ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.856

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОТРЕЗКОВ КРУГАМИ[1]

К. С. Кобылкин

В работе изучается вычислительная сложность и строятся точные полиномиальные алгоритмы для задачи оптимального пересечения заданного набора отрезков на плоскости минимальным числом одинаковых кругов радиуса $r > 0$, при этом отрезки задают множество ребер некоторого плоского графа $G = (V, E)$ и пересекаются не более чем в своих концевых точках. Близкие геометрические задачи возникают при анализе безопасности физических сетей. В работе сообщается NP-трудность задачи в сильном смысле для семейств отрезков, порождаемых триангуляциями Делоне, графами Габриеля и некоторыми другими их подграфами, часто возникающими в проектировании сетей, для $r \in [d_{\min}, \eta d_{\max}]$ и некоторой константы η, где $d_{\max}$ и $d_{\min}$ являются (евклидовыми) длинами наидлиннейшего и наикратчайшего ребер графа G.

Ключевые слова: вычислительная сложность, задача Hitting Set, задача Continuous Disk Cover, триангуляция Делоне.

K. S. Kobylkin. Computational complexity for the problem of optimal intersections of straight line segments by disks.

Computational complexity and exact polynomial algorithms are reported for the problem of stabbing a set of straight line segments with a least cardinality set of disks of fixed radii $r > 0$, where the set of segments forms a straight line drawing $G = (V, E)$ of a planar graph without edge crossings. Similar geometric problems arise in network security applications (Agarwal et al., 2013). We establish the strong NP-hardness of the problem for edge sets of Delaunay triangulations, Gabriel graphs, and other subgraphs (which are often used in network design) for $r \in [d_{\min}, \eta d_{\max}]$ and some constant η, where $d_{\max}$ and $d_{\min}$ are the Euclidean lengths of the longest and shortest graph edges, respectively.

Keywords: computational complexity, Hitting Set Problem, Continuous Disk Cover problem, Delaunay triangulations.

MSC: 90C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-171-181

Введение

Многочисленные приложения в области безопасности, оптимальном размещении сенсоров и робототехнике приводят к задачам вычислительной геометрии, в которых необходимо отыскать множество точек C минимальной мощности на плоскости с условием, что всякая точка из C обладает некоторой ограниченной “областью видимости”, при этом любая часть границы заданного геометрического объекта или всякая часть комплекса (т. е. множества ребер или граней) данного плоского графа пересекается с областью видимости хотя бы одной из точек множества C [5; 10]. Уточнение сложностного статуса для этих задач и проектирование для них полиномиальных приближенных алгоритмов до сих пор являются областью активных исследований. В данной работе изучается вычислительная сложность задачи оптимального пересечения семейства отрезков на плоскости одинаковыми кругами.

З а д а ч а Intersecting Plane Graph with Disks (IPGD): для заданных $r > 0$ и укладки $G = (V, E)$ простого (т. е. без петель и кратных ребер) планарного графа с прямолинейными ребрами, пересекающимися не более чем в своих концевых точках, найти наименьшее по мощности подмножество $C \subset \mathbb{R}^2$ точек (центров кругов) с условием, что всякое ребро $e \in E$

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

находится на расстоянии, не превосходящем r, от некоторой точки $c = c(e) \in C$; другими словами, круг радиуса r с центром в точке c пересекает ребро e.

В нашем изложении при обозначении сформулированной задачи оптимального пересечения отрезков будет использоваться аббревиатура IPGD, а для обозначения укладки графа — термин "плоский граф". Одним из приложений сложностного и алгоритмического исследования задачи IPGD является анализ безопасности физических сетей. Точнее, IPGD можно использовать в качестве математической модели для оценки отказоустойчивости физической сети к одновременно возникающим техническим нарушениям, вызванным природными (например, наводнения, пожары, электромагнитные воздействия) и человеческими факторами [1].

С геометрической точки зрения близкая к задаче IPGD постановка рассматривается в монографии [10]. В отличие от IPGD, где всякая точка множества C имеет круговую "область видимости", в этой монографии изучается задача Art Gallery Problem, в которой "область видимости" точек из C зависит от границы окружающих их геометрических объектов.

Пусть f и h — некоторые положительные функции натурального аргумента n. В работе используются стандартные обозначения: $f(n) = O(h(n))$, $f(n) = \Omega(h(n))$ и $f(n) = \Theta(h(n))$. Первое обозначение равносильно существованию такой константы $c > 0$, что для всех достаточно больших n выполнено неравенство $f(n) \leq ch(n)$; второе равносильно выполнению обратного неравенства между f и h; третье — существованию таких констант $c_1, c_2 > 0$, что $c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$ для всех достаточно больших n. Кроме того, символики O и Ω используются ниже для пар функций f и h от сложного аргумента (G, r), определяющего условие задачи IPGD, где $\mathcal{I}$ — некоторый класс ее условий. При этом соответствующие неравенства выполнены для всех $(G, r) \in \mathcal{I}$.

В настоящей работе изучаются вычислительная сложность задачи IPGD в классах простых плоских графов G при $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$, а также при $r = \Omega(d_{\max})$, где $d_{\max}$ и $d_{\min}$ обозначают евклидовы длины наидлиннейшего и наикратчайшего ребер G соответственно. При этом акцент делается на классах плоских графов, определяемых некоторой функцией расстояния, точнее, для триангуляций Делоне, графов Габриеля и некоторых их подграфов. Эти графы часто называют *метрическими графами.* Триангуляции Делоне допускают эффективные алгоритмы маршрутизации [4], представляя, таким образом, удобные сетевые топологии. Графы Габриеля возникают при моделировании беспроводных сетей [11].

