ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.856

ВЫБОРОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ[1]

С. В. Иванов, А. И. Кибзун

Рассматривается двухэтапная задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием. В данной задаче стратегия первого этапа является детерминированной, а стратегия второго этапа выбирается по факту реализации случайных параметров задачи. Исследованы свойства задачи, доказана теорема о существовании ее решения, и построена для нее выборочная аппроксимация. Выборочная аппроксимация сведена к смешанной целочисленной задаче линейного программирования. Доказана теорема об их эквивалентности. Предложена процедура поиска оптимального решения аппроксимирующей задачи. Приведена теорема о сходимости дискретных аппроксимаций по значению критериальной функции и по стратегии оптимизации. Также рассмотрены случаи, не учитываемые в данной теореме.

Ключевые слова: стохастическое программирование, квантильный критерий, выборочная аппроксимация, смешанное целочисленное линейное программирование.

S. V. Ivanov, A. I. Kibzun. Sample average approximation in the two-stage stochastic linear programming problem with quantile criterion.

The two-stage problem of stochastic linear programming with quantile criterion is considered. In this problem, the first stage strategy is deterministic and the second stage strategy is chosen when a realization of the random parameters is known. The properties of the problem are studied, a theorem on the existence of its solution is proved, and a sample average approximation of the problem is constructed. The sample average approximation is reduced to a mixed integer linear programming problem, and a theorem on their equivalence is proved. A procedure for finding an optimal solution of the approximation problem is suggested. A theorem on the convergence of discrete approximations with respect to the value of the objective function and to the optimization strategy is given. We also consider some cases not covered in the theorem.

Keywords: stochastic programming, quantile criterion, sample average approximation, mixed integer linear programming.

MSC: 90C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-134-143

Введение

Двухэтапные задачи стохастического программирования [1] моделируют ситуацию, когда лицо, принимающее решение, выбирает стратегию оптимизации дважды. Сначала выбирается предварительная детерминированная стратегия оптимизации (стратегия первого этапа). Затем по факту реализации случайных параметров задачи корректируется стратегия первого этапа посредством так называемой стратегии второго этапа. Стратегия второго этапа определяется через решение задачи минимизации функции потерь второго этапа, а лицо, осуществляющее выбор, учитывает на первом этапе минимальное значение функции потерь второго этапа как функцию стратегии первого этапа и реализации случайных параметров.

Поскольку минимальное значение функции потерь второго этапа является случайным, то могут быть рассмотрены задачи оптимизации различных функционалов данной случайной величины. Традиционно в стохастическом программировании исследовались двухэтапные задачи с критерием в форме математического ожидания, в том числе и в случае, когда задача

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-07-00203А).

второго этапа является линейной (см., например, [1]). Двухэтапная задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием впервые была сформулирована в [2]. В этой работе для непрерывного распределения случайных параметров были предложены методы решения задачи, обеспечивающие лишь верхнюю оценку оптимального значения критериальной функции. В предлагаемой работе рассматривается задача линейного стохастического программирования с квантильным критерием в более общей форме, чем в [2], где только вектор, задающий правые части ограничений задачи второго этапа, являлся случайным.

На практике часто распределение случайных параметров неизвестно, а доступна только выборка реализаций случайной величины. Используя выборку, можно построить оценку критериального функционала задачи стохастического программирования, тем самым заменив исходную задачу ее выборочной аппроксимацией. При этом саму построенную аппроксимацию исходной задачи стохастического программирования можно считать задачей стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров.

В последние годы развилась методология решения задач стохастического программирования с квантильным критерием для случая дискретных случайных параметров [3], которая позволяет сводить их к задачам смешанного целочисленного программирования. Однако для применения данного метода необходимо выполнение ряда условий, что в линейном случае не всегда имеет место. В данной работе приводится смешанная целочисленная задача линейного программирования, эквивалентная построенной аппроксимации. При этом показано, что всегда можно обеспечить выполнение условий эквивалентности данных задач, а также предложена процедура, позволяющая находить точное решение аппроксимирующей задачи.

Условия сходимости дискретных аппроксимаций для одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания предложены в [4], для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями — в [5]. Для некоторых частных случаев одноэтапных задач стохастического программирования с квантильным и вероятностным критериями соответствующие условия описаны в [6]. В данной работе получены условия сходимости выборочных аппроксимаций двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

1. Постановка задачи

Пусть задано полное вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое замкнутое множество. Условие полноты означает, что сигма-алгебра $\mathcal{F}$ содержит все подмножества любого множества вероятностной меры нуль. Пусть $X \triangleq (X_1, X_2, \ldots, X_m)^\top$ — случайный вектор, определенный на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Для простоты изложения будем считать, что для всех $x \in \mathcal{X}$ выполнено $X(x) = x$. Таким образом, через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^\top$ будем обозначать реализации случайного вектора X.

