ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$[1]

А. А. Махнев, М. С. Нирова

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. Если $\theta_2 = -1$, то граф Γ_3 сильно регулярен и дополнительный граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Если граф Γ_3 не содержит треугольников и число его вершин v меньше 800, то Γ имеет массив пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. При этом Γ_3 – граф с параметрами (392,46,0,6) и $\bar{\Gamma}_2$ – сильно регулярный граф с параметрами (392,115,18,40). Заметим, что окрестность любой вершины в графе с параметрами $(392, 115, 18, 40)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, существование которого не известно. В работе найдены возможные автоморфизмы указанных сильно регулярных графов и гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. В частности, доказано, что последний граф не является реберно симметричным.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

A. A. Makhnev, M. S. Nirova. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$.

Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 with eigenvalues $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. If $\theta_2 = -1$, then the graph Γ_3 is strongly regular and the complementary graph $\bar{\Gamma}_3$ is pseudogeometric for $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. If Γ_3 does not contain triangles and the number of its vertices v is less than 800, then Γ has intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. In this case Γ_3 is a graph with parameters (392,46,0,6) and $\bar{\Gamma}_2$ is a strongly regular graph with parameters (392,115,18,40). Note that the neighborhood of any vertex in a graph with parameters $(392, 115, 18, 40)$ is a strongly regular graph with parameters $(115, 18, 1, 3)$, and its existence is unknown. In this paper, we find possible automorphisms of this strongly regular graph and automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. In particular, it is proved that the latter graph is not arc-transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism of a graph.

MSC: 05B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-182-190

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$. Тогда число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025 (теоремы 1–3) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие 2).

любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа $b_0 = k$ — это степень графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 2 называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), где $\lambda = a_1, \mu = c_2$.

Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ. Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_i(g)$ обозначим $|\{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = i\}|$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. Если $\theta_2 = -1$, то по предложению 4.2.17 из [1] граф Γ_3 сильно регулярен. В этом случае граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$.

Если, кроме того, граф Γ_3 не содержит треугольников и число его вершин v меньше 800, то Γ имеет массив пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. При этом Γ_3 — граф с параметрами (392,46,0,6) и $\bar{\Gamma}_2$ – сильно регулярный граф с параметрами (392,115,18,40).

Сильно регулярные графы без треугольников являются самыми интригующими в классе сильно регулярных графов. Известно существование следующих сильно регулярных графов без треугольников:

а) полный двудольный граф;

б) граф Мура с параметрами $(k^2 + 1, k, 0, 1)$, $k = 2, 3, 7$ (неизвестно существование графа Мура с $k = 57$);

в) граф Клебша с параметрами $(16, 5, 0, 2)$, граф Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, граф Матье с параметрами $(77, 16, 0, 4)$, граф Хигмена — Симса с параметрами $(100, 22, 0, 6)$.

В работе найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. Такой граф имеет спектр $69^1, 13^{69}, -1^{276}, -15^{46}$ и $1 + 69 + 276 + 46 = 392$ вершины. Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф, и либо* $p = 7$, $\alpha_3(g) = 98s$, $\alpha_2(g) = 198t$, *либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$, $\alpha_2(g) = 56t$;

(2) $|\Omega| = 1$, *и* $p = 23$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$, $\alpha_3(g) = 46$;

(3) $|\Omega| = 21s + 14$, *и* $p = 3$, $s = 0, 1, 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 84t$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то либо* $|G| = 8 \cdot 49$ *и* Γ *является графом Кэли, либо* $G = Z(G) \times L$, $Z(G) \cong Z_7$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ *и* L_a *— силовская 3-подгруппа из* L, *либо* G *содержит подгруппу индекса 2, изоморфную* $Z_7 \times L_2(7)$, $|L_a| = 6$ *и* $G/S(G) \cong PGL_2(7)$. *В любом случае граф* Γ *не является реберно симметричным.*

Существование графа из заключения следствия 1 пока не известно.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(392, 46, 0, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, и* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 98s$ *или* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 28t$;

(2) Ω *является* n*-кликой, и либо* $n = 1$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 46$, *либо* $n = 2$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 70l - 20$;

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $4 \le m \le 56$, *и* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 28l - 10m$;

(4) Ω *является объединением* l *изолированных ребер,* $l = 7, 28$, *и* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 0$;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \le 5$.

