, \boldsymbol{\alpha})$.

Пусть дана функция $f_0 \in L_\infty^{(n)}[c,d]$; через $\Pi(\Theta, f_0) = \{ f \in L_\infty^{(n)}[c,d] \colon f|_\Theta = f_0|_\Theta \}$ обозначим множество функций, интерполирующих функцию f_0 на сетке Θ. Ясно, что $f_0 \in \Pi(\Theta, f_0)$. Выделим в этом множестве подмножество (возможно, пустое) функций, имеющих ограниченную старшую производную:

$$\Pi(\Theta, f_0, M) = \Pi(\Theta, f_0) \cap MW^{(n)}[c,d]. \tag{2.2}$$

Теорема А позволяет доказать следующий факт.

Лемма 1. *Пусть* $k = n$ *и дана последовательность* $\overline{\Theta} = \{\overline{\theta}_i\}_{i=1}^{n+k}$*, в которой*

$$\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \cdots = \overline{\theta}_n = c \quad \text{и} \quad \overline{\theta}_{n+1} = \overline{\theta}_{n+2} = \cdots = \overline{\theta}_{n+n} = d. \tag{2.3}$$

Тогда функция $\overline{f}$ *является идеальным сплайном не более чем с* $n-1$ *внутренним узлом (т. е.* $\overline{f} \in \Gamma_n[c, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}, d]$ *для какого-то разбиения* $\mathcal{T}_m$ *при* $m \leqslant n-1$*) тогда и только тогда, когда она — единственный элемент во множестве* $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $\overline{f}$ принадлежит классу $\Gamma_n[c, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}, d]$ при некотором $m < n$; тогда очевидно, что $\overline{f} \in \Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$. Требуется доказать, что других элементов в этом множестве нет. Предположим, что во множестве $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$ найдется другая функция g. Согласно (2.2) имеем $g \in W^{(n)}$. Рассмотрим разность $h = \overline{f} - g$, очевидно, что $h \in L_\infty^{(n)}[c,d]$. Из условий интерполяции (2.3) вытекают соотношения

$$h(c) = h'(c) = \cdots = h^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{и} \quad h(d) = h'(d) = \cdots = h^{(n-1)}(d) = 0. \tag{2.4}$$

Поскольку функции f и g не равны, то найдется точка $x_0^0 \in (c,d)$ такая, что $h(x_0^0) \neq 0$. Пусть, для определенности, $h(x_0^0) > 0$. Поскольку $h(c) = 0$ и $h(x_0^0) > 0$, то по теореме Лагранжа на интервале (c, x_0^0) найдется точка x_0^1 такая, что $h'(x_0^1) > 0$. Аналогично на втором интервале (x_0^0, d) найдется вторая точка x_1^1, в которой $h'(x_1^1) < 0$.

Из соотношений (2.4) получаем $h'(c) = h'(d) = 0$. Применив теорему Лагранжа уже к функции h' на наборах $\{c, x_0^1\}$, $\{x_0^1, x_1^1\}$, $\{x_1^1, d\}$, мы найдем три точки $x_0^2 < x_1^2 < x_2^2$, в которых функция $h^{(2)}$ принимает чередующиеся по знаку значения, начиная с положительного.

Продолжая этот процесс, мы получим n последовательных точек x_0^{n-1}, x_1^{n-1}, …, x_{n-1}^{n-1}, в которых функция $h^{(n-1)}$ принимает значения с чередующимися знаками, начиная с положительного. Также из (2.4) имеем $h^{(n-1)}(c) = h^{(n-1)}(d) = 0$.

Так как $h \in L_\infty^{(n)}[c,d]$, то $h^{(n-1)} \in AC[c,d]$, и тогда

$$\int_c^{x_0^{n-1}} h^{(n)}(t)\,dt = h^{(n-1)}(x_0^{n-1}) - h^{(n-1)}(c) = h^{(n-1)}(x_0^{n-1}) > 0.$$