Для описания двухэтапной задачи стохастического линейного программирования введем следующие матрицы и векторы:

$$A(x) \triangleq A^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i A^i, \qquad B(x) \triangleq B^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i B^i,$$
$$q(x) \triangleq q^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i q^i, \qquad b(x) \triangleq b^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i b^i,$$

где $A^i \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $B^i \in \mathbb{R}^{r\times l}$, $q^i \in \mathbb{R}^l$, $b^i \in \mathbb{R}^r$ — детерминированные матрицы и векторы, $i = \overline{0, m}$.

Задача второго этапа решается при известных оптимизационной стратегии первого этапа $u \in \mathbb{R}^s$ и реализации случайных факторов $x \in \mathcal{X}$. Будем считать, что множество U допустимых стратегий первого этапа является компактом в $\mathbb{R}^s$. Пусть множество допустимых стратегий y задачи второго этапа определено как

$$Y(u, x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^l \colon A(x)u + B(x)y \geqslant b(x),\ y \geqslant 0\},$$

т. е. имеет линейную структуру относительно стратегий первого и второго этапов. Здесь и ниже векторные неравенства понимаются поэлементно.

Согласно принятой в теории двухэтапных задач терминологии матрица $A(x)$ называется *технологической*, а матрица $B(x)$ — *матрицей рекурсии*. Задача второго этапа формулируется как

$$\Phi(u,x) \triangleq \begin{cases} \inf\limits_{y\in Y(u,x)} q^\top(x)y, & \text{если } Y(u,x)\neq\varnothing; \\ +\infty, & \text{если } Y(u,x)=\varnothing, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $q^\top(x)y$ характеризует потери на втором этапе. В том случае, когда оптимальное значение целевой функции второго этапа не ограничено снизу, полагаем по определению $\Phi(u,x)=-\infty$.

Определим функцию вероятности $P_\varphi(\cdot)\colon U\to[0,1]$ по правилу

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X)\leqslant\varphi\}, \tag{1.2}$$

где $\varphi\in\mathbb{R}^1$ — некоторый фиксированный уровень минимального значения функции потерь второго этапа.

Функция квантили $\varphi_\alpha(\cdot)\colon U\to[-\infty,+\infty]$ определяется как минимальный уровень функции потерь второго этапа, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью $\alpha\in(0,1)$. Если для всех $\varphi\in\mathbb{R}^1$ выполнено $P_\varphi(u)<\alpha$, то по определению полагаем $\varphi_\alpha(u)=+\infty$. В противном случае значение функции квантили задается по правилу

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \inf\{\varphi\in\mathbb{R}^1\colon P_\varphi(u)\geqslant\alpha\}.$$

Заметим, что если для всех $\varphi\in\mathbb{R}^1$ выполнено $P_\varphi(u)\geqslant\alpha$, то $\varphi_\alpha(u)=-\infty$.

Двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием формулируется в виде

$$\begin{aligned} \psi^* &\triangleq \inf_{u\in U}\{c^\top u+\varphi_\alpha(u)\}, \\ U^* &\triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U}\{c^\top u+\varphi_\alpha(u)\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $c\in\mathbb{R}^s$ — вектор коэффициентов целевой функции первого этапа, а $c^\top u$ характеризует потери на первом этапе.

2. Свойства задачи

Рассмотрим вначале задачу второго этапа (1.1). В [1, Section 2.1.3] показано, что функция $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом [7]. Обозначим через $\mathcal{B}(U)$ борелевскую сигма-алгебру подмножеств U. В случае полной сигма-алгебры $\mathcal{F}$ определение нормального интегранта можно сформулировать следующим образом [7, Corollary 14.34].

О п р е д е л е н и е. Функция $\Psi(\cdot)\colon U\times\mathcal{X}\to[-\infty,+\infty]$ называется *нормальным интегрантом*, если она является $\mathcal{B}(U)\times\mathcal{F}$-измеримой и при каждом фиксированном значении $x\in\mathcal{X}$ функция $u\mapsto\Phi(u,x)$ полунепрерыва снизу.

Измеримость функции $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ обеспечивает корректность определения функции вероятности (1.2).