Заметим, что окрестность любой вершины в графе с параметрами $(392,115,18,40)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(115,18,1,3)$, а вторая окрестность вершины сильно регулярна с параметрами $(276,75,10,24)$. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(115,18,140)$ и $(276,75,10,24)$ найдены в [2] и [3] соответственно. Теорема 3 устраняет неточность в основном результате из [4], использованном в [2].

Теорема 3. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(392,115,18,40)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,7,23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф, и* $p=7$, $\alpha_1(g)=0,196$ *или* $p=2$, $\alpha_1(g)=56t$;

(2) $|\Omega|=1$, *и* $p=23$, $\alpha_1(g)=115$;

(3) Ω *является полным двудольным графом* $K_{m,n}$, $p=3$, *числа* m,n *сравнимы с* 1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_1(g)=84l+3(m+n)$;

(4) *если* f *— элемент порядка* 7 *из* G, *то* $|C_G(f)|$ *не делится на* 9.

С помощью теоремы 3 получаем существенное уточнение результата из [2].

Следствие 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$. *Если группа* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то либо* $|G|=32\cdot 49$ *и* Γ *является графом Кэли, либо* $G=S(G)\times L$, $S(G)=Z_7\times K$, $|K|=4$, $L\cong L_2(7),L_2(8)$ *и* $|L:L_a|=56$, *либо* $S(G)=Z_7\times K$, $|K|=2$, $|L_a|=3$ *и* $G/S(G)\cong PGL_2(7)$.

1. Автоморфизмы графов с параметрами $(392,46,0,6)$ и $(392,115,18,40)$

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Пусть g — неединичный автоморфизм сильно регулярного графа Γ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Если Γ имеет параметры $(392,46,0,6)$, то ввиду [5, теорема 3.2] имеем $|\Omega|\le 56$, а если Γ имеет параметры $(392,115,18,40)$, то $|\Omega|\le 140$.

В леммах 1–3 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(392,46,0,6)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $46^1,4^{276},-10^{115}$. Следующая лемма использует метод Хигмена [6, гл. 3]. Здесь матрицы P,Q являются первой и второй матрицей собственных значений графа и $PQ=QP=v^{-1}I$ (см. также [7]).

Лемма 1. *Если* φ_1 *— характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* 276, *то* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\varphi_1(g)=(10\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/14-4$ *и* $\varphi_1(g)-276$ *делится на* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\276&24&-4\\115&-25&3\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi_1(g)=(69\alpha_0(g)+6\alpha_1(g)-\alpha_2(g))/98$. Подставляя $\alpha_2(g)=392-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\varphi_1(g)=(10\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/14-4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [7, лемма 1]. □

Лемма 2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p=7$ *и* $\alpha_1(g)=98s$, *либо* $p=2$ *и* $\alpha_1(g)=28t$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n=1$, $p=23$ *и* $\alpha_1(g)=46$, *либо* $n=2$, $p=5$ *и* $\alpha_1(g)=70l-20$;

(3) *если Ω является m-кокликой, $m \geq 2$, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 28l - 10m$;*

(4) *если Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 3$, Ω является объединением l изолированных ребер, $l = 7, 28$ и $\alpha_1(g) = 0$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $392 = 8 \cdot 49$, то $p = 2, 7$.

Если $p = 7$, то по лемме 1 число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 4$ сравнимо с -4 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 98s$.

Если $p = 2$, то число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28t$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 46 и 345, поэтому $p = 23$. Теперь $\varphi_1(g) = (10 + \alpha_1(g))/14 - 4$ и $\alpha_1(g) = 46$.