Задача IPGD связана с несколькими хорошо известными задачами комбинаторной оптимизации. Во-первых, в случае, когда отрезки множества E имеют нулевую длину, становясь точками, задача IPGD превращается в задачу Continuous Disk Cover (CDC), NP-трудность которой в сильном смысле дана в [7]. Во-вторых, при $r = 0$ задача IPGD совпадает с классической задачей Vertex Cover о вершинном покрытии планарного графа. В-третьих, она является частным случаем задачи Hitting Set на плоскости.

З а д а ч а Hitting Set: для заданного семейства множеств $\mathcal{N}$ на плоскости и множества $U \subseteq \mathbb{R}^2$ найти множество $H \subseteq U$ минимальной мощности с условием, что $N \cap H \neq \varnothing$ для всякого $N \in \mathcal{N}$.

Задача IPGD совпадает с Hitting Set, если положить $\mathcal{N} := \mathcal{N}_r(E) = \{N_r(e)\}_{e \in E}$ и $U := \mathbb{R}^2$, где $N_r(e) = B_r(0) + e = \{x + y\colon x \in B_r(0),\ y \in e\}$ — евклидова r-окрестность ребра e, $B_r(z)$ — круг радиуса r с центром в точке $z \in \mathbb{R}^2$. *Соотношением размеров* выпуклого замкнутого ограниченного множества N с условием $\operatorname{int} N \neq \varnothing$ называется отношение минимального радиуса круга, содержащего множество N, к максимальному радиусу круга, содержащегося в N, где $\operatorname{int} N$ — множество внутренних точек множества N. Например, всякое множество $N_r(e)$, в дальнейшем называемое *объектом*, имеет соотношение размеров, равное $1 + \dfrac{d(e)}{2r}$, где $d(e)$ — евклидова длина ребра $e \in E$.

В работе [6] доказана APX-трудность дискретного варианта задачи Hitting Set (т. е. варианта, когда U совпадает с некоторым заданным конечным множеством точек) для семейств прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, имеющих, вообще говоря, неограниченное соотношение размеров. В [9] также сообщается APX-трудность дискретного варианта этой задачи для семейств треугольников, имеющих ограниченное константой соотношение размеров.

В данной работе сообщается NP-трудность и строятся точные полиномиальные алгоритмы для задачи IPGD в классах плоских (в том числе метрических) графов при различных предположениях на порядок значений r.

Обозначим через S множество из n точек в общем положении на плоскости, из которых никакие четыре не лежат на одной окружности. Будем называть плоский граф $G = (S, E)$ *триангуляцией Делоне* при условии $[u, v] \in E$ тогда и только тогда, когда существует такой круг T, что $u, v \in \operatorname{bd} T$ и $S \cap \operatorname{int} T = \varnothing$, где $\operatorname{bd} T$ — множество всех граничных точек T. Наконец, плоский граф $G = (S, E)$ называется *графом ближайших соседей*, если $[u, v] \in E$ в том и только в том случае, когда либо u, либо v являются ближайшими соседями v и u соответственно.

Первый результат данной работы (теорема 2) сообщает NP-трудность задачи IPGD в сильном смысле при условии, что граф G принадлежит либо классу триангуляций Делоне, либо какому-нибудь классу их связных подграфов (например, графов Габриеля или графов относительных окрестностей) для $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$ и $\mu = \dfrac{d_{\max}}{d_{\min}} = O(n)$, где $n = |S|$. Задача IPGD остается NP-трудной в сильном смысле в классе графов ближайших соседей (теорема 3) при $r \in [d_{\max}, \eta d_{\max}]$ для некоторой достаточно большой константы η и $\mu \leq 4$. Более того, эта задача остается NP-трудной при тех же ограничениях на r и μ даже в случае, когда точки множества C выбираются близко к вершинам графа G. Верхняя граница значений параметра μ для триангуляций Делоне сравнима с нижней границей $\mu = \Omega\left(\sqrt[3]{n^2}\right)$, выполненной с положительной вероятностью для случайных триангуляций Делоне, порожденных n равномерными независимыми точками на единичном круге [2]. Таким образом, заявленные ограничения на r и μ определяют естественные постановки задачи IPGD.

Ограничение сверху на параметр μ задает оценку сверху на отношение наибольшего и наименьшего соотношений размеров объектов семейства $\mathcal{N}_r(E)$. Задача Hitting Set, вообще говоря, является более простой в случае, когда множества из семейства $\mathcal{N}$ имеют ограниченное константой соотношение размеров. Полученный в работе результат (теорема 3) дает NP-трудность задачи IPGD в сильном смысле в классе графов ближайших соседей в случае, когда объекты соответствующего семейства $\mathcal{N}_r(E)$ имеют ограниченное константой приблизительно одинаковое между объектами этого семейства соотношение размеров.

В отличие от известных сложностных результатов для задачи Hitting Set, упомянутых выше, в данной работе в основном исследуется ее непрерывная постановка с определенным образом структурированным семейством объектов $\mathcal{N}_r(E)$, формируемым множеством ребер специальных плоских графов; всякое множество из $\mathcal{N}_r(E)$ имеет специальный вид суммы Минковского некоторого ребра плоского графа и круга радиуса r. Доказательство основных результатов работы требует применения нетривиальных техник и вспомогательных утверждений и использует задачу CDC, которая оказывается тесно связанной с задачей IPGD.

Пусть $R(E)$ — наименьший радиус круга, пересекающего все отрезки из множества E. В отличие от случаев, когда $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$ или $r \in [d_{\max}, \eta d_{\max}]$, задача IPGD оказывается полиномиально разрешимой (разд. 2) в классе простых плоских графов при условии равномерного по всем графам выполнения неравенства $r \geq \eta R(E)$ для некоторой константы η за время $O\left(k^2 |E|^{2k+1}\right)$, где $k = \left\lceil \dfrac{\sqrt{2}}{\eta} \right\rceil^2$. Это неравенство фактически задает оценку сверху k на оптимум задачи IPGD. Ввиду $W[1]$-трудности параметризованного варианта задачи CDC [8] и сведения, осуществленного в доказательстве теоремы 2 данной работы, кажется маловероятным, что эту оценку сложности полиномиального алгоритма удастся улучшить до $O(f(k)|E|^c)$ для любой вычислимой функции f и константы $c > 0$.

