ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.21+517.958

СВЯЗЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ЗАДАЧАМИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК[1]

И. В. Мельникова, У. А. Алексеева, В. А. Бовкун

Работа посвящена исследованию связи между задачей Коши для бесконечномерных стохастических уравнений с мультипликативным винеровским процессом и задачами Коши (прямой и обратной) для соответствующих детерминированных уравнений в частных производных (с производными Фреше). Для марковских случайных процессов, задаваемых стохастическими уравнениями, доказано существование двух пределов, определяемых через плотности переходных вероятностей — обобщение на бесконечномерный случай средних значений и ковариации этих процессов. Получено уравнение в частных производных для вероятностных характеристик изучаемых процессов с коэффициентами, определяемыми этими пределами — бесконечномерный аналог уравнения Колмогорова. Специфика бесконечномерности решений рассматриваемых стохастических уравнений сказывается настолько сильно, что выражения для пределов и сами полученные уравнения в частных производных выглядят не так, как в конечномерном случае: в уравнении присутствует гладкий функционал, который в каком-то смысле играет роль основных функций в уравнениях, рассматриваемых как обобщенные.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши, Q-винеровский процесс, марковский процесс, генератор полугруппы, уравнение Колмогорова.

I. V. Mel'nikova, U. A. Alekseeva, V. A. Bovkun. The connection between infinite-dimensional stochastic problems and problems for probabilistic characteristics.

We study the connection between the Cauchy problem for infinite-dimensional quasi-linear stochastic equations with multiplicative Wiener process and the (direct and inverse) Cauchy problems for the corresponding deterministic partial differential equations (with Fréchet derivatives). For Markov processes given by stochastic equations, we prove the existence of two limits defined in terms of densities of transition probabilities; these limits generalize to the general case the average values and covariances of these processes. A partial differential equation, which is an infinite-dimensional analog of the Kolmogorov equation, is obtained for probabilistic characteristics of the processes with coefficients defined by these limits. The fact that the solutions of the stochastic differential equations are infinite-dimensional has a profound effect on the expressions for the limits and for the obtained partial differential equations. The form of these expressions is different as compared to the finite-dimensional case: the equations contain a smooth potential, which, in a sense, plays the role of test functions in the equations considered as generalized ones.

Keywords: stochastic Cauchy problem, Q-Wiener process, Markov process, semigroup generator, Kolmogorov equation.

MSC: 47D07, 60H20, 60J25, 46G12

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-191-205

Введение

Многие модели в условиях неполной информации, недостаточной для детерминированной постановки, приводят к бесконечномерным стохастическим задачам вида

$$X'(t) = AX(t) + F(t, X(t)) + B(t, X(t))\mathcal{W}(t), \quad t \in [0, T], \quad X(0) = \xi, \tag{0.1}$$

где A — генератор некоторой полугруппы операторов в гильбертовом пространстве H, F — нелинейное отображение из H в H, $\mathcal{W}$ — случайный процесс типа белого шума со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и B — оператор из $\mathbb{H}$ в H.

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Например, в биологии это стохастический аналог уравнения Маккендрика — фон Ферстера, описывающего плотность распределения популяции $X(t,s)$ в момент времени t, структурированной по возрасту s. Здесь $AX(t,s) = -dX(t,s)/ds - \mu(s)X(t,s)$, где $\mu(s)$ — коэффициент скорости гибели в зависимости от возраста, $B(\cdot,\cdot)$ — оператор умножения на $X(t,s)$, шум $\mathcal{W}(t)$ — обобщенная производная Q-винеровского процесса, с оператором Q, характеризующим корреляцию возмущений скорости гибели особей разных возрастов, или цилиндрического винеровского процесса, если возмущения скорости гибели особей разных возрастов некоррелированы.

В физике это модель колебаний струны (мембраны) под воздействием случайных импульсов (ударов частиц, “размерных” или “безразмерных”, от чего зависят свойства случайного процесса $\mathcal{W}$). Модель может быть записана в форме задачи (0.1) с A — оператором-матрицей, порождающим интегрированную полугруппу операторов в $H \times H$, и аддитивным шумом.

В финансовой математике это стохастическое уравнение динамики цен бондов (облигаций) с оператором A — генератором полугруппы правых сдвигов, действующим на цену облигации $X(t,s)$ в момент времени t, где s — время до момента погашения облигации, а $F(t,X)$ и $B(t,X)$ — операторы, отражающие влияние рынка в модели Хита — Джэрроу — Мортона (см., например., [1–3]).

Связь данных и других стохастических задач, записываемых, как это принято в современной теории, в форме дифференциалов с винеровским процессом W (“первообразной” белого шума):

$$dX_t = (AX_t + F(t,X_t))dt + B(t,X_t)dW_t, \quad t \in [0,T], \quad X_0 = \xi, \tag{0.2}$$

с детерминированными задачами для вероятностных характеристик решений лежит в основе многих исследований в сфере стохастического анализа. Результаты изучения таких связей в бесконечномерном случае отражены в монографиях [4–6]. Доказательство связи решения задачи Коши (0.2) с обратной задачей Коши для вероятностных характеристик вида $g(t,x) = \mathbf{E}^{t,x}[f(X(T))]$, где f — некоторый гладкий функционал, $\mathbf{E}^{t,x}[f(X(T))]$ — математическое ожидание решения уравнения (0.2) с дополнительным условием $X(t) = x,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, основано на использовании бесконечномерной формулы Ито для диффузионных процессов, которую в более общем случае применять, вообще говоря, нельзя (см., например, [7; 8]). Для стохастических задач с неограниченным оператором A, нелинейными слагаемыми и мультипликативным винеровским процессом оказывается неприменимым и “полугрупповой” метод, использованный в [9] в случае линейных уравнений с аддитивным шумом.

Настоящая работа посвящена исследованию связи между задачей Коши (0.2) для марковских процессов и задачами Коши (прямой и обратной) для соответствующих детерминированных уравнений в частных производных (с производными Фреше): прямой задачей Коши для плотности переходных вероятностей и обратной задачей Коши для вероятностной характеристики $g(t,x)$ (представляющей самостоятельный интерес в задачах финансовой математики). В работе использован подход, обобщающий идеи классических доказательств (см., например, [2; 10]) для марковских процессов при условии существования некоторых пределов при $\Delta t \to 0$, определяемых свойствами плотности переходных вероятностей при переходе от момента времени t к $t + \Delta t$. При этом специфика бесконечномерности сказывается настолько сильно, что иначе выглядят как эти условия, так и сами полученные уравнения.