Если $n = 2$, a, b — две вершины из Ω, то Γ содержит по 45 вершин из $[a] - \{b\}$, $[b] - \{a\}$ и 300 вершин вне $[a] \cup [b]$, поэтому p делит 45 и 345, $p = 3, 5$. В случае $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 0$ и $\varphi_1(g) = 20/14 - 4$, противоречие. В случае $p = 5$ имеем $\varphi_1(g) = (20 + \alpha_1(g))/14 - 4$ и $\alpha_1(g) = 70l - 20$.

Пусть Ω является m-кокликой, $m \geq 2$. Если a, b — две вершины из Ω, то Γ содержит 6 вершин из $[a] \cap [b]$, по 40 вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и 304 вершины вне $a^\perp \cup b^\perp$, поэтому p делит 6, 40 и $306 - m$. Отсюда $p = 2$. Далее, число $\varphi_1(g) = (10m + \alpha_1(g))/14 - 4$ четно и $\alpha_1(g) = 28l - 10m$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Если a, b — две смежные вершины из Ω, то p делит 6 и 45, поэтому $p = 3$, Ω является объединением изолированных ребер, $\alpha_1(g) = 0$ и число $\varphi_1(g) = 10\alpha_0(g)/14 - 4$ делится на 3. Отсюда $10\alpha_0(g) = 42s + 14$, $s = 5t + 3$ и $\alpha_0(g) = 21t + 14$, $t = 0, 2$. □

Лемма 3. *Если Ω содержит геодезический 2-путь, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *$p \leq 5$ и в случае $p = 5$ имеем $|\Omega| \in \{7, 12, \ldots, 52\}$ и степень вершины в Ω равна $6, 11, 16, 21$;*

(2) *если $p = 3$, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_0(g) \in \{14, 35, 56\}$;*

(3) *если $p = 2$, то $|\Omega| \in \{4, 6, \ldots, 56\}$ и степень вершины в Ω равна $2, 4, \ldots, 36$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Если $p > 5$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 0, 6)$, Ω имеет неглавные собственные значения r, $-(6 + r)$ и $k' = 6(r + 1) + r^2$, причем 6 делит $r^2(r^2 - 1)$. Если $r = 1$, то Ω имеет параметры $(40, 13, 0, 6)$, противоречие, а если $r = 2$, то Ω имеет параметры $(100, 22, 0, 6)$. В этом случае число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $100 \cdot 24$, противоречие с тем, что вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из Ω.

Пусть $p = 5$. Тогда $\mu_\Omega \in \{1, 6\}$, $|\Omega| \in \{7, 12, \ldots, 52\}$ и степень вершины в Ω равна $6, 11, 16, 21$.

Пусть $p = 3$. Тогда $\mu_\Omega \in \{3, 6\}$, $|\Omega| \in \{8, 11, \ldots, 56\}$ и степень вершины в Ω равна $3, 6, \ldots, 21$. Далее, $\alpha_1(g) = 0$, число $\varphi_1(g) = 5\alpha_0(g)/7 - 4$ делится на 3, $5\alpha_0(g) = 7(3s + 1)$ и $s = 5t + 3$. Отсюда $\alpha_0(g) \in \{14, 35, 56\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\mu_\Omega \in \{2, 4, 6\}$, $|\Omega| \in \{4, 6, \ldots, 56\}$ и степень вершины в Ω равна $2, 4, \ldots, 36$. □

Из лемм 2, 3 следует теорема 2.

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами (392, 115, 18, 40), $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $115^1, 3^{345}, -25^{46}$. Так как окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (115,18,1,3), то окрестность любой вершины в μ-подграфе является 3-кокликой и порядок клики в Γ не больше 4. Далее, порядок коклики в Γ не больше $392 \cdot 5/28 = 70$. Следующая лемма использует метод Хигмена [4, гл. 3].

Лемма 4. *Если ψ_2 — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 46, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\psi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/28 + 4$ и $\psi_2(g) - 46$ делится на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 345 & 9 & -5 \\ 46 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\psi_2(g) = (23\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g))/196$. Подставляя $\alpha_2(g) = 392 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\psi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/28 + 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 1]. $\square$

Лемма 5. *Если Ω — пустой граф, то либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 0, 196$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 56t$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $392 = 8 \cdot 49$, то $p = 2, 7$.