1. Вычислительная сложность задачи оптимального пересечения отрезков при $r = O(d_{\max})$

В настоящем разделе дается анализ вычислительной сложности задачи оптимального пересечения отрезков (IPGD) при условии $r = O(d_{\max})$. В этой ситуации задача IPGD, вообще говоря, не совпадает ни с известной задачей Vertex Cover о вершинном покрытии планарного графа, ни с задачей CDC об оптимальном покрытии множества точек одинаковыми кругами на плоскости. Фактически задача IPGD эквивалентна геометрической задаче Hitting Set для семейства $\mathcal{N}_r(E)$ евклидовых r-окрестностей ребер графа G. Ниже будет показана ее NP-трудность в случае, когда либо G — триангуляция Делоне, либо G принадлежит некоторому классу подграфов триангуляций Делоне при дополнительном ограничении сверху на $\mu = \frac{d_{\max}}{d_{\min}}$, которое, по сути, задает ограничение сверху на отношение наибольшего и наименьшего соотношений размеров объектов семейства $\mathcal{N}_r(E)$. Также показывается, что IPGD остается NP-трудной даже в простом варианте, когда $r = \Theta(d_{\max})$ и μ ограничено сверху некоторой малой константой, что эквивалентно случаю, когда объекты семейства $\mathcal{N}_r(E)$ имеют примерно одинаковое соотношение размеров, равномерно ограниченное сверху константой.

Первый сложностной результат для задачи IPGD получается путем сведения от NP-трудной задачи CDC оптимального покрытия одинаковыми кругами. При таком сведении выделяется некоторый подкласс задач IPGD на триангуляциях Делоне, в определенном смысле эквивалентных “трудным” задачам CDC. При этом составляющие этот подкласс “трудные” задачи IPGD характеризуются относительно небольшими значениями параметра μ.

1.1. NP-трудность задачи Continuous Disk Cover

Для того, чтобы выделить подкласс “трудных” задач CDC, в [7] используется сведение от NP-трудной в сильном смысле задачи о минимальном доминирующем множестве, которая формулируется следующим образом: для данного простого планарного графа $G_0 = (V_0, E_0)$ степени не выше 3 найти наименьшее по мощности подмножество $V_0' \subseteq V_0$ с условием, что для любой вершины $u \in V_0 \backslash V_0'$ найдется вершина $v = v(u) \in V_0'$, смежная с u.

Ниже под *целочисленной сеткой* понимается декартово произведение множеств всех целочисленных точек двух ограниченных интервалов на прямой, а под *ортогональной укладкой* графа G_0 на целочисленной сетке — такая укладка графа с вершинами, расположенными на сетке, что его ребра представляют собой кусочно-линейные ломаные, определяемые последовательностями отрезков, параллельных осям координат, имеющими вид $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$, $\ldots, [p_{k-1}, p_k]$ и пересекающимися лишь в своих концевых точках p_1 и p_k, причем всякая точка p_i также расположена на целочисленной сетке.

В работе [7] доказана NP-трудность задачи CDC в сильном смысле путем сведения к ней задачи о минимальном доминирующем множестве. Данное сведение использует ортогональную укладку графа G_0 на некоторой целочисленной сетке. Точнее, в процессе сведения строится множество D на этой сетке, где $V_0 \subset D$. Получающаяся в результате “трудная” задача CDC определена на множестве D для некоторого целого (константного) значения радиуса $r_0 \geq 1$. Заметим здесь, что G_0 допускает ортогональную укладку (см. [12, теорема 1]) на сетке размерности $O(|V_0|) \times O(|V_0|)$, причем общая длина всякого ребра имеет порядок $O(|V_0|)$. Доказательство NP-трудности задачи CDC может быть проведено аналогично с учетом этого замечания. Поэтому можно сформулировать следующую теорему [7, комбинация теорем 1 и 3].

Теорема 1 [7]. *Задача* CDC *является NP-трудной в сильном смысле для множеств D, расположенных на целочисленной сетке размерности $O(|D|) \times O(|D|)$, для константного целочисленного радиуса $r_0 \geq 1$. Задача остается NP-трудной, даже если ограничить выбор центров кругов радиуса r_0 в точках множества D.*

З а м е ч а н и е 1. Укладку всякого простого планарного графа G_0 степени, не превосходящей 3, можно провести таким образом (за полиномиальное время), что хотя бы одно из ребер укладки состоит по крайней мере из двух взаимно перпендикулярных отрезков.

1.2. *NP*-трудность задачи IPGD в классе триангуляций Делоне

Для построения сведения от задачи CDC на множестве D, определенном в предыдущем разделе, используется простое наблюдение: круг радиуса r содержит множество точек $D' \subset D$ тогда и только тогда, когда круг несколько большего радиуса содержит отрезки, каждый из которых расположен близко к некоторой точке из D' и имеет малую длину по сравнению с расстояниями между точками в множестве D. Далее строится метрический граф H с множеством вершин, совпадающим с множеством концевых точек отрезков малой длины, отвечающих точкам из множества D. Поскольку эти малые отрезки, как правило, будут ребрами графа H, данное построение дает труднорешаемость задачи IPGD для многих классов метрических графов. Справедлива следующая техническая лемма, дающая зависящую только от целочисленного радиуса r оценку снизу на расстояние от целочисленной точки до окружности радиуса r, проходящей через две другие целочисленные точки.