1. Постановка задачи

Пусть H — гильбертово пространство, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с заданной на нем нормальной фильтрацией $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}$.

Рассмотрим задачу Коши (0.2) для бесконечномерного стохастического уравнения с мультипликативным возмущением в интегральной форме:

$$X_t = \xi + \int\limits_0^t \mathcal{A}(s, X_s)\, ds + \int\limits_0^t B(s, X_s)\, dW_s, \quad t \in [0, T], \tag{1.3}$$

с оператором $\mathcal{A}(t, x) = Ax + F(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in H$.

Здесь A — линейный оператор в пространстве H; $F(t, x)$ — отображение из $[0, T] \times H$ в H, в общем случае нелинейное, с интегралом Бохнера $\int_0^t \mathcal{A}(s, X_s)\, ds$ и интегралом Ито $\int_0^t B(s, X_s)\, dW_s$; $\{W_t,\ t \geqslant 0\}$ — Q-винеровский процесс относительно фильтра $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ со значениями в пространстве H; $B(t, x)$ — отображение из $[0, T] \times H$ в $\mathcal{L}(H)$, в общем случае нелинейное и ξ — $\mathcal{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина.

О п р е д е л е н и е 1. H-значный предсказуемый процесс $\{X_t,\, t \in [0, T]\}$ называется *сильным решением* задачи (1.3), если

(a) X_t принимает значения в $D(A)$ при почти всех $t \in [0, T]$ и $\omega \in \Omega$;

(b) $\int_0^T \|\mathcal{A}(t, X_t)\|_H dt < \infty$ п.н. (при почти всех $\omega \in \Omega$);

(c) равенство (1.3) справедливо п.н.

О п р е д е л е н и е 2. H-значный предсказуемый процесс $\{X_t,\, t \in [0, T]\}$ называется *слабым решением* задачи (1.3), если

(a) $\int_0^T \|X_t\|_H dt < \infty$ п.н.;

(b) для любых $y \in D(A^*)$, $t \in [0, T]$

$$\langle X_t, y\rangle = \langle \xi, y\rangle + \int\limits_0^t \langle X_s, A^* y\rangle ds + \int\limits_0^t \langle F(s, X_s), y\rangle ds + \left\langle \int\limits_0^t B(s, X_s)\, dW(s), y \right\rangle \text{ п.н.} \tag{1.4}$$

Иными словами, сильным решением является предсказуемый процесс $\{X_t,\ t \in [0, T]\}$, принимающий значения в $D(A)$ при почти всех $t \in [0, T]$ и $\omega \in \Omega$, для которого траектории процесса $\{\mathcal{A}(t, X_t),\ t \in [0, T]\}$ интегрируемы при почти всех $\omega \in \Omega$ и который удовлетворяет уравнению (1.3). В отличие от сильного, слабое решение может принимать значения, не принадлежащие $D(A)$; уравнение (1.3) удовлетворяется в слабом смысле — как функционал в сопряженном пространстве, что описывается уравнением (1.4). Следует отметить, что введенное слабое решение имеет другой смысл, нежели слабое решение в конечномерных стохастических уравнениях — здесь название “слабое решение” исходит из терминологии функционального анализа; решения, называемые слабыми в конечномерном случае, в бесконечномерном называют мартингальными [5].

Наряду с сильным, слабым и мартингальным, для стохастических уравнений вводят мягкое решение — решение уравнения

$$X_t = S(t)\xi + \int\limits_0^t S(t-s) F(s, X_s)\, ds + \int\limits_0^t S(t-s) B(s, X_s)\, dW_s, \quad t \in [0, T].$$

В [4; 5] доказано, что при условии липшицевости и подлинейного роста для операторов $F(t, x)$ и $B(t, x)$ и существования полугруппы $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ класса C_0 с генератором A задача (1.3) имеет единственное мягкое решение; при дополнительных условиях на оператор B существует слабое решение, а еще при дополнительных условиях на A — сильное. Кроме того, доказано, что эти решения обладают свойством Маркова.

Из уравнения (1.3) следует, что процесс X_t имеет стохастический дифференциал

$$dX_t = \mathcal{A}(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t,$$

и это означает, что процесс X_t за время $\triangle t$ переходит из состояния $X_t = x$ в состояние $x + \triangle X_t$, где в некотором смысле (см. разд. 2 замечание 2)

$$\triangle X_t \sim \mathcal{A}(t, X_t)\,\triangle t + B(t, X_t)\,\triangle W_t. \tag{1.5}$$

Вероятность перехода из состояния $X_t = x$ в состояние $X_{t+\triangle t} = y$ описывается при помощи функционала $p(t+\triangle t, y|t, x)$ — плотности переходной вероятности процесса X_t. В бесконечномерном случае, как и в конечномерном, для плотности переходной вероятности марковского процесса имеет место уравнение Колмогорова — Чепмена:

$$p(t+\triangle t, y|s, z) = \int\limits_H p(t+\triangle t, y|t, x)p(t, x|s, z)\,dx, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t+\triangle t, \quad x, y, z \in H. \tag{1.6}$$

В настоящей работе мы показываем, что дифференциальные уравнения Колмогорова не обобщаются на бесконечномерный случай с такой же точностью, как уравнение (1.6) — они становятся интегро-дифференциальными и связывают не только плотность переходной вероятности $p(t+\triangle t, y|t, x)$, но и вспомогательный функционал $f(x)$, $x \in H$, который в конечномерном случае может играть роль основной функции, если рассматривать уравнение в обобщенном смысле.