Поскольку интеграл от функции $h^{(n)}$ строго положителен, то и сама функция внутри интервала (c, x_0^{n-1}) должна быть строго положительной на некотором множестве ненулевой меры. Применив это рассуждение последовательно к наборам точек $\{c, x_0^{n-1}\}$, $\{x_0^{n-1}, x_1^{n-1}\}$, …, $\{x_{n-2}^{n-1}, x_1^{n-1}\}$, $\{x_{n-1}^{n-1}, d\}$, мы получаем $n+1$ множество ненулевой меры, на которых $h^{(n)}(x)$ принимает значения с чередующимися знаками. По предположению функция $\overline{f}$ есть идеальный сплайн, имеющий не более чем $n-1$ внутренний узел, т. е. функция $\overline{f}^{(n)}$ имеет не более n участков постоянства. Поэтому среди этих множеств найдется такая точка, в которой функции $\overline{f}^{(n)}$

и $h^{(n)}$ существуют и противоположны по знаку. Тогда в этой точке функция $g^{(n)} = \overline{f}^{(n)} - h^{(n)}$ по модулю превзойдет 1, что противоречит условию $g \in W^{(n)}[c,d]$.

Достаточность. Пусть функция $\overline{f}$ является единственным элементом множества $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$, значит, $\|\overline{f}^{(n)}\|_{L_\infty[c,\,d]} \leqslant 1$. По теореме A во множестве $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f})$ содержится хотя бы один M-идеальный сплайн f_0 с числом внутренних узлов, меньшим n, и на нем достигается минимум нормы n-й производной. Поскольку $\overline{f} \in \Pi(\overline{\Theta}, \overline{f})$, то этот минимум не превосходит величины $\|\overline{f}^{(n)}\|_{L_\infty[c,\,d]} = 1$ и, следовательно, $f_0 \in \Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$. Функция $\overline{f}$ есть единственный элемент этого множества, поэтому $\overline{f} \equiv f_0$. Лемма 1 доказана.

Из теоремы Т. Н. Т. Гудмана и С. Л. Ли [10, теорема 1] в наших обозначениях можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема B. *Пусть дана последовательность точек интерполяции Θ, удовлетворяющая условиям (2.1), и дана функция $f_0 \in L_\infty^{(n)}[c,d]$. Пусть число $M > \|f_0^{(n)}\|_{L_\infty[c,\,d]}$. Тогда во множестве $\Pi(\Theta, f_0, M)$ содержатся M-идеальные сплайны, имеющие не более k внутренних узлов. Более того, таких сплайнов ровно два (обозначим их h и g), и они имеют ровно по k внутренних узлов, при этом для любой функции $f \in \Pi(\Theta, f_0, M)$ справедливо неравенство*

$$\min\left(g(x), h(x)\right) \leqslant f(x) \leqslant \max\left(g(x), h(x)\right).$$

Приведем грубую оценку зазора между найденными в ней функциями h и g для одного частного случая расположения точек интерполяции.

Лемма 2. *Пусть в условиях теоремы B последовательность $\overline{\Theta} = \{\overline{\theta}_i\}_{i=1}^{n+k}$ удовлетворяет условиям (2.3), а $d - c = \delta$. Тогда*:

1. *Одна из функций h и g мажорирует другую, т. е. либо $h \leqslant g$, либо $h \geqslant g$ на всем отрезке $[c,d]$.*

2. *Выполняется соотношение $\|h - g\|_{C[c,d]} \leqslant 2M\delta^n$.*

Доказательство. Докажем п. 1 от противного. Рассмотрим функцию $w(x) = h(x) - g(x)$. Пусть ни одна из функций h и g не мажорирует другую. Это значит, что найдутся такие две точки x_0^0, x_1^0 из интервала (c,d), что $w(x_0^0) > 0$ и $w(x_1^0) < 0$. При этом $w(c) = 0$ и $w(d) = 0$. Точно так же, как в лемме 1, доказывается существование трех точек $x_0^1 < x_1^1 < x_2^1$ из интервала (c,d), в которых производная $w'(x)$ последовательно принимает значения с чередующимися знаками. И, в итоге, мы найдем $n+2$ последовательные точки $\{x_j^n\}$ $j = 0, 1, \dots, n+1$ (вместе с множествами ненулевой меры), в которых производная $w^{(n)}(x)$ принимает значения с чередующимися знаками.

С другой стороны, поскольку по теореме B функции $h(x)$ и $g(x)$ являются M-идеальными сплайнами степени n с n внутренними узлами, то функция $w^{(n)}(x)$ есть разность двух функций, каждая из которых на ровно $n+1$ интервале последовательно равна $+M$ или $-M$. Фактически функция $w^{(n)}(x)$ может принимать лишь три значения: $-2M$, 0, $+2M$. То, что она при переходе от x_j^n к x_{j+1}^n поменяла знак, означает, что между x_j^n и x_{j+1}^n есть как минимум по одному узлу $h(x)$ и $g(x)$. Тогда между $n+2$ точками $\{x_j^n\}$ найдется не менее чем $n+1$ внутренний узел у каждого из сплайнов, противоречие.