Лемма 1. *Пусть $X \subset \mathbb{Z}^2$, $r \geq 1$ — некоторое целое число, $\rho(u; v, w)$ — минимум из двух евклидовых расстояний от точки $u \in X$ до окружностей радиуса r, проходящих через различные точки v, w из X, где $|v-w|_2 \leq 2r$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $|\cdot|_2$ — евклидова норма. Тогда*

$$\min_{u \notin C(v,w),\, v \neq w,\, u,v,w \in X,\, |v-w|_2 \leq 2r} \rho(u; v, w) \geq \frac{1}{480 r^5},$$

где $C(v,w)$ — объединение двух окружностей радиуса r, проходящих через точки v и w.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u = (x, y)$, $v = (x_1, y_1)$ и $w = (x_2, y_2)$ — различные точки множества X. Рассмотрим произвольную окружность радиуса r среди двух возможно совпадающих окружностей, проходящих через v и w, и обозначим ее центр через O. Далее будет получена оценка снизу на расстояние $\pi = \pi(u; v, w)$ от этой окружности до точки $u \notin C(v, w)$.

Пусть $\Delta = |v-w|_2$, $\lambda = \sqrt{r^2 - \Delta^2/4}$, $a = (u - v, u - w)$ и $b = (u - v, (v - w)^{\perp})$, где $(v-w)^{\perp} = \pm(y_1 - y_2, -x_1 + x_2)$. Расстояние $\pi > 0$ может быть записано в виде

$$\pi = \pi(u; v, w) = \left| \left| \frac{v+w}{2} - \lambda \frac{(v-w)^{\perp}}{|v-w|_2} - u \right|_2 - r \right| = \left| \frac{a + 2\lambda b/\Delta}{\sqrt{a + 2\lambda b/\Delta + r^2} + r} \right|.$$

Без ограничения общности достаточно рассматривать случай, когда u лежит внутри круга радиуса $2r$ с центром в точке O. Действительно, в противном случае $\pi \geq r \geq 1/r$.

Ограничим знаменатель дроби π. Принимая во внимание, что $\Delta \leq 2r$, $|u-v|_2 \leq |u-O|_2 + |O-v|_2 \leq 3r$ и $|b|/\Delta \leq 3r$, имеем

$$\sqrt{a + 2\lambda b/\Delta + r^2} + r \leq 5r.$$

Так как точки из множества X имеют целочисленные координаты, то a и b — целые. При $\Delta^2 = 4r^2$ получаем $\pi \geq 1/(5r)$. Для $\Delta^2 \leq 4r^2 - 1$ достаточно показать, что выполнено неравенство

$$\left| a + \frac{2\lambda b}{\Delta} \right| \geq \frac{1}{96 r^4}. \tag{1.1}$$

Действительно, объединение этой оценки для числителя с полученной верхней оценкой для знаменателя дроби π дает требуемое неравенство $\pi \geq 1/(480 r^5)$.

Легко видеть, что для целого $\dfrac{2\lambda b}{\Delta}$ левая часть неравенства (1.1) не меньше 1. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\dfrac{2\lambda b}{\Delta} \notin \mathbb{Z}$. Пусть $q = \left\{ \left| \dfrac{2\lambda b}{\Delta} \right| \right\} > 0$ и $k = \left[\left| \dfrac{2\lambda b}{\Delta} \right| \right]$, где

$\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ — дробная и целая части вещественного числа соответственно. Как легко убедиться, для доказательства неравенства (1.1) достаточно оценить снизу величину $\min\{q, 1-q\}$.

Оценим снизу величину q. Сначала предположим, что $\gamma = \dfrac{4r^2b^2}{\Delta^2} \in \mathbb{Z}$. Имеем $k^2 < \dfrac{4\lambda^2b^2}{\Delta^2} < (k+1)^2$. Поскольку $q > 0$, получаем $q \geq \left\{\sqrt{k^2+1}\right\}$. Ввиду вогнутости функции квадратного корня можно записать

$$\left\{\sqrt{k^2+1}\right\} = \left\{\sqrt{\frac{2k\cdot k^2}{2k+1} + \frac{(k+1)^2}{2k+1}}\right\} \geq \left\{k + \frac{1}{2k+1}\right\} = \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{4\lambda|b|/\Delta+1} \geq \frac{1}{13r^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Имеем $2kq + q^2 \geq \{2kq+q^2\} = \{\gamma\}$, откуда

$$q \geq \sqrt{k^2+\{\gamma\}} - k \geq \frac{\{\gamma\}}{\sqrt{k^2+\{\gamma\}}+k} \geq \frac{1/\Delta^2}{4r|b|/\Delta} \geq \frac{1}{12r^2\Delta^2} \geq \frac{1}{48r^4}.$$

Далее оценим снизу $1-q$. Вновь предположим, что $\gamma \in \mathbb{Z}$. Рассуждая аналогично, приходим к неравенству

$$2k(1-q) + (1-q)^2 \geq \{(k+1-q)^2\} = \left\{(k+1)^2 - \frac{4\lambda^2b^2}{\Delta^2} - 2q(1-q)\right\} \geq 1/2.$$

Разрешая квадратное неравенство относительно $1-q$, имеем

$$1-q \geq \sqrt{k^2+1/2} - k = \frac{1/2}{\sqrt{k^2+1/2}+k} \geq \frac{1}{8r|b|/\Delta} \geq \frac{1}{24r^2}.$$

Пусть теперь $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим подслучай, когда $\{\gamma\} + 2q(1-q) > 1$. Получаем

$$\left\{(k+1)^2 - \frac{4\lambda^2b^2}{\Delta^2} - 2q(1-q)\right\} \geq 1 - \{\gamma\} \geq 1/\Delta^2.$$

Разрешая относительно $1-q$ соответствующее квадратное неравенство, выводим похожую оценку $1-q \geq 1/(48r^4)$.