Если $p = 7$, то по лемме 4 число $\psi_2(g) = \alpha_1(g)/28 + 4$ сравнимо с 4 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 196s$. Если $\alpha_1(g) = 392$, то каждая $\langle g \rangle$-орбита на множестве вершин является 7-кликой, противоречие.

Если $p = 2$, то число $\psi_2(g) = \alpha_1(g)/28 + 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 56t$. $\square$

Лемма 6. *Если Ω — непустой граф, то либо*

(1) $|\Omega| = 1$, *$p = 23$ и $\alpha_1(g) = 115$, либо*

(2) *Ω является полным двудольным графом $K_{m,n}$, $p = 3$, числа m, n сравнимы с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 84l + 3(m + n)$;*

(3) *если f — элемент порядка 7, то $|C_G(f)|$ не делится на 9.*

Доказательство. Пусть Ω содержит вершину a, $\alpha'_i(g) = |\{u \in [a] - \Omega \mid d(u, u^g) = i\}|$. По [2, теорема 1] выполняется одно из утверждений:

(1) $\Omega(a)$ — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha'_1(g) = 15, 55$, либо $p = 23$ и $\alpha'_1(g) = 23$;

(2) $\Omega(a)$ является l-кокликой, $1 \le l \le 13$, $p = 3$, l сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha'_1(g) = 24s + 23 - 5l \neq 0$;

(3) $\Omega(a) = b^\perp$ для некоторой вершины $b \in \Omega(a)$ и $p = 2$.

В случае (1) Ω является m-кокликой, и если $p = 23$, то $m = 1$, $\psi_2(g) = (115 - \alpha_1(g))/28$, поэтому $\alpha_1(g) = 115$. Если $p = 5$, то получим противоречие с [3, лемма 5].

В случае (2) покажем, что $\Omega - a^\perp$ является кокликой. Если b, c — две смежные вершины из $\Omega - a^\perp$, то $[b] \cap [c]$ содержит 40 вершин, 16 из которых попадают в $[a]$. Противоречие с тем, что для вершины $e \in [b] \cap [c] \cap \Omega(a)$ подграф $\Omega(e)$ содержит ребро.

Покажем, что Ω — полный двудольный граф $K_{m,n}$. Пусть $b \in \Omega(a)$. Если c — несмежная с b вершина из $\Omega - a^\perp$, то $\Omega(c)$ не пересекает $[b]$, противоречие с тем, что $|[b] \cap [c]| = 40$.

Наконец, число $\psi_2(g) = (3(m + n) - \alpha_1(g))/28 + 4$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 84l + 3(m + n)$.

В случае (3) получим противоречие с тем, что окрестность любой вершины в μ-подграфе является 3-кокликой.

Пусть $p = 7$ и $|C_G(g)|$ делится на 9. Тогда для элемента f порядка 3 из $C_G(g)$ число $m + n$ делится на 7 и $m + n = 14, 35$. В последнем случае имеем $\{m, n\} = \{7, 28\}$, противоречие с тем, что порядок окрестности вершины в Ω не больше 23. По лемме 6 имеем $\alpha_2(g) = 196, 392$.

Пусть f — элемент порядка 7 и $|C_G(f)|$ делится на 9. Если $C_G(f)$ содержит элемент порядка 9, то $\alpha_2(f) - 14$ не делится на 9, противоречие. Пусть $U = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ — элементарная абелева подгруппа порядка 9 из $C_G(f)$, где $\langle g_i \langle$ — различные подгруппы порядка 3 из U. Тогда $|\mathrm{Fix}(U)| = 14$ и снова $\alpha_2(f) - 14$ не делится на 9, противоречие. $\square$

Из лемм 5, 6 следует теорема 3.

2. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $115^1, 23^{210}, 3^{345}, -5^{966}, -25^{46}$ и $v = 1 + 115 + 1104 + 345 + 3 = 1568 = 32 \cdot 49$. Далее, окрестность любой вершины в Γ — сильно регулярный граф с параметрами (115,18,1,3) и Γ не содержит 5-клик.

Пусть χ_1 — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 210 и χ_4 — характер проекции представления на подпространство размерности 46. Тогда по [2, лемма 6] имеем $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g))/112$, $\chi_4(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 4\alpha_4(g))/112 - 10$, $\chi_1(g) - 210$, $\chi_4(g) - 46$ делятся на p.

Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то $\alpha_4(g) = v$ и $p = 2$. Более того, порядок подгруппы K из G, индуцирующей тривиальные автоморфизмы антиподального частного $\bar{\Gamma}$, делит 4. Ввиду теоремы 3 порядок группы G делит $32 \cdot 3^\beta \cdot 49 \cdot 23$.

Лемма 7. *Если g индуцирует нетривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 0$, $p = 7$, $\alpha_1(g) = 196l$, $\alpha_2(g) = 784$, $\alpha_3(g) = 784 - 196l$, $l \in \{0, 1, 2\}$ или $p = 2$, $\alpha_1(g) = 56t$, $\alpha_2(g) = 224s$, $\alpha_3(g) = 1568 - 56t - 224s$;

(2) $\alpha_0(g) = 4$, $\alpha_4(g) = 0$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 184$, $\alpha_2(g) = 1104$ и $\alpha_3(g) = 276$;

(3) $p = 3$, $\alpha_0(g) = 4(m + n)$, $\alpha_1(g) = 84t - 12(m + n)$, $\alpha_2(g) = 4(392 - 84l - 4(m + n))$, $\alpha_3(g) = 336l + 24(m + n) - 84t$ и $\alpha_4(g) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 3 либо $p \in \{2, 7\}$ и Ω — пустой граф, либо $p = 23$ и $|\bar{\Omega}| = 1$, либо $p = 3$ и $|\bar{\Omega}| = m + n$.

Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, и ввиду леммы 4 имеем $\bar{\alpha}_1(g) = 196 = \bar{\alpha}_2(g)$. Поэтому $\alpha_2(g) = 784$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 784$, число $\chi_1(g) - 210 = (3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/112 - 210 = \alpha_1(g)/28 - 217$ делится на 7. Отсюда $\alpha_1(g) = 196l$, $\alpha_3(g) = 784 - 196l$, $l \in \{0, 1, 2\}$.

Если $p = 2$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 32 \cdot 49$ и число $\chi_4(g) - 46 = \alpha_2(g)/112 - 56$ четно. Поэтому $\alpha_2(g) = 224s$. Аналогично число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 392 + 56s)/28$ четно и $\alpha_1(g) = 56t$.

Пусть $\bar{\Omega} = \{\bar{a}\}$, $p = 23$ и $\bar{\alpha}_2(g) = 276$. Тогда $|\Omega| = 4$, $\alpha_2(g) = 1104$, $\chi_4(g) = (16 + 1104)/112 - 10 = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 460$, $\alpha_1(g) = 23 \cdot 4l$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 100)/28 = (23l - 25)/7$ и $l = 2$.

Если $p = 3$, то $\bar{\alpha}_2(g) = 392 - 84l - 4(m + n)$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 1568 - 4(m + n) - 4(392 - 84l - 4(m + n)) = 336l + 12(m + n)$, $\chi_4(g) = (392 - 84l)/28 - 10 = 4 - 3l$, число $\chi_1(g) = (12(m + n) + \alpha_1(g) - 84l)/28$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 84t - 12(m + n)$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2. До конца раздела будем предполагать, что неразрешимая группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$ и F — антиподальный класс, содержащий вершину a. Тогда $|G : G_{\{F\}}| = 392$ и $|G : G_a| = 1568$.