Оценим теперь зазор между этими функциями. По построению $\left|w^{(n)}\right| = |h^{(n)} - g^{(n)}| \leqslant |h^{(n)}| + |g^{(n)}| \leqslant 2M$. Так как функции h и g в концах отрезка интерполируют одну и ту же функцию f_0 и ее производные, то

$$w(c) = w'(c) = \dots = w^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{и} \quad w(d) = w'(d) = \dots = w^{(n-1)}(d) = 0.$$

Поскольку $w^{(n-1)} \in AC[c,d]$, то при $x \in [c,d]$ справедлива поточечная оценка

$$|w^{(n-1)}(x)| = \left|\int\limits_c^x w^{(n)}(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_c^x |w^{(n)}(t)|\,dt \leqslant \int\limits_c^x 2M\,dt = 2M(x-c) \leqslant 2M\delta.$$

Аналогично получаем, что

$$|w^{(n-2)}(x)| = \left| \int_c^x w^{(n-1)}(t)\, dt \right| \leqslant \int_c^x |w^{(n-1)}(t)|\, dt \leqslant \int_c^x 2M\delta\, dt = 2M\delta(x-c) \leqslant 2M\delta^2.$$

Продолжим этот процесс. В результате имеем, что при $x \in [c,d]$ справедливо неравенство

$$|w(x)| = \left| \int_c^x w'(t)\, dt \right| \leqslant \int_c^x 2M\delta^{n-1}\, dt = 2M\delta^{n-1}(x-c) \leqslant 2M\delta^n.$$

Лемма 2 доказана.

3. Доказательства теорем 1–3

Доказательство теоремы 1. Утверждение $E\big(f; W^{(n)}\big) = E(f;\Gamma_n)$ будет выполняться автоматически, если мы укажем сплайн, одновременно являющийся ЭНП в каждом из множеств. Построим такой сплайн.

Поскольку функция f не лежит в классе $W^{(n)}$, то, как мы указывали в разд. 1, у нее существует в нем хотя бы один ЭНП; обозначим его через g_*. Для доказательства теоремы мы разобьем отрезок $[a,b]$ на конечное число достаточно коротких подотрезков, на каждом заменим (с сохранением уклонения и гладкости) функцию g_* на идеальный сплайн. Это и даст нам искомый идеальный сплайн на всем отрезке $[a,b]$.

Обозначим функцию уклонения $f(x) - g_*(x)$ через $d(x)$, а величину уклонения $\|f - g_*\| = \|d\|$ через E. Поскольку функция $d(x)$ равномерно непрерывна, то найдется такое число $\delta_1 > 0$, что на любом отрезке $[c,d]$ длины меньше δ_1 разброс значений функции $d(x)$ (т. е. величина $\sup\{\big|d(x) - d(y)\big| : x, y \in [c,d]\}$) не превосходит числа $E/4$. Также можно выбрать такое число $\delta_2 > 0$, что $2(\delta_2)^n < E/16$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Разобьем весь отрезок $[a,b]$ на подотрезки длины меньше δ и рассмотрим один такой отрезок $[c,d]$. Пусть последовательность $\overline{\Theta}$ удовлетворяет (2.3) на отрезке $[c,d]$. Обозначим через M величину $\inf\big\{|g^{(n)}|_{L_\infty[c,d]} \colon g \in \Pi(\overline{\Theta}, g_*)\big\}$. Поскольку $g_* \in \Pi(\overline{\Theta}, g_*)$, то $M \leqslant |gz^{(n)}|_{L_\infty[c,d]}$. Раз $g_* \in W^{(n)}$, то $|g_*^{(n)}|_{L_\infty[c,d]} \leqslant 1$, т. е. $M \leqslant 1$.