Вывод уравнений опирается на уравнение Колмогорова — Чепмена и условия

$$\int\limits_{\|y-x\|_H > \delta} p(t+\triangle t, y|t, x)\,dy = o(\triangle t), \tag{A}$$

$$\int\limits_{\|y-x\|_H \leqslant \delta} f'(x)(y-x)p(t+\triangle t, y|t, x)\,dy = f'(x)\mathcal{A}(t, x)\,\triangle t + o(\triangle t), \tag{B}$$

$$\int\limits_{\|y-x\|_H \leqslant \delta} f''(x)[y-x]^2 p(t+\triangle t, y|t, x)\,dy = \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t, x)QB^*(t, x)]\,\triangle t + o(\triangle t), \tag{C}$$

где $\delta > 0$, $f \in H^*$, и все равенства понимаются в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, оснащенном нормой $\|\xi\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}|\xi|^2}$:

$$\frac{\|o(\triangle t)\|_2}{\triangle t} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}|o(\triangle t)|^2}}{\triangle t} \to 0.$$

Производные функционала $f \in H^*$ определяются по Фреше; при каждом $x \in H$ они являются линейными ограниченными операторами: $f'(x)\colon H \to \mathbb{R}$ и $f''(x)\colon H \to \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$. Применение этих операторов будем понимать в следующем смысле: для любых $x, y, z \in H$

$$f'(x)y := \langle y, f'(x)\rangle, \quad f''(x)[y, z] := \langle z, f''(x)y\rangle,$$

в частности,

$$f''(x)[y]^2 := \langle y, f''(x)y\rangle.$$

Равенства $(B), (C)$ в классическом анализе представляют собой локализацию первого и второго моментов приращений процесса X_t и обычно рассматриваются без дополнительной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. В бесконечномерном случае второй момент имеет смысл только в присутствии оператора f''. В связи с этим и условие (B) мы формулируем с функционалом f'.

В разд. 2 доказано выполнение глобальных условий $(B), (C)$ для сильного решения задачи (1.3) сначала для ограниченного оператора A, а затем для генератора полугруппы класса C_0. В раз. 3 доказано, что при выполнении условий (A)–(C) имеют место аналоги прямого и обратного уравнений Колмогорова для плотности переходных вероятностей.

2. Доказательство выполнения глобальных условий (B), (C)

Предложение 1. *Пусть H-значная функция $F(t,x)$ и $\mathcal{L}(H)$-значная функция $B(t,x)$ непрерывны по t на $[0,T]$ и обладают свойством Липшица по x :*

$$\|F(t,x)-F(t,y)\|_H \leqslant C_1\|x-y\|_H, \quad \|B(t,x)-B(t,y)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant C_2\|x-y\|_H, \quad x,y\in H, \quad t\in[0,T],$$

где C_1, C_2 — некоторые константы. Пусть непрерывный в среднеквадратичном марковский процесс X_t, $t\in[0,T]$, — сильное решение задачи (1.3) с ограниченным оператором A. Пусть f — дважды дифференцируемый по Фреше функционал на H, равный нулю вне некоторого ограниченного подмножества из H. Тогда для любого $x\in H$ имеют место следующие равенства для условного математического ожидания:

$$\mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\,X_t=x] \;=\; f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t+o(\triangle t), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{E}[f''(X_t)\,[\triangle X_t]^2\,|\,X_t=x] \;=\; \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t+o(\triangle t), \tag{2.2}$$

где Tr *— след соответствующего оператора.*

Доказательство. Докажем сначала (2.1). Рассмотрим

$$\mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\,X_t=x]=\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]$$
$$+\,\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}B(s,X_s)\,dW_s,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big] \tag{2.3}$$

и покажем, что в пространстве $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$

$$\Delta_1:=\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]-f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t=o(\triangle t), \tag{2.4}$$

$$\Delta_2:=\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}B(s,X_s)\,dW_s,f'(X_t)\Big|\,X_t=x\Big]=0. \tag{2.5}$$

Действительно, принимая во внимание определение нормы в пространстве $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$, имеем

$$\|\Delta_1\|_2^2=\Big\|\mathbf{E}\,\Big[\,\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]-f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t\Big\|_2^2$$
$$=\mathbf{E}\Big[\Big|\mathbf{E}\,\Big[\,\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]-f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t\Big|^2\Big]$$
$$\leqslant\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\,\Big[\Big|\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}(\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t))\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,\Big|\,X_t=x\Big]\Big]^2$$
$$\leqslant\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\,\Big[\int\limits_t^{t+\triangle t}\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H\,ds\cdot\|f'(X_t)\|_H\Big|\,X_t=x\Big]\Big]^2.$$

Из свойства условного математического ожидания для случайных величин ξ,η,ζ

$$\mathbf{E}^2[\xi\eta\,|\,\zeta]\leqslant\mathbf{E}[\xi^2\,|\,\zeta]\;\mathbf{E}[\eta^2\,|\,\zeta] \tag{2.6}$$

получаем

$$\|\Delta_1\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big[\Big(\int\limits_t^{t+\triangle t} \|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H\,ds\Big)^2\Big|\,X_t=x\Big]\,\mathbf{E}\big[\|f'(X_t)\|_H^2\big|\,X_t=x\big]\Big].$$

Применим неравенство Гёльдера и стохастическую теорему Фубини:

$$\|\Delta_1\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big[\triangle t\int\limits_t^{t+\triangle t} \|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H^2\,ds\big|\,X_t=x\Big]\Big]\cdot\|f'(x)\|_H^2$$

$$= \mathbf{E}\Big[\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathbf{E}\big[\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H^2\big|\,X_t=x\big]\,ds\Big]\cdot\|f'(x)\|_H^2\,\triangle t. \tag{2.7}$$

Пользуясь свойствами ограниченности оператора A, липшицевости функции F по переменной x и непрерывности F по t, для произвольного $\varepsilon>0$ при малых $\triangle t$ имеем

$$\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H \leqslant \|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(s,X_t)\|_H+\|\mathcal{A}(s,X_t)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H$$

$$\leqslant C\max\{\|X_s-X_t\|_H,\varepsilon\}.$$

Отсюда и из непрерывности (в среднеквадратичном) процесса X_t следует

$$\mathbf{E}[\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H^2|\,X_t=x] \leqslant C^2\mathbf{E}\big[\max\{\|X_s-X_t\|_H^2,(\triangle t)^2\}|\,X_t=x\big]<\varepsilon^2.$$

Подставляя полученную оценку в (2.7), получаем

$$\|\Delta_1\|_2^2<\varepsilon\|f'(x)\|_H^2\cdot(\triangle t)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\|\Delta_1\|_2}{\Delta t}<C\varepsilon,$$

что доказывает (2.4).