Так как $v = 32 \cdot 49$, то $S(G)$ является $\{2, 7\}$-группой. Если G — разрешимая группа, то Γ является графом Кэли $Cay(G, S)$ и $\alpha_1(g) = 1568$ для любого порождающего элемента $g \in S$, $\alpha_1(g) = 0$ для любого $g \notin S$. Пусть $|g| = 7$. Если $g \in S$, то получим противоречие с тем, что любая $\langle g \rangle$-орбита на множестве вершин графа Γ является 7-кликой. Значит, $g \notin S$ и $\alpha_1(g) = 0$. Теперь $\alpha_2(g) = \alpha_3(g) = 784$.

Пусть G — неразрешимая группа. Если 23 делит $|G|$, то по [8, теорема 1] число 11 делит $|G|$, противоречие. Если 23 не делит $|G|$, то по [8, теорема 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$ или $U_3(3)$. Ввиду утверждения (4) теоремы 3 группа $S(G)$ содержит элемент f порядка 7 и $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_{\{F\}}| = 56$, то $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 7$, группа $S(G)$ равна $Z_7 \times K$, $|K|$ делит 4 и коммутант группы G изоморфен $L_2(7)$, $SL_2(7)$, $L_2(8)$. Далее, $|G : G_a| = 1568$ и случай $SL_2(7)$ не возникает. □

3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $69^1, 13^{69}, -1^{276}, -15^{46}$ и $v = 1 + 69 + 276 + 46 = 392$. Порядок клики в Γ не больше $1 + 69/15$ и порядок коклики в Γ не больше $392 \cdot 5/28 = 70$.

Лемма 8. *Пусть χ_2 — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 276, χ_3 — характер проекции на подпространство размерности 46. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_2(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 4$, $\chi_3(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/28 - 10$ и $\chi_2(g) - 276$, $\chi_3(g) - 46$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 69 & 13 & -1 & -15 \\ 276 & -4 & -4 & 24 \\ 46 & -10 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (69\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_3(g))/98$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 392 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 4$.

Далее, $\chi_3(g) = (23\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g) - 5\alpha_3(g))/196$. Учитывая равенство $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 392 - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_3(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/28 - 10$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 1]. □

Лемма 9. *Выполняется одно из утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 7$, $\alpha_3(g) = 98s$, $\alpha_2(g) = 196t$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ и $\alpha_2(g) = 56t$*;

(2) *$|\Omega| = 1$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$ и $\alpha_3(g) = 46$*;

(3) *$|\Omega| = 21s + 14$, $p = 3$, $s = 0, 1, 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 84t$.*

Доказательство. Если Ω — пустой граф, то $p = 2, 7$. В случае $p = 7$ по лемме 8 число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ сравнимо с 3 по модулю 7, поэтому $\alpha_3(g) = 98s$, число $\chi_3(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ сравнимо с 4 по модулю 7 и $\alpha_2(g) = 196t$.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 28s$, число $\chi_3(g) = \alpha_2(g)/28$ четно и $\alpha_2(g) = 56t$.

Если Ω — непустой граф, то из теорем 2, 3 следует, что либо $|\Omega| = 1$ и $p = 23$, либо $p = 3$. В случае $p = 23$ получим $\alpha_3(g) = 46$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$, $\chi_2(g) = (10 + 46)/14 - 4 = 0$ и $\chi_3(g) = (4 + 276)/28 - 10$, противоречие.

В случае $p = 3$ получим $\alpha_3(g) = 0$, число $\chi_2(g) = 10\alpha_0(g)/14 - 4$ делится на 3, поэтому $5\alpha_0(g) = 7(15s+10)$ и $\alpha_0(g) = 21s+14$, $s = 0, 1, 2$. Далее, число $\chi_3(g) = (4(21s+14)+\alpha_2(g))/28 - 10$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $6s - 8 + \alpha_2(g)/28 = 3t' + 1$. Отсюда $\alpha_2(g) = 84t$. □

Из леммы 9 следует теорема 1.