Обратимся к подслучаю, когда $\{\gamma\} + 2q(1-q) < 1$. Очевидно,

$$\left\{(k+1)^2 - \frac{4\lambda^2b^2}{\Delta^2} - 2q(1-q)\right\} = 1 - \{\gamma\} - 2q(1-q).$$

При $1-q < 1/(4\Delta^2)$ имеем $1 - \{\gamma\} - 2q(1-q) \geq 1/\Delta^2 - 1/(2\Delta^2) = 1/(2\Delta^2)$. Рассуждая аналогично, приходим к оценке $1-q \geq 1/(96r^4)$; в противном случае $1-q \geq 1/(4\Delta^2) \geq 1/(16r^2)$.

При $\{\gamma\} + 2q(1-q) = 1$ имеем

$$1-q = \frac{1-\{\gamma\}}{2q} \geq \frac{1-\{\gamma\}}{2} \geq \frac{1}{2\Delta^2} \geq \frac{1}{8r^2}.$$

Объединяя оценки для q и $1-q$, полученные при рассмотрении различных случаев, приходим к оценке $\min\{q, 1-q\} \geq 1/(96r^4)$.

Лемма 1 доказана.

Сформулируем задачу IPGD с дополнительным ограничением.

Задача Vertex Restricted IPGD (VRIPGD(δ)): для данного простого плоского графа $G = (V, E)$, констант δ, $r > 0$ найти подмножество $C \subset \mathbb{R}^2$ минимальной мощности с условием, что для всякого отрезка $e \in E$ найдется точка $c = c(e) \in C$, находящаяся от него на евклидовом расстоянии, не превосходящем r, причем $C \subset \bigcup\limits_{v\in V} B_\delta(v)$.

Теорема 2. *Задачи* IPGD *и* VRIPGD(δ) *являются NP-трудными в сильном смысле для* $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$, $\mu = O(n)$ *и* $\delta = \Theta(r)$ *в классе триангуляций Делоне, где* n *— число вершин в триангуляции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, например, что задача IPGD является NP-трудной в сильном смысле. Доказательство NP-трудности задачи VRIPGD(δ) проводится аналогично с учетом теоремы 1 (см. также доказательство [7, теорема 3]).

Всякой "трудной" постановке задачи CDC, описанной в разд. 1.1, будет сопоставлена постановка задачи IPGD для $r = r_0 + \delta$, где $\delta = 1/(2000^2 2r_0^{11})$, следующим образом.

Для всякого $u \in D$ находятся точки u_0 и v_0 такие, что $|u-u_0|_\infty \le \delta/2$ и $|u-v_0|_\infty \le \delta/2$, где $I_u = [u_0, v_0]$ имеет евклидову длину не меньшую чем $\delta/2$ ($|\cdot|_\infty$ обозначает норму в $\mathbb{R}^2$, равную максимуму из модулей координат вектора). Точнее, положим $I_D := \{I_u = [u_0, v_0]\colon u \in D\}$. Концевые точки отрезков из I_D строятся последовательным образом с полиномиальными затратами времени и памяти, определяя новый отрезок I_u таким образом, чтобы обеспечить общность положения множества концевых точек отрезков из $I_{D'} \cup \{I_u\}$, $D' \subset D$, где отрезки множества $I_{D'}$ уже построены. Для этого концевые точки отрезка I_u выбираются на рациональной сетке, содержащей u, имеющей размер элементарной клетки $\frac{c_1}{|D|^2} \times \frac{c_1}{|D|^2}$ для некоторой малой рациональной константы $c_1 = c_1(\delta)$. В предположении, что $u = (u_x, u_y)$, точка u_0 выбирается в нижней части сетки с y-координатой, меньшей $u_y - \delta/4$, в то время как точка v_0 выбирается в верхней части сетки, где y-координата больше, чем $u_y + \delta/4$.

Пусть S — множество концевых точек отрезков из I_D. Всякий круг, имеющий отрезок I_u в качестве своего диаметра, не содержит точек из S, отличных от концевых точек отрезка I_u. Пусть $G = (S, E)$ — триангуляция Делоне множества S, которая может быть вычислена с полиномиальными затратами времени по $|D|$. Очевидно, любой отрезок I_u совпадает с некоторым ребром из E. С учетом теоремы 1 имеем $d_{\min} \le r$ и $\mu = O(|S|)$.

Остается показать, что $r \le d_{\max}$. Согласно замечанию 1 и по построению множества D (см. [7, рис. 1 и доказательство теоремы 1]) множество S может быть построено таким образом, чтобы для графа G было выполнено неравенство $r \le d_{\max}$. Кроме того, длина записи координат вершин из S полиномиальна по длине записи координат точек множества D.

Пусть k — заданное натуральное число. Очевидно, центры не более чем k кругов радиуса r_0, объединение которых содержит множество D, дают центры кругов радиуса $r > r_0$, чье объединение пересекается со всяким отрезком из E. Обратно, пусть T — круг радиуса r, пересекающий подмножество $I_{D'} = \{I_u\colon u \in D'\}$ отрезков для некоторого $D' \subseteq D$. При $|D'| = 1$ легко преобразовать T в круг радиуса r_0, содержащий точку подмножества D'. Точки множества D имеют целочисленные координаты. Более того, квадрат евклидова расстояния между всякой парой точек подмножества D' не превосходит $(2r_0+4\delta)^2 = 4r_0^2+16r_0\delta+16\delta^2$. Поскольку $r_0 \in \mathbb{Z}$, то точки из D' расположены на расстоянии, не превосходящем $2r_0$ друг от друга.

Воспользуемся теоремой Хелли. Пусть R — минимальный радиус круга (обозначим его через T_0), содержащего произвольную тройку точек u_1, u_2 и u_3 из D'. Без ограничения общности предположим, что u_1 и u_2 лежат на границе круга T_0, и обозначим его центр через O. Очевидно, $R \le r_0 + 2\delta$.