Докажем (2.5). По определению стохастического интеграла

$$I=\int\limits_t^{t+\triangle t} B(s,X_s)\,dW_s=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}B(s_k,X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}I_n, \tag{2.8}$$

где l.i.m означает предельный переход в $L_2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$, т. е. $\|I-I_n\|_{2,H}^2=\mathbf{E}\|I-I_n\|_H^2\to 0$. Представим Δ_2 в виде

$$\Delta_2=\mathbf{E}[\langle I,f'(X_t)\rangle|\,X_t=x]=\mathbf{E}[\langle I-I_n,f'(X_t)\rangle|\,X_t=x]+\mathbf{E}[\langle I_n,f'(X_t)\rangle|\,X_t=x].$$

Второе слагаемое здесь равно нулю:

$$\mathbf{E}[\langle I_n,f'(X_t)\rangle|\,X_t=x]=\mathbf{E}\Big[\Big\langle\sum_{k=0}^{n-1}B(s_k,X_{s_k})\,\triangle W_{s_k},f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\,\big[\big\langle\,\triangle W_{s_k},B^*(s_k,X_{s_k})f'(X_t)\big\rangle\big|\,X_t=x\big]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\big[\big\langle\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s_k)e_i,B^*(s_k,X_{s_k})f'(X_t)\big\rangle\big|\,X_t=x\big], \tag{2.9}$$

где B^* — эрмитово-сопряженный к оператору B и по определению Q-винеровского процесса

$$\triangle W_s=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s)e_i, \tag{2.10}$$

β_i — система независимых броуновских движений, λ_i и e_i — собственные значения и собственные векторы оператора Q, являющегося оператором следа

$$\mathrm{Tr}\,[Q] = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Qe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty.$$

В силу независимости значений процесса X_t от приращений броуновских движений и равенства нулю средних значений последних получаем

$$\mathbf{E}[\langle I_n, f'(X_t)\rangle |\, X_t = x] = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\cdot \mathbf{E}\beta_i(\triangle s_k)\cdot \mathbf{E}[\langle e_i, B^*(s_k, X_{s_k}) f'(X_t)\rangle |\, X_t = x] = 0.$$

Тогда

$$\|\Delta_2\|_2^2 = \mathbf{E}\big[\,\big|\mathbf{E}[\langle I - I_n, f'(X_t)\rangle |\, X_t = x]\big|^2\big] \leqslant \mathbf{E}[\,\mathbf{E}^2[\,\|I - I_n\|_H \cdot \|f'(X_t)\|_H |\, X_t = x]\,].$$

Из свойства (2.6) и свойства $\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi|\,\eta]] = \mathbf{E}[\xi]$ для произвольного $\varepsilon > 0$ за счет выбора n имеем

$$\|\Delta_2\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[\,\|I - I_n\|_H^2 |\, X_t = x]\cdot \mathbf{E}[\,\|f'(X_t)\|_H^2 |\, X_t = x]\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[\|I - I_n\|_H^2 |\, X_t = x]\right]\cdot \|f'(x)\|_H^2 = \mathbf{E}[\,\|I - I_n\|_H^2]\cdot \|f'(x)\|_H^2 < \varepsilon,$$

следовательно, $\Delta_2 = 0$ в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Соединяя вместе (2.3)–(2.5), получаем утверждение (2.1).

Переходим к доказательству равенства (2.2):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[f''(X_t)\,[\Delta X_t]^2\,|X_t = x\big] = \mathbf{E}\,[\langle \triangle X_t, f''(X_t)\,\triangle X_t\rangle |\, X_t = x]\\
&= \mathbf{E}\Big[\Big\langle \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\,ds, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\,ds\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]\\
&+ \mathbf{E}\Big[\Big\langle \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\,ds, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\,dW_s\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]\\
&+ \mathbf{E}\Big[\Big\langle \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\,dW_s, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\,ds\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]\\
&+ \mathbf{E}\Big[\Big\langle \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\,dW_s, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\,dW_s\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Как и при доказательстве соотношений (2.4) и (2.5), несложно получить, что все слагаемые в правой части (2.11), кроме последнего, имеют порядок малости относительно $\triangle t$ выше первого. Вычисление среднего значения в последнем слагаемом также подобно (2.5) и опирается на определение стохастического интеграла и представление Q-винеровского процесса в виде ряда (2.10), но, в отличие от (2.5), присутствие здесь второго интеграла приводит к появлению ковариационного оператора Q-винеровского процесса и дает ненулевое математическое ожидание.

Докажем, что в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big[\Big\langle \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\,dW_s, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\,dW_s\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]\\
&\qquad = \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t + o(\triangle t).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Для этого составим разность указанных в (2.12) математического ожидания и следа и с учетом определения стохастического интеграла (2.8) представим ее в виде

$$\mathbf{E}\left[\langle I, f''(X_t)I\rangle \,\big|\, X_t = x\right] - \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t$$

$$= \mathbf{E}\left[\langle I - I_n, f''(X_t)I\rangle \,\big|\, X_t = x\right] + \mathbf{E}\left[\langle I_n, f''(X_t)(I - I_n)\rangle \,\big|\, X_t = x\right]$$

$$+\,\mathbf{E}\left[\langle I_n, f''(X_t)I_n\rangle \,|\, X_t = x\right] - \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t =: \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5. \qquad (2.13)$$

Для Δ_3, подобно рассуждениям, проведенным выше для Δ_2, имеем

$$\|\Delta_3\|_2^2 = \mathbf{E}\big[\,\big|\mathbf{E}[\langle I - I_n, f''(X_t)I\rangle|\, X_t = x]\big|^2\big]$$
$$\leqslant \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[\,\|I - I_n\|_H^2|\, X_t = x] \cdot \mathbf{E}[\,\|f''(X_t)I\|_H^2|\, X_t = x]\big].$$