Докажем, что вероятность $\mathbf{P}\{\Phi(u,X)=-\infty\}$ не зависит от выбранной стратегии первого этапа.

Утверждение 1. *Пусть для некоторых $\bar u\in U$ и $x\in\mathcal{X}$ выполнено $\Phi(\bar u,x)=-\infty$. Тогда для всех $u\in U$ выполнено $\Phi(u,x)=-\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $\Phi(u,x)=-\infty$ тогда и только тогда, когда множество

$$Y(u,x)\cap\{y\in\mathbb{R}^l\colon q^\top(x)y\leqslant a\} \tag{2.1}$$

не ограничено для всех $a \in \mathbb{R}^1$. Как показано в [8, теорема 1.3], многогранник, задаваемый системой линейных неравенств, является ограниченным тогда и только тогда, когда его конус рецессивных направлений состоит только из нулевого вектора. Конус рецессивных направлений множества (2.1) имеет вид

$$\{y \in \mathbb{R}^l\colon B(x)y \geqslant 0,\ q^\top(x)y \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Вид данного множества не зависит ни от u, ни от a. Отсюда следует, что если при некотором $\bar{u} \in U$ и $a \in \mathbb{R}^1$ конус рецессивных направлений содержит ненулевой вектор, то он будет иметь ненулевой вектор и при всех $u \in U$ и $a \in \mathbb{R}^1$. Из данного свойства непосредственно следует доказываемое утверждение.

Таким образом, при фиксированной реализации случайных параметров $x \in \mathcal{X}$ для всех $u \in U$ либо $\Phi(u,x) > -\infty$, либо $\Phi(u,x) = -\infty$. Поэтому можно ввести следующее обозначение:

$$\underline{\alpha} \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) = -\infty\} = \mathbf{P}\big\{\{y \in \mathbb{R}^l\colon B(X)y \geqslant 0,\ q^\top(X)y \leqslant 0,\ y \geqslant 0\} \neq \{\bar{0}\}\big\},$$

где $\bar{0}$ — нулевой вектор. Согласно утверждению 1 величина $\underline{\alpha}$ не зависит от u.

Особенно отметим часто рассматриваемый случай двухэтапной задачи, когда матрица рекурсии $B(x)$ и вектор $q(x)$ коэффициентов целевой функции задачи второго этапа являются постоянными. При данных предположениях либо $\Phi(\cdot) \equiv -\infty$, либо, при всех $u \in U$, $x \in \mathcal{X}$, выполнено $\Phi(u,x) > -\infty$.

Сформулируем теорему о существовании решения поставленной задачи (1.3).

Теорема 1. *Пусть U является непустым компактом, тогда для любого $\alpha \in (0,1)$ решение задачи* (1.3) *существует, т. е. $U^* \neq \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [9, теорема 2.2] доказано, что при условии полунепрерывности снизу функции $u \mapsto \Phi(u,x)$ функция квантили $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ является полунепрерывной снизу. В [9] доказательство проведено в случае, когда функция $\Phi(\cdot)$ принимает только конечные значения, но анализ доказательства показывает, что оно переносится и на случай, когда допустимы бесконечные значения функции $\Phi(\cdot)$. Из полунепрывности снизу функции квантили и компактности множества допустимых стратегий по теореме Вейерштрасса следует существование решения задачи (1.3).

3. Выборочная аппроксимация задачи

3.1. Построение выборочной аппроксимации

Пусть $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых одинаково распределеннных случайных величин, имеющих то же распределение, что и случайная величина X. Будем считать, что случайная последовательность $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$. В качестве пространства элементарных событий Ω может быть рассмотрено множество $\mathcal{X}^\infty$ реализаций случайной последовательности. Ниже под сходимостью *почти наверное* (п. н.) будем понимать сходимость для почти всех реализаций случайной последовательности $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ относительно вероятностной меры $\mathbf{P}'$.