Покажем, что случай $R > r_0$ невозможен. Несколько сдвинем центр круга T_0 вдоль серединного перпендикуляра к $[u_1, u_2]$ так, чтобы точки u_1 и u_2 были расположены на расстоянии r_0 от сдвинутого центра O'. Расстояние от точки u_3 до окружности радиуса r_0 с центром в O' не превосходит величины

$$|O - u_3|_2 + |O - O'|_2 - r_0 \le 2\delta + \sqrt{(r_0+2\delta)^2 - \delta_1^2} - \sqrt{r_0^2 - \delta_1^2}$$

$$= 2\delta + \frac{4r_0\delta + 4\delta^2}{\sqrt{(r_0+2\delta)^2 - \delta_1^2} + \sqrt{r_0^2 - \delta_1^2}} \le 2\delta + 2\sqrt{r_0\delta + \delta^2} < \frac{1}{480 r_0^5},$$

где $\delta_1 = \dfrac{|u_1 - u_2|_2}{2} \le r_0$. По лемме 1 имеем $R \le r_0$. Таким образом, множество D' содержится в некотором круге радиуса r_0. Круг минимального радиуса, содержащий заданное конечное множество точек на плоскости, может быть найден с полиномиальными затратами времени и памяти по числу точек. Поэтому всякое множество из не более чем k кругов радиуса r, чье объединение пересекается со всяким отрезком в E, может быть преобразовано в множество из не более чем k кругов радиуса r_0, объединение которых содержит множество D.

Теорема 2 доказана.

1.3. *NP*-трудность задачи IPGD для других классов метрических графов

Аналогичная техника доказательства может быть применена для обоснования NP-трудности задачи для других классов метрических графов. Дадим несколько определений, сохраняя обозначения предыдущего подраздела.

Следующие графы являются связными подграфами триангуляций Делоне.

Плоский граф $G = (S, E)$ называется *графом Габриеля* при условии, что $[u, v] \in E$ тогда и только тогда, когда круг, для которого отрезок $[u, v]$ является его диаметром, не содержит точек множества S, отличных от u и v.

Графом относительных окрестностей называется плоский граф G с тем же множеством вершин, у которого $[u, v] \in E$ тогда и только тогда, когда не существует никакого $w \in S$ с условием, что $w \neq u, v$ и $\max\{|u - w|_2, |v - w|_2\} < |u - v|_2$.

Плоский граф называется *минимальным евклидовым остовным деревом*, если этот граф совпадает с остовным деревом минимального веса для полного взвешенного графа $K_{|S|}$, вершины которого находятся в точках множества S, а веса ребер задаются евклидовыми расстояниями между их концевыми точками.

Теорема 3. *Задачи* IPGD *и* VRIPGD(δ) *являются NP-трудными в сильном смысле при* $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$, $\mu = O(n)$ *и* $\delta = \Theta(r)$ *в классах графов Габриеля, графов относительных окрестностей и минимальных евклидовых остовных деревьев, а также при* $r \in [d_{\max}, \eta d_{\max}]$ *и* $\mu \leq 4$ *в классе графов ближайших соседей, где* η *— некоторая большая константа.*

Доказательство. Воспользуемся сведением, данным в доказательстве теоремы 2. Во-первых, заметим, что и граф Габриеля, и граф относительных окрестностей на множестве вершин S содержат в качестве своих ребер отрезки семейства I_D, откуда следует NP-трудность задачи IPGD в этих классах графов для тех же порядков значений параметров r и μ, что и для триангуляций Делоне.

Во-вторых, семейство I_D совпадает с множеством ребер графа ближайших соседей на множестве вершин S. По построению радиус r и длины отрезков семейства I_D не превосходят некоторой константы, причем длины последних лежат в диапазоне между $\delta/2$ и 2δ. Следовательно, $r = \Theta(d_{\max})$ и $\mu \leq 4$.

В-третьих, отрезки из I_D образуют подмножество ребер всякого минимального евклидового остовного дерева на множестве S.

Пусть, от противного, существует такое остовное дерево H, которое не содержит ребра I_u, но включает ребра, инцидентные обеим концевым точкам u_0 и v_0 отрезка I_u для некоторого $u \in D$. Удалим ребро $e = [u_0, w_0]$ из H и добавим в него ребро I_u, где w_0 — родитель u_0 в H и либо u_0 и v_0 лежат в разных поддеревьях, либо v_0 является предком u_0. Очевидно, полученное дерево будет иметь меньший вес. Получили противоречие со свойством минимальности веса дерева H.

Теорема 3 доказана.

2. Полиномиальная разрешимость задачи IPGD для больших *r*

В данном разделе будет обоснована полиномиальная разрешимость задачи оптимального пересечения отрезков в случае, когда $r = \Omega(R(E))$, где $R(E)$ — наименьший радиус круга, пересекающего все отрезки из E; этот радиус может быть найден за линейное время [3]. Для доказательства этого факта производится предварительное преобразование постановки задачи

IPGD с полиномиальными затратами времени и памяти к некоторой дискретной постановке, в которой точки множества C (т. е. центры кругов радиуса r) выбираются в некотором конечном подмножестве точек, мощность которого ограничена сверху некоторым полиномом от $|E|$.

2.1. Предварительное преобразование постановки задачи

Для того чтобы ограничить выбор центров кругов радиуса r некоторым дискретным множеством, определяемым семейством $\mathcal{N}_r(E)$ евклидовых r-окрестностей ребер графа G, воспользуемся следующим наблюдением. Легко заметить, что границы этих окрестностей составлены из четырех частей: пары полуокружностей и пары параллельных отрезков. Тогда непустое пересечение любого подмножества, включающего не менее двух различных объектов из $\mathcal{N}_r(E)$, содержит хотя бы одну точку на пересечении границ некоторой пары объектов из $\mathcal{N}_r(E)$. Следующая лемма, которую можно отнести к фольклору, использует это наблюдение для того, чтобы ограничить выбор центров кругов некоторым конечным множеством точек на плоскости. Ее доказательство приводится ниже для полноты изложения.