Сходимость $\|I - I_n\|_{2,H}^2 = \mathbf{E}\|I - I_n\|_H^2 \to 0$ имеет место вне зависимости от положения x процесса X_t в момент времени t, поэтому за счет выбора n

$$\|\Delta_3\|_2^2 < \mathbf{E}\left[\varepsilon \cdot \mathbf{E}[\,\|f''(X_t)I\|_H^2 \,|\, X_t = x]\right] = C\varepsilon, \qquad (2.14)$$

следовательно, $\Delta_3 = 0$ в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Аналогично

$$\|\Delta_4\|_2^2 = \mathbf{E}\big[\,\big|\mathbf{E}[\langle I_n, f''(X_t)(I - I_n)\rangle|\, X_t = x]\big|^2\big]$$

$$\leqslant \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\big[\,\|f''(X_t)\|_{\mathcal{L}(H)}^2\|I_n\|_H^2|\, X_t = x\big] \cdot \mathbf{E}[\,\|I - I_n\|_H^2|\, X_t = x]\Big] < C'\varepsilon, \qquad (2.15)$$

и $\Delta_4 = 0$. Наконец, рассмотрим Δ_5:

$$\Delta_5 := \mathbf{E}[\langle I_n, f''(X_t)I_n\rangle|\, X_t = x] - \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t.$$

Сначала заметим, что $\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t = \mathbf{E}[f''(X_t)\,(B(t,X_t)\,\triangle W_t)^2\,|\, X_t = x]$. Действительно,

$$\mathbf{E}\big[f''(X_t)\,[B(t,X_t)\,\triangle W_t]^2\,|\, X_t = x\big] = \mathbf{E}\big[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t\rangle|\, X_t = x\big]$$
$$= \mathbf{E}\Big[\Big\langle \sum_{i=1}^{\infty}\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{\infty}\langle f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_j\rangle e_j\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\big[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_i\rangle \cdot \langle f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_i\rangle|\, X_t = x\big]$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\big[\langle\triangle W_t, B^*(t,X_t)e_i\rangle \cdot \langle\triangle W_t, (f''(X_t)B(t,X_t))^*e_i\rangle|\, X_t = x\big].$$

По определению ковариационного оператора Q-винеровского процесса

$$\mathbf{E}[\langle\triangle W_t, a\rangle\langle\triangle W_t, b\rangle] = \langle\triangle tQa, b\rangle.$$

Отсюда и из того, что $\mathbf{E}[f''(X_t)B(t,X_t)|\, X_t = x] = f''(x)B(t,x)$ и $\mathbf{E}[B(t,X_t)|\, X_t = x] = B(t,x)$, получаем

$$\mathbf{E}\big[f''(X_t)\,(B(t,X_t)\,\triangle W_t)^2\,|\, X_t = x\big] = \sum_{i=1}^{\infty}\langle\triangle tQB^*(t,x)e_i, (f''(x)B(t,x))^*e_i\rangle$$

$$= \triangle t\sum_{i=1}^{\infty}\langle f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)e_i, e_i\rangle = \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t.$$

Вернемся к оценке Δ_5:

$$\|\Delta_5\|_2^2 = \|\mathbf{E}[\langle I_n, f''(X_t)I_n\rangle|\, X_t = x] - \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t\|_2^2$$

$$= \mathbf{E}\Big[\,\Big|\mathbf{E}\Big[\Big\langle \sum_{k=0}^{n-1} B(s_k, X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}, f''(X_t)\sum_{k=0}^{n-1} B(s_k, X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]$$

$$- \mathbf{E}\,[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t\rangle|\, X_t = x]\,\Big|^2\Big]$$

[представим второе слагаемое в виде суммы по соответствующим $\triangle s_k$]

$$= \mathbf{E}\Big[\,\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\,[\langle B(s_k, X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}, f''(X_t)B(s_k, X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}\rangle|\, X_t = x]$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\,[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_{s_k}, f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_{s_k}\rangle|\, X_t = x]\,\Big|^2\Big]$$

[разложим Q-винеровский процесс по базису $\{e_i\}$ в виде суммы броуновских движений]

$$= \mathbf{E}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\Big[\Big\langle B(s_k, X_{s_k})\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s_k)e_i, f''(X_t)B(s_k, X_{s_k})\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\beta_j(\triangle s_k)e_j\Big\rangle$$

$$- \Big\langle B(t,X_t)\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s_k)e_i, f''(X_t)B(t,X_t)\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\beta_j(\triangle s_k)e_j\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]\Big|^2$$

$$= \mathbf{E}\Big[\,\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\beta_i^2(\triangle s_k)\Big(\big\langle B(s_k, X_{s_k})e_i, f''(X_t)B(s_k, X_{s_k})e_i\big\rangle$$

$$- \big\langle B(t,X_t)e_i, f''(X_t)B(t,X_t)e_i\big\rangle\Big)\Big|\, X_t = x\Big]\Big|^2\Big]$$

$$= \mathbf{E}\Big[\,\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\Big[\lambda_i\beta_i^2(\triangle s_k)\Big(\big\langle(B(s_k, X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i, f''(X_t)B(s_k, X_{s_k})e_i\big\rangle$$

$$+ \big\langle B(t,X_t)e_i, f''(X_t)(B(s_k, X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i\big\rangle\Big)\Big|\, X_t = x\Big]\Big|^2\Big].$$

Используя независимость случайных величин $\beta_i^2(\triangle\, s_k)$ от $f''(X_t)B(s_k, X_{s_k})$, непрерывность и липшицевость операторной функции $B(t,x)$ и непрерывность процесса X_t, имеем

$$\mathbf{E}\Big[\,\Big|\big\langle(B(s_k, X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i, f''(X_t)B(s_k, X_{s_k})e_i\big\rangle\Big|\,\Big|\, X_t = x\Big] \leqslant \varepsilon C,$$

$$\mathbf{E}\Big[\,\Big|\big\langle B(t,X_t)e_i, f''(X_t)(B(s_k, X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i\big\rangle\Big|\,\Big|\, X_t = x\Big] \leqslant \varepsilon C.$$

Окончательно

$$\|\Delta_5\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}[\lambda_i\beta_i^2(\triangle s_k)]2\varepsilon MC\Big]^2 = C'\varepsilon^2\mathbf{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\langle\triangle s_k Qe_i, e_i\rangle\Big]^2$$

$$= C'\varepsilon^2\mathbf{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\triangle s_k\,\mathrm{Tr}\,Q\Big]^2 = C''\varepsilon^2(\triangle t)^2$$

и $\Delta_5 = o(\triangle t)$. Вместе с оценками (2.14), (2.15) и соотношением (2.13) это доказывает равенство (2.12), а вместе с ним и (2.2). □

Распространим полученные характеристики решения (2.1) и (2.2) на случай, когда оператор задачи A является неограниченным, но порождает полугруппу класса C_0.