Рассмотрим случай $M = 1$. Здесь имеем $\|g_*^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} = 1$. По теореме A в множестве $\Pi(\overline{\Theta}, g_*)$ существует идеальный сплайн $\gamma \in \Gamma_n$, имеющий менее чем n внутренних узлов, на котором достигается минимум нормы старшей производной. Тогда $M \leqslant \|\gamma^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} \leqslant \|g_*^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} = 1$, т. е. $\|\gamma^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} = 1$. Сплайн $\gamma(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, поэтому он является единственным элементом множества $\Pi(\overline{\Theta}, g_*, 1)$. Поскольку $g_* \in \Pi(\overline{\Theta}, g_*, 1)$, то функции γ и g_* совпадают, т. е. функция g_* уже является идеальным сплайном на отрезке $[c,d]$. В этом случае функцию g_* на отрезке $[c,d]$ изменять не надо.

Теперь рассмотрим случай $M < 1$. По теореме B и лемме 2 найдутся такие два идеальных сплайна γ_1 и γ_2, что $\gamma_1 \leqslant g_* \leqslant \gamma_2$. При этом уклонение любого из них от функции g_* не превосходит $2\delta^n$, что по условиям на δ не превосходит $E/8$.

Будем писать $f \in [s,t]$, если множество значений функции $f(x)$ при всех $x \in [c,d]$ лежит в отрезке $[s,t]$, т. е. если $s \leqslant f(x) \leqslant t$ при $x \in [c,d]$.

Поскольку $\gamma_1 \leqslant g_*$, то $(\gamma_1 - g_*) \in [-E/8, 0]$. Аналогично поскольку $g_* \leqslant \gamma_2$, то $(\gamma_2 - g_*) \in [0, E/8]$.

Рассмотрим два случая: $d \in [-E, 0]$ и $d \in [-E/2, E]$. Поскольку разброс значений функции $d(x)$ на отрезке $[c,d]$ не превосходит $E/4$, то эти два варианта исчерпывают все возможности.

В первом случае заменим на отрезке $[c,d]$ функцию g_* на идеальный сплайн γ_1. Тогда $(f - \gamma_1) = ((f - g_*) - (\gamma_1 - g_*)) = (d - (\gamma_1 - g_*)) \in [-E, 0] + [0, E/8] = [-E, E/8]$, т. е. при этой операции уклонение от функции f не превысит E. Во втором случае заменим на отрезке $[c, d]$ функцию g_* на идеальный сплайн γ_2. Тогда $(f - \gamma_2) = ((f - g_*) - (\gamma_2 - g_*)) \in [-E/2, E] + [-E/8, 0] = [-E/2 - E/8, E]$, т. е. и в этом случае уклонение от функции f не превысит E.

В силу условий интерполяции (2.3) при описанной замене все производные до порядка $n-1$ на концах отрезка $[c, d]$ останутся абсолютно непрерывными, т. е. функция g_* останется элементом класса $W^{(n)}$.

Проделав такую операцию замены на идеальный сплайн на всех отрезках разбиения, мы преобразуем всю функцию g_* в идеальный сплайн, причем уклонение этого сплайна от f не будет превышать E по построению. С учетом того, что мы остались в классе $W^{(n)}$, меньше, чем E, оно быть не может, т. е. преобразованная функция g_* будет ЭНП как в $W^{(n)}$, так и в Γ_n.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. *Достаточность.* Пусть условия теоремы выполнены для некоторого идеального сплайна g_*. Тогда по критерию из работ [2; 5–8] он является ЭНП для функции f в классе $W^{(n)}$, т. е. $E\big(f; W^{(n)}\big) = \|f - g_*\|$. Поскольку $\Gamma_n \subset W^{(n)}$, то $E(f; \Gamma_n) \geqslant E\big(f; W^{(n)}\big)$. Тогда $\|f - g_*\| \geqslant E(f; \Gamma_n) \geqslant E\big(f; W^{(n)}\big) = \|f - g_*\|$, т. е. сплайн g_* является ЭНП во множестве Γ_n.

Необходимость. Пусть дан идеальный сплайн g_*, являющийся ЭНП функции f во множестве Γ_n. Требуется показать, что для него выполнены условия теоремы. Рассмотрим функцию g, являющуюся ЭНП в классе $W^{(n)}$. По теореме 1 получаем $\|f - g\| = E\big(f; W^{(n)}\big) = E(f; \Gamma_n) = \|f - g_*\|$, т. е. сплайн g_* является ЭНП и в классе $W^{(n)}$. По критерию из работ [2; 5–8] у функции g найдется участок, на котором выполнены условия доказываемой теоремы, по нему же все ЭНП на отрезке между крайними точками альтернанса совпадают. Следовательно, на этом отрезке функция g и сплайн g_* совпадают, поэтому на нем и сплайн g_* удовлетворяет условиям теоремы. Необходимость доказана.