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — простой плоский граф. Всякое допустимое решение C задачи* IPGD *на графе G может быть с полиномиальными затратами времени и памяти (по $|E|$) преобразовано в некоторое допустимое решение $D \subset D_r(G)$ задачи на том же графе с условием, что $|D| \leq |C|$, где $D_r(G) \subset \mathbb{R}^2$ — некоторое подмножество мощности порядка $O(|E|^2)$.*

Доказательство. Опишем построение множества $D_r(G)$. Без ограничения общности можно считать, что для всякого множества $N_1 \in \mathcal{N}_r(E)$ найдется такое множество $N_2 \in \mathcal{N}_r(E)$, что $N_1 \cap N_2 \neq \varnothing$. В противном случае в множество $D_r(G)$ добавляется по концевой точке всякого $e \in E$, для которого соответствующий объект $N_r(e)$ не пересекается ни с каким другим объектом из $\mathcal{N}_r(E)$. Последнее может быть сделано с полиномиальными затратами времени и памяти по $|E|$.

Рассмотрим произвольную максимальную по включению подсистему объектов из $\mathcal{N}_r(E)$, имеющую непустое пересечение. Такая подсистема в дальнейшем будет называться *максимальной совместной подсистемой* (МСП). Обозначим через M множество точек на пересечении всех объектов произвольной МСП. Множество M выпукло и компактно. Кроме того, M имеет границу, составленную из кусков границ объектов из $\mathcal{N}_r(E)$. По предположению M содержится в пересечении по крайней мере двух объектов из $\mathcal{N}_r(E)$.

Сначала рассмотрим вырожденный случай, когда ребра e_1 и e_2 из множества E параллельны и соответствующие им r-окрестности пересекаются по некоторому отрезку. В этом случае $|\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)| = \infty$. Кроме того, это пересечение может содержать бесконечное число точек при условии, что ребра e_1 и e_2 пересекаются в их общей концевой точке. В обоих случаях пересечение $\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)$, являясь криволинейным отрезком, имеет не более двух концевых точек.

В остальных (невырожденных) случаях получаем, что $|\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)|$ ограничено сверху константой, принимая во внимание тот факт, что всякое множество $\operatorname{bd} N_r(e)$, $e \in E$, является объединением пары параллельных отрезков и пары полуокружностей. Положим

$$D_r(G) = \bigcup_{e_1, e_2 \in E,\, e_1 \neq e_2} \operatorname{extr}\left(\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)\right),$$

где $\operatorname{extr} N = N$ в невырожденном случае; для вырожденных случаев $\operatorname{extr} N$ обозначает множество концевых точек криволинейного отрезка N. Множество M содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую $D_r(G)$. Кроме того, $|D_r(G)| = O(|E|^2)$.

Пусть теперь C — произвольное допустимое решение задачи IPGD. Для всякого $c \in C$ перебором всех пар множеств из $\mathcal{N}_r(E)$, содержащих c, может быть найдена точка $d(c) \in D_r(G)$

такая, что $\{N \in \mathcal{N}_r(E)\colon c \in N\} \subseteq \{N \in \mathcal{N}_r(E)\colon d(c) \in N\}$. Таким образом, в общем случае мультимножество $D = \{d(c)\colon c \in C\}$ является допустимым решением задачи IPGD и $|D| \le |C|$.

Лемма 2 доказана.

2.2. Полиномиальная разрешимость задачи IPGD для больших r

В отличие от случаев, когда $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$ или $r = \Theta(d_{\max})$, задача IPGD оказывается полиномиально разрешимой при $r = \Omega(R(E))$. Эта задача разрешима за время $O(|E|)$ [3] в классе плоских графов, внутри которого равномерно по всем графам выполнено неравенство $r \ge R(E)$. Ниже задача IPGD рассматривается в классе плоских графов, для которого равномерно по всем графам имеет место неравенство $r \ge \eta R(E)$ для некоторого фиксированного $0 < \eta < 1$. Поскольку любой круг радиуса r содержит квадрат со сторонами, параллельными осям координат и имеющими длину $r\sqrt{2}$, то для пересечения всех отрезков из множества E необходимо не более чем $\left\lceil \frac{\sqrt{2}R(E)}{r} \right\rceil^2 \le \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{\eta} \right\rceil^2$ кругов радиуса r. Таким образом, применяя переборный алгоритм, который последовательно проверяет все подмножества в $D_r(G)$, имеющие мощность, не превосходящую $k = k(\eta) = \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{\eta} \right\rceil^2$, на возможность быть решением задачи, получаем с учетом леммы 2 оптимальное решение задачи IPGD за время $O\left(k^2|E|^{2k+1}\right)$. Заметим, что сложность этого алгоритма зависит экспоненциально от $1/\eta$.