О п р е д е л е н и е 4. Семейство линейных ограниченных операторов $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$, действующих в банаховом пространстве H и удовлетворяющих условиям

(U1) $S(t+h) = S(t)S(h), \quad t,h \geqslant 0,$
(U2) $S(0) = I,$
(U3) операторная функция $S(\cdot)$ сильно непрерывна по t при $t \geqslant 0$,
называется *полугруппой класса* C_0.

Оператор, определяемый равенством

$$Af := \lim_{h\to 0} h^{-1}(S(h) - I)f,$$

с областью определения $D(A) = \big\{f \in H\colon \lim_{h\to 0} h^{-1}(S(h) - I)f \ \text{ существует}\big\}$, называется *генератором семейства* $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$.

Замечание 1. Генератор полугруппы класса C_0 является замкнутым, но в общем случае неограниченным оператором. Он имеет резольвенту $R(\lambda)$ в некоторой правой полуплоскости комплексной плоскости. На своей области определения он может быть поточечно приближен последовательностью ограниченных операторов $A_n = \lambda_n AR(\lambda_n)$, называемых *аппроксимациями Иосиды* [11]:

$$A_n x = \lambda_n AR(\lambda_n)x \to Ax \quad \text{где} \ \ \lambda_n \in \mathbb{R},\ \lambda_n \to \infty \ \text{при}\ n \to \infty, \quad x \in D(A).$$

Предложение 2. *Пусть в условиях предложения* 1 *оператор A является генератором полугруппы операторов класса C_0. Тогда для сильного решения уравнения* (1.3) *при $x \in D(A)$ справедливы равенства* (2.1) *и* (2.2).

Доказательство. Пусть ограниченные операторы A_n — аппроксимации Иосиды оператора A (см. замечание 1). Тогда решения $X_{n,t}$ соответствующих стохастических задач (1.3) равномерно по $t \in [0,T]$ сходятся в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ к процессу X_t — решению (1.3) с оператором A [4]:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|X_{n,t} - X_t\|_{2,H} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.16}$$

Для $X_{n,t}$ согласно предложению 1 имеем

$$\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t}|\, X_{n,t} = x] = f'(x)(A_n x + F(t,x))\,\triangle t + o(\triangle t),$$

$$\mathbf{E}[f''(X_{n,t})\,[\triangle X_{n,t}]^2\,|\, X_{n,t} = x] = \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t + o(\triangle t).$$

Покажем, что в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t}|\, X_{n,t} = x] \to \mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\, X_t = x], \tag{2.17}$$

$$\mathbf{E}[f''(X_{n,t})\,[\triangle X_{n,t}]^2\,|\, X_{n,t} = x] \to \mathbf{E}[f''(X_t)\,[\triangle X_t]^2\,|\, X_t = x]. \tag{2.18}$$

Для доказательства (2.17), пользуясь непрерывностью X_t, непрерывностью и равномерной ограниченностью $f'(x)$ и сходимостью (2.16), оценим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big[\,\big|\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t}|\, X_{n,t} = x] - \mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\, X_t = x]\big|^2\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\,\big|\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t} - f'(X_t)\,\triangle X_t|\, X_t = x]\big|^2\Big] \\
&\leqslant 2\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}^2[\,\|f'(X_{n,t})\|_H \cdot \|\,\triangle X_{n,t} - \triangle X_t\|_H|\, X_t = x] + \mathbf{E}^2[\,\|f'(X_{n,t}) - f'(X_t)\|_H \cdot \|\,\triangle X_t\|_H|\, X_t = x]\Big] \\
&\leqslant 2\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}[\,\|f'(X_{n,t})\|_H^2|\, X_t = x] \cdot \mathbf{E}[\,\|\,\triangle X_{n,t} - \triangle X_t\|_H^2|\, X_t = x] \\
&\quad + \mathbf{E}[\,\|f'(X_{n,t}) - f'(X_t)\|_H^2|\, X_t = x] \cdot \mathbf{E}[\,\|\,\triangle X_t\|_H^2|\, X_t = x]\Big] \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Соотношение (2.18) доказывается аналогично. □

Итак, мы доказали равенства (2.1) и (2.2) для решения задачи Коши (1.3) с генератором полугруппы класса C_0. В конечномерном случае отсюда в силу свойств броуновских движений следуют локальные условия (B), (C) и условие непрерывности (A). В следующем разделе мы будем предполагать выполненными условия (A)–(C) в бесконечномерном случае.

З а м е ч а н и е 2. Легко заметить, что из равенств (2.1) и (2.2) следует, что в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\mathbf{E}[f'(X_t)[\triangle X_t - \mathcal{A}(t, X_t)\,\triangle t - B(t, X_t)\,\triangle W_t]|\, X_t = x] = o(\triangle t),$$
$$\mathbf{E}[f''(X_t)\,[\triangle X_t - \mathcal{A}(t, X_t)\,\triangle t - B(t, X_t)\,\triangle W_t]^2\,|\, X_t = x] = o(\triangle t).$$

Эти соотношения расшифровывают смысл, в котором мы понимаем равенство (1.5).