Поскольку все ЭНП во множестве Γ_n являются и ЭНП в классе $W^{(n)}$, то они совпадают друг с другом на отрезке между крайними точками альтернанса по критерию из работ [2; 5–8]. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Из доказательства теоремы 1 видно, что любую функцию из $W^{(n)}$ можно, учащая разбиение, сколь угодно точно приблизить идеальным сплайном. Можно даже, выбирая сплайны γ_2 или γ_1, приближать только сверху или же только снизу. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Натансон И. П.** Конструктивная теория функций. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теорет. литературы, 1949. 688 с.
2. **Мироненко А. В.** Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 5. С. 696–712.
3. **Корнейчук Н. П.** О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 4. С. 748–751.
4. **Корнейчук Н. П.** О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1963. Т. 27. С. 29–44.
5. **Sattes U.** Beste Approximation durch glatte Funktionen und Andwendungen in der intermediären Approximation: Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1980.
6. **Sattes U.** Best Chebyshev approximation by smooth functions // Quantitative Approximation: Proc. Internat. Symposium / eds. R.A. Devore and K. Scherer (Bonn, 1979) New York: Acad. Press, 1980. P. 279–289.
7. **Brown A.L.** Best approximation by smooth functions and related problems // Parametric optimization and approximation: Proc. Conf. Held at the Mathematisches Forschungsinstitut (Oberwolfach, 1983). Basel: Birkhäuser, 1985. P. 70–82. (Internat. Schriftenreihe. Numer. Math., 72.)
8. **Oram J. A.** Best approximation by periodic smooth functions // J. Approx. Theory. Vol. 92, no. 1. 1998. P. 128–166.

9. **de Boor C.** A remark concerning perfect splines // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 4. P. 724–727.
10. **Goodman T. N. T., Lee S. L.** Another extremal property of perfect splines // Proc. of Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 70, no. 2. P. 129–135.

Мироненко Александр Васильевич
канд. физ.-мат. наук,
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: a_mironenko@mail.ru

Поступила 10.05.2017

REFERENCES

1. Natanson I.P. *Constructive function theory. Vol. I. Uniform approximation.* New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1964, 232 p. Original Russian text published in *Konstruktivnaya teoriya funktsii.* Moscow, Leningrad, Gos. Izd-vo Tekhn.-Teoret. Literatury, 1949, 688 p.
2. Mironenko A.V. Uniform approximation by the class of functions with bounded derivative. *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 5, pp. 656–670. doi: 10.1023/B:MATN.0000008998.41243.75 .
3. Kornejchuk N.P. The best uniform approximation on certain classes of continuous functions. *Sov. Math., Dokl.*, 1961, vol. 2, pp. 1254–1257.
4. Korneichuk N.P. On the best approximation of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1963, vol. 27, no. 1, pp. 29–44 (in Russian).
5. Sattes U. *Beste Approximation durch glatte Funktionen und Andwendungen in der intermediären Approximation*, Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1980.
6. Sattes U. Best Chebyshev approximation by smooth functions, Quantitative Approximation, Proc. Internat. Symposium, eds. R.A. Devore and K. Scherer (Bonn, 1979), New York, Acad. Press, 1980, pp. 279–289.
7. Brown A.L. Best approximation by smooth functions and related problems, Parametric optimization and approximation, Proc. Conf. Held at the Mathematisches Forschungsinstitut (Oberwolfach, 1983), Internat. Schriftenreihe. Numer. Math., 72, Basel, Birkhäuser, 1985, pp. 70–82.
8. Oram J.A. Best Approximation by Periodic Smooth Functions. *Journal of Approximation Theory*, 1998, vol. 92, no. 1, pp. 128–166. doi: 10.1006/jath.1997.3098 .
9. de Boor C. A remark concerning perfect splines. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 80, no. 4, pp. 724–727.
10. Goodman T.N.T., Lee S.L. Another extremal property of perfect splines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1978, vol. 70, no. 2, pp. 129–135. doi: 10.1090/S0002-9939-1978-0481760-9 .

The paper was received by the Editorial Office on May 10, 2017.

Aleksandr Vasil'evich Mironenko. Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: a_mironenko@mail.ru