В работе изучается вычислительная сложность задачи оптимального пересечения структурированного набора отрезков на плоскости минимальным числом кругов одинакового радиуса r, где структурная информация о системе отрезков задается множеством ребер некоторого (возможно метрического) графа. Показано, что задача является NP-трудной в сильном смысле в классе триангуляций Делоне и некоторых их подграфов для не слишком больших значений r, в то время как для больших значений r задача оказывается полиномиально разрешимой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The resilience of WDM networks to probabilistic geographical failures / P. K. Agarwal, A. Efrat, S. K. Ganjugunte, D. Hay, S. Sankararaman, G. Zussman // IEEE/ACM Trans. on Networking. 2013. Vol. 21, no. 5. P. 1525–1538. doi: 10.1109/TNET.2012.2232111 .
2. Probabilistic bounds on the length of a longest edge in Delaunay graphs of random points in d dimensions / E. M. Arkin, A. F. Anta, J. S. Mitchell, M. A. Mosteiro // Comput. Geom. 2015. Vol. 48, no. 2. P. 134–146. doi: 10.1016/j.comgeo.2014.08.008 .
3. Optimal algorithms for some intersection radius problems / B. K. Bhattacharya, S. Jadhav, A. Mukhopadhyay, J. M. Robert // Computing. 1994. Vol. 52, no. 3. P. 269–279. doi: 10.1007/BF02246508 .
4. Competitive online routing on Delaunay triangulations / P. Bose, J. L. Carufel, S. Durocher, P. Taslakian // Algorithm theory — SWAT 2014: Proc. Cham: Springer, 2014. P. 98–109 (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 8503). doi: 10.1007/978-3-319-08404-6_9 .
5. **Bose P., Kirkpatrick D. G., Li Z.** Worst-case-optimal algorithms for guarding planar graphs and polyhedral surfaces // Comput. Geom. 2003. Vol. 26, no. 3. P. 209–219. doi: 10.1016/S0925-7721(03)00027-0 .
6. **Chan T. M., Grant E.** Exact algorithms and APX-hardness results for geometric packing and covering problems // Comput. Geom. 2014. Vol. 47, no. 2. P. 112–124. doi: 10.1016/j.comgeo.2012.04.001 .
7. **Hasegawa T., Masuyama S., Ibaraki T.** Computational complexity of the m-center problems on the plane // Trans. of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan. Section E. 1981. Vol. E64, no. 2. P. 57–64.
8. **Marx D.** Efficient approximation schemes for geometric problems? // Algorithms — ESA 2005: Proc. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. P. 448–459 (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 3669). doi: 10.1007/11561071_41 .

9. **Quanrud K., Har-Peled S.** Approximation algorithms for polynomial-expansion and low-density graphs // Algorithms — ESA 2015: Proc. Berlin; Heidelberg: Springer, 2015. P. 717–728 (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 9294). doi: 10.1007/978-3-662-48350-3_60 .
10. **O'Rourke J.** Art gallery theorems and algorithms. Oxford: Oxford University Press, 1987. 282 p.
11. Routing with guaranteed delivery in ad hoc wireless networks / I. Stojmenovic, J. Urrutia, P. Bose, P. Morin // Wireless Networks. 2001. Vol. 7, no. 6. P. 609–616.
12. **Tamassia R., Tollis I. G.** Planar grid embedding in linear time // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1989. Vol. 36. P. 1230–1234. doi: 10.1109/31.34669 .

Кобылкин Константин Сергеевич
Поступила 19.05.2017
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: kobylkinks@gmail.com

REFERENCES

1. Agarwal P. K., Efrat A., Ganjugunte S. K., D. Hay D., Sankararaman S., Zussman G. The resilience of WDM networks to probabilistic geographical failures. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 2013, vol. 21, no. 5, pp. 1525–1538. doi: 10.1109/TNET.2012.2232111 .
2. Arkin E. M., Anta A. F., Mitchell J.S., Mosteiro M. A. Probabilistic bounds on the length of a longest edge in Delaunay graphs of random points in d dimensions. *Comput. Geom.*, 2015, vol. 48, no. 2, pp. 134–146. doi: 10.1016/j.comgeo.2014.08.008 .
3. Bhattacharya B.K., Jadhav S., Mukhopadhyay A., Robert J.M. Optimal algorithms for some intersection radius problems. *Computing*, 1994, vol. 52, no. 3, pp. 269–279. doi: 10.1007/BF02246508 .
4. Bose P., Carufel J.L., Durocher S., Taslakian P. Competitive online routing on Delaunay triangulations. In: Ravi R., Gørtz I.L. (eds) *Algorithm Theory – SWAT* 2014: Proc., Cham, Springer, 2014, Ser. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 8503, pp. 98–109. doi: 10.1007/978-3-319-08404-6_9 .
5. Bose P., Kirkpatrick D.G., Li Z. Worst-case-optimal algorithms for guarding planar graphs and polyhedral surfaces. *Comput. Geom.*, 2003, vol. 26, no. 3, pp. 209–219. doi: 10.1016/S0925-7721(03)00027-0 .
6. Chan T.M., Grant E. Exact algorithms and APX-hardness results for geometric packing and covering problems. *Comput. Geom.*, 2014, vol. 47, no. 2, pp. 112–124. doi: 10.1016/j.comgeo.2012.04.001 .
7. Hasegawa T., Masuyama S., Ibaraki T. Computational complexity of the m-center problems on the plane. *Trans. of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan. Section E.*, 1981, vol. E64, no. 2, pp. 57–64.
8. Marx D. Efficient approximation schemes for geometric problems? In: Brodal G.S., Leonardi S. (eds) *Algorithms — ESA* 2005. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005, Ser. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 3669, pp. 448–459. doi: 10.1007/11561071_41 .
9. Quanrud K., Har-Peled S. Approximation algorithms for polynomial-expansion and low-density graphs. *Algorithms — ESA* 2015: Proc. Berlin; Heidelberg: Springer, 2015, Ser. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 9294, pp. 717–728. doi: 10.1007/978-3-662-48350-3_60 .
10. O'Rourke J. *Art gallery theorems and algorithms.* Oxford: Oxford University Press, 1987. 282 p. ISBN: 0-19-503965-3 .
11. Stojmenovic I., Urrutia J., Bose P., Morin P. Routing with guaranteed delivery in ad hoc wireless networks. *Wireless Networks*, 2001, vol. 7, no. 6, pp. 609–616. doi: 10.1023/A:1012319418150 .
12. Tamassia R., Tollis I.G. Planar grid embedding in linear time. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1989, vol. 36, pp. 1230–1234. doi: 10.1109/31.34669 .

The paper was received by the Editorial Office on May 19, 2017.

Konstantin Sergeevich Kobylkin, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Ural branch of Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: kobylkinks@gmail.com .