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть непрерывный марковский процесс X_t, $t \in [0, T]$, — сильное решение задачи (1.3) и для него выполнены условия (A)–(C). Пусть $p(t, x|s, z)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $z, x \in H$, — плотность переходной вероятности процесса X_t. Пусть $f(x)$, $x \in H$, — произвольный дважды дифференцируемый по Фреше функционал, равный нулю вне некоторого ограниченного подмножества из H. Тогда имеет место уравнение*

$$\int\limits_H f(x)\frac{\partial p(t, x|s, z)}{\partial t}\,dx = \int\limits_H \Big(f'(x)\mathcal{A}(t, x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t, x)QB^*(t, x)]\Big)p(t, x|s, z)\,dx. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функционал

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_H f(x)p(t, x|s, z)\,dx = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\triangle t}\Big(\int\limits_H f(x)p(t{+}\,\triangle t, x|s, z)\,dx - \int\limits_H f(x)p(t, x|s, z)\,dx\Big).$$

Поскольку значение интеграла $\int_H f(x)p(t{+}\,\triangle t, x|s, z)\,dx$ не зависит от переменной интегрирования, переобозначим ее (заменим на y). Далее в силу уравнения Колмогорова — Чепмена (1.6) получим

$$\int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|s, z)\,dy = \int\limits_H f(y)\,dy\int\limits_H p(t, x|s, z)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\,dx$$
$$= \int\limits_H p(t, x|s, z)\,dx\int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\,dy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_H f(x)p(t, x|s, z)\,dx = \int\limits_H p(t, x|s, z)\,\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\triangle t}\bigg(\int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\,dy - f(x)\bigg)dx. \tag{3.2}$$

Найдем предел, стоящий под знаком интеграла. Для этого разобьем интеграл на две части: $\|y - x\|_H \leqslant \delta$ и $\|y - x\|_H > \delta$, и в первой из них представим функционал f по формуле Тейлора:

$$\int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\,dy - f(x) = \int\limits_H (f(y) - f(x))p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\,dy$$
$$= \int\limits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}\Big(f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)[y - x]^2 + O(\|y - x\|_H^2)\Big)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\,dy$$
$$+ \int\limits_{\|y-x\|_H>\delta}(f(y) - f(x))p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\,dy. \tag{3.3}$$

Из условий (B) и (C) следует, что

$$\int\limits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}\Big(f'(x)(y-x)+\frac{1}{2}f''(x)[y-x]^2\Big)p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy$$
$$=f'(x)\mathcal{A}(t,x)\vartriangle t+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\vartriangle t+o(\vartriangle t). \tag{3.4}$$

Далее, $O(\|y-x\|_H^2)=R(y,x)f''(x)[y-x]^2$, поэтому

$$\Big|\int\limits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}O(\|y-x\|_H^2)p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy\Big|$$
$$\leqslant\max\nolimits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}\|R(y,x)\|\int\limits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}f''(x)[y-x]^2p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy$$
$$=C_\delta\,\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\vartriangle t+o(\vartriangle t), \tag{3.5}$$

где $C_\delta\to 0$ при $\delta\to 0$. И, наконец, из условия (A) и ограниченности функционала f (он непрерывен и имеет ограниченный носитель) получаем

$$\Big|\int\limits_{\|y-x\|_H>\delta}(f(y)-f(x))p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{\|y-x\|_H>\delta}|f(y)-f(x)|p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy$$
$$\leqslant C\int\limits_{\|y-x\|_H>\delta}p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy=CP[\|\vartriangle X_t\|_H>\delta|\,X_t=x]=o(\vartriangle t). \tag{3.6}$$

Соберем вместе равенства (3.2)–(3.6):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_H f(x)p(t,x|s,z)\,dx$$
$$=\int\limits_H\bigg(f'(x)\mathcal{A}(t,x)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]+C_\delta\,\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\bigg)p(t,x|s,z)\,dx.$$

В силу произвольности δ имеем (3.1). □

Полученное уравнение (3.1) является бесконечномерным аналогом прямого уравнения Колмогорова[2].

Теорема 2. *Пусть непрерывный марковский процесс X_t, $t\in[0,T]$, — сильное решение задачи* (1.3), *и для него выполнены условия (A)–(C). Пусть $p(t,x|s,z)$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, $z,x\in H$, — плотность переходной вероятности процесса X_t и существуют производные по Фреше $\dfrac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial s}$, $\dfrac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 p(t,y|s,x)}{\partial x^2}$. Пусть $f\in H^*$ — функционал, равный нулю вне некоторого ограниченного подмножества из H и*

$$g(s,x):=\int\limits_H f(y)p(t,y|s,x)\,dy.$$

[2]Это уравнение известно также как уравнение Фоккера — Планка, поскольку оно встречалось в работах М. К. Планка, А. Д. Фоккера и других физиков до того, как было математически обосновано А. Н. Колмогоровым.

Тогда имеет место уравнение

$$-\int\limits_H f(y)\frac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial s}\,dy=\int\limits_H f(y)\frac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial x}\mathcal{A}(s,x)\,dy$$
$$+\frac{1}{2}\,Tr\Big[\int\limits_H f(y)\frac{\partial^2 p(t,y|s,x)}{\partial x^2}\,dyB(s,x)QB^*(s,x)\Big]. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из уравнения Колмогорова — Чепмена

$$g(s,x)=\int\limits_H f(y)\,dy\int\limits_H p(s+\vartriangle s,z|s,x)p(t,y|s+\vartriangle s,z)\,dz$$
$$=\int\limits_H p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz\int\limits_H f(y)p(t,y|s+\vartriangle s,z)\,dy=\int\limits_H g(s+\vartriangle s,z)p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz.$$

Рассмотрим приращение

$$g(s,x)-g(s+\vartriangle s,x)=\int\limits_H g(s+\vartriangle s,z)p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz-g(s+\vartriangle s,x)$$
$$=\int\limits_H (g(s+\vartriangle s,z)-g(s+\vartriangle s,x))p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz.$$

В силу условий на плотность переходной вероятности функционал $g(s,x)$ является дифференцируемым по s и дважды дифференцируемым по x в смысле Фреше. По формуле Тейлора получим

$$g(s,x)-g(s+\vartriangle s,x)$$
$$=\int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}\Big(g'_x(s+\vartriangle s,x)(z-x)+\frac{1}{2}g''_{xx}(s+\vartriangle s,x)[z-x]^2+O(\|z-x\|_H^2)\Big)p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz$$
$$+\int\limits_{\|z-x\|_H>\delta}(g(s+\vartriangle s,z)-g(s+\vartriangle s,x))p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz. \tag{3.8}$$