Лемма 10. *Если f — элемент порядка 7 из G, g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, $p = 2$, если $|C_G(g)|$ делится на 49, то $\alpha_2(g) = 0, 392$ и $\alpha_3(g)$ делится на 196, а если $|C_G(f)|$ делится на 8, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 392$ или $\alpha_3(g) = 392$*;

(2) *Ω — непустой граф, $p = 3$ и $|C_G(f)|$ не делится на 9.*

Доказательство. Если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ и $\alpha_2(g) = 56t$. Если $|C_G(g)|$ делится на 49, то $\alpha_2(g) = 0, 392$ и $\alpha_3(g)$ делится на 196. Если $|C_G(f)|$ делится на 8, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 392$ или $\alpha_3(g) = 392$.

Если Ω — непустой граф, то $p = 3$ и по теореме 3 число $|C_G(f)|$ не делится на 9. $\square$

До конца раздела будем предполагать, что группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда $|G : G_a| = 392$.

Лемма 11. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) $S(G)$ *является* $\{2, 7\}$*-группой*;
(2) *если* G *— разрешимая группа, то* Γ *является графом Кэли*;
(3) *если* G *— неразрешимая группа, то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(7)$, $L_2(8)$.

Доказательство. Так как $v = 8 \cdot 49$, то $S(G)$ является $\{2, 7\}$-группой.

Если группа G разрешима, то Γ является графом Кэли $Cay(G, S)$, $\alpha_1(g) = 392$ для любого элемента $g \in S$, $\alpha_1(g) = 0$ для $g \notin S$.

Пусть g — элемент порядка 7 из G. Если $g \in S$, то получим противоречие с тем, что любая $\langle g \rangle$-орбита на множестве вершин графа Γ является 7-кликой. Значит, $g \notin S$, $\alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 392$, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ сравнимо с 3 по модулю 7, число $\chi_3(g) = (392 - \alpha_2(g))/28 - 10$ сравнимо с 4 по модулю 7. Отсюда $\alpha_2(g) = \alpha_3(g) = 196$.

Если группа G неразрешима, то по [8, теорема 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$ или $U_3(3)$. В любом случае $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ не делится на 49, поэтому $S(G)$ содержит элемент f порядка 7 и по лемме 11 $|C_G(f)|$ не делится на 9. Отсюда $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$.

Завершим доказательство следствия 1. Ввиду леммы 11 имеем $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 56$, то либо группа G равна $Z_7 \times L$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ и L_a — силовская 3-подгруппа из L, либо G содержит подгруппу индекса 2, изоморфную $Z_7 \times L_2(7)$ и $G/S(G) \cong PGL_2(7)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs // Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2 .
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Самойленко М.С.** Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ // Докл. РАН 2014. Т. 459, № 2. С. 149–153.
3. **Махнев А.А., Самойленко М.С.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (276,75,10,24) // Докл. РАН. 2014. Т. 457, № 5. С. 516–519.
4. **Махнев А.А., Пономарев Д.Н.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (392,115,18,40) // Докл. РАН. 2015. Т. 460, № 1. С. 18–21.
5. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2-3. P. 132–144.
6. **Cameron P.** Permutation Groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
7. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
8. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 27.02.2017

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Кабардино-Балкарский гос. университет, г. Нальчик,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: nirova_m@mail.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989, 495 p. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2 .
2. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Samoilenko M.S. Automorphisms of a graph with intersection array $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 692–696. doi: 10.1134/S1064562414060131 .
3. Makhnev A.A., Samoilenko M.S. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters (276,75,10,24). *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 485–488. doi: 10.1134/S1064562414050238 .
4. Makhnev A.A., Ponomarev, D.N. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters (392, 115, 18, 40). *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 1, pp. 12–15. doi: 10.1134/S1064562414070035 .
5. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.* 2011, vol. 311, iss. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
6. Cameron P. *Permutation Groups.* London, Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
7. Gavrilyuk A.L., Makhnev, A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
8. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sibirean Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12. ISSN 1813-3304 .

The paper was received by the Editorial Office on February 27, 2017.

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

Marina Sefovna Nirova, Cand. Phys.-Math. Sci, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: nirova_m@mail.ru .