Применим условия (B) и (C), подставляя в них вместо $f(x)$ функцию $g(s,x)$:

$$\int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}\Big(g'_x(s+\vartriangle s,x)(z-x)+\frac{1}{2}g''_{xx}(s+\vartriangle s,x)[z-x]^2\Big)p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz$$
$$=g'_x(s+\vartriangle s,x)\mathcal{A}(s,x)\vartriangle s+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s+\vartriangle s,x)B(s,x)QB^*(s,x)]\vartriangle s+o(\vartriangle s). \tag{3.9}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, представим остаточный член формулы Тейлора в виде

$$O(\|z-x\|_H^2)=R(z,x)g''_{xx}(s+\vartriangle s,x)[z-x]^2,$$

и оценим интеграл

$$\Bigg|\int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}O(\|z-x\|_H^2)p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz\Bigg|$$
$$\leqslant\max\nolimits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}\{\|R(z,x)\|\}\int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}g''_{xx}(s+\vartriangle s,x)[z-x]^2p(s+\vartriangle s,z|s,x)\,dz$$
$$=C_\delta\,\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s+\vartriangle s,x)B(s,x)QB^*(s,x)]\vartriangle s+o(\vartriangle s), \tag{3.10}$$

где $C_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Для последнего интеграла в (3.8) согласно условию (A) непрерывности процесса X_t и ограниченности функционала g получаем

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{\|z-x\|_H>\delta} (g(s+\triangle s,z)-g(s+\triangle s,x))p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz\Bigg| \\ \leqslant \int\limits_{\|z-x\|_H>\delta} |g(s+\triangle s,z)-g(s+\triangle s,x)|\cdot p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz \\ \leqslant C\int\limits_{\|z-x\|_H>\delta} p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz = o(\triangle s).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Соединим вместе равенства (3.8)–(3.11) и примем во внимание произвольность δ:

$$g(s,x)-g(s+\triangle s,x)=g'_x(s+\triangle s,x)\mathcal{A}(s,x)\,\triangle s+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s+\triangle s,x)B(s,x)QB^*(s,x)]\,\triangle s+o(\triangle s).$$

Поделив это равенство на $\triangle s$ и устремив $\triangle s$ к нулю, получим

$$-\frac{\partial g(s,x)}{\partial s}=g'_x(s,x)\mathcal{A}(s,x)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s,x)B(s,x)QB^*(s,x)],$$

откуда следует уравнение (3.7). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Allen E.J.** Modeling with Ito stochastic differential equations. Berlin: Springer, 2007. 228 p. ISBN: 978-1-4020-5953-7 .

2. **Gardiner C.W.** Handbook of stochastic methods. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2004. 440 p. ISBN: 3-540-20882-8 .

3. **Shreve S.E.** Stochastic calculus for Finance II. Berlin; Heidelberg; London: Springer Finance, 2004. 550 p. ISBN: 978-0-387-40101-0 .

4. **Da Prato G., Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridg: Cambridge Univ. Press, 2014. 380 p. ISBN: 9781107295513 .

5. **Gawarecki L., Mandrekar V.** Stochastic differential equations in infinite dimensions. Berlin: Springer, 2011. 292 p. ISBN: 978-3-642-16194-0 .

6. **Melnikova I.V.** Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016. 300 p. ISBN: 1482210509 .

7. **Carmona R., Tehranchi M.** Interest rate models: an infinite dimensional stochastic analysis perspective. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2006. 235 p. ISBN: 3540270655 .

8. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 400 с. ISBN: 5-9221-0335-0 .

9. **Melnikova I.V., Parfenenkova V.S.** Relations between stochastic and partial differential equations in Hilbert spaces // Int. J. Stoch. Anal. 2012. Article ID 858736. doi: 10.1155/2012/858736.

10. **Розанов Ю.А.** Случайные процессы (краткий курс). М.: Наука. Главная редакция физ-мат. литры, 1971. 228 с.
11. **Hille E., Phillips R.S.** Functional analysis and semi-groups. Rev. ed. Providence: American Mathematical Society, 1957. 810 pp. (Ser. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., *31*.)

Мельникова Ирина Валерьяновна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: Irina.Melnikova@urfu.ru

Поступила 15.05.2017

Алексеева Ульяна Алексеевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: Uliana.Alekseeva@urfu.ru

Бовкун Вадим Андреевич
аспирант
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: 123456m@inbox.ru

REFERENCES

1. Allen E.J. *Modeling with Ito stochastic differential equations.* Berlin: Springer, 2007, 228 p. ISBN: 978-1-4020-5953-7 .
2. Gardiner C.W. *Handbook of stochastic methods.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2004, 440 p. ISBN: 3-540-20882-8 .
3. Shreve S.E. *Stochastic calculus for Finance II.* Berlin; Heidelberg; London: Springer Finance, 2004, 550 p. ISBN: 978-0-387-40101-0 .
4. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014, 380 p. ISBN: 9781107295513 .
5. Gawarecki L., Mandrekar V. *Stochastic differential equations in infinite dimensions.* Berlin: Springer, 2011, 292 p. ISBN: 978-3-642-16194-0 .
6. Melnikova I.V. *Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions.* Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016, 300 p. ISBN: 1482210509 .
7. Carmona R., Tehranchi M. *Interest rate models: an infinite dimensional stochastic analysis perspective.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2006, 235 p. ISBN: 3540270655 .
8. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 400 p. ISBN 5-9221-0335-0 .
9. Melnikova I.V., Parfenenkova V.S. Relations between Stochastic and Partial Differential Equations in Hilbert Spaces. *Int. J. Stoch. Anal.*, 2012, Article ID 858736. doi: 10.1155/2012/858736 .
10. Rozanov Yu.A. *Processus aléatoires.* Éditions Mir, Moscow, 1975, 275 p. *Sluchainye protsessy* (*kratkii kurs*) [Random processes: a short course]. Moscow: Nauka Publ., 1971, 286 p.
11. Hille E., Phillips R.S. *Functional analysis and semi-groups.* Rev. ed. Providence: American Mathematical Society, 1957. Ser. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., *31*, 810 p.

The paper was received by the Editorial Office on May 15, 2017.

Irina Valer'yanovna Melnikova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: Irina.Melnikova@urfu.ru .

Ul'yana Alekseevna Alekseeva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: Uliana.Alekseeva@urfu.ru .

Vadim Andreevich Bovkun, doctoral student, Ural Federal University, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: 123456m@inbox.ru .