Для построения выборочной аппроксимации задачи минимизации функции квантили (1.3) заменим функцию вероятности ее выборочной оценкой, которой является частота события $\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\}$:

$$P_\varphi^{(n)}(u) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u,x) - \varphi),$$

где

$$\chi_A(x) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

С помощью данной оценки построим выборочную оценку функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ в виде

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \inf\{\varphi\colon P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}.$$

Теперь запишем аппроксимацию исходной задачи минимизации функции квантили (1.3) в форме

$$\begin{aligned} &\psi_n \triangleq \inf\nolimits_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N},\\ &U_n \triangleq \operatorname{Arg\,min}\nolimits_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

При фиксированной реализации последовательности $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и заданном $n \in \mathbb{N}$ задача (3.1) может быть рассмотрена как задача стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров. Для построения данной задачи рассмотрим некоторую реализацию выборки $\{X^{(k)}\}_{k=1}^n$ объема n в виде $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Без ограничения общности предположим, что уникальные значения данных реализаций $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ приходятся на первые $\tilde{n}$ элементов. Введем случайную величину $\xi^{(n)}$. Будем считать, что $\xi^{(n)}$ имеет $\tilde{n} \leqslant n$ реализаций $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\tilde{n})}$. Вероятности данных реализаций будем определять как

$$\mathbf{P}\{\xi = x^{(k)}\} \triangleq p_k \triangleq m_k/n, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$

где m_k — количество элементов реализации выборки $\{x^{(k)}\}_{k=1}^n$, совпадающих с $x^{(k)}$. Тогда задачу (3.1) можно записать в форме двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием:

$$U_n = \operatorname{Arg}\min_{u\in U}\bigl\{c^\top u + \inf\{\varphi\colon \mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}\bigr\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По теореме 1 решение данной задачи, а значит и задачи (3.1), существует, т. е. $U_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Эквивалентная смешанная целочисленная задача

Метод сведения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием в общем случае описан в [3], однако для его применения необходимо выполнение ряда предположений, которые в линейном случае могут не подтверждаться. В частности, требуется достижимость оптимального решения задачи второго этапа, что в случае $\Phi(u, x) = -\infty$ не выполнено. Предложим способ сведения задачи (3.1) к задаче смешанного целочисленного программирования, который может быть реализован только в предположении, что $\psi_n > -\infty$.

Пусть известна константа γ_1 такая, что

$$\gamma_1 \geqslant \max_{u\in U}\max\{0, c^\top u - \psi_n\}.$$

Пусть также для каждого $x \in \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\tilde{n})}\}$ известна константа $\gamma_2(x)$ такая, что

$$\gamma_2(x) \geqslant \max_{u\in U}\|b(x) - A(x)u\|_\infty,$$

где через $\|\cdot\|_\infty$ обозначена ∞-норма вектора, т. е. максимальное абсолютное значение его координат. В силу компактности и непустоты множества U значения γ_1 и $\gamma_2(x)$ всегда конечны.

Рассмотрим задачу смешанного целочисленного линейного программирования

$$c^\top u + \varphi \to \inf_{u\in U,\, \varphi\in(-\infty,+\infty],\, y^{(1)},\ldots,y^{(\tilde{n})}\in\mathbb{R}^l,\, \delta\in\{0,1\}^{\tilde{n}}} \tag{3.2}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} q^\top\bigl(x^{(k)}\bigr)y^{(k)} - \gamma_1(1-\delta_k) \leqslant \varphi, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},\\ A\bigl(x^{(k)}\bigr)u + B\bigl(x^{(k)}\bigr)y^{(k)} \geqslant b\bigl(x^{(k)}\bigr) - \gamma_2\bigl(x^{(k)}\bigr)(1-\delta_k)e_r, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},\\ y^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, \tilde{n}}, \quad \sum_{k=1}^{\tilde{n}} p_k\delta_k \geqslant \alpha, \end{gathered}$$

где e_r — вектор из r единиц. В задаче (3.2) для каждой реализации случайных параметров $x^{(k)}$ вводятся переменная $y^{(k)}$, соответствующая стратегии второго этапа, и бинарная переменная δ_k, которая равна единице, если оптимальное значение стратегии второго этапа не больше оптимального значения функции квантили, и нулю — в противном случае.

Сформулируем теорему об эквивалентности задач (3.1) и (3.2).

Теорема 2. *Пусть $\psi_n > -\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ — оптимальное решение задачи* (3.2), *то $u^* \in U_n$*;

2) *если $\bar{u} \in U_n$, то существует оптимальное решение $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ задачи* (3.2), *такое что $\bar{u} = u^*$.*

Доказательство. Пусть $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ — оптимальное решение задачи (3.2). Тогда для всех $x^{(k)}$ таких, что $\delta_k = 1$, выполнено

$$q^\top\big(x^{(k)}\big)y_*^{(k)} \leqslant \varphi^*, \quad k = \overline{1, \tilde{n}};$$
$$A\big(x^{(k)}\big)u^* + B\big(x^{(k)}\big)y_*^{(k)} \geqslant b\big(x^{(k)}\big), \quad k = \overline{1, \tilde{n}}; \quad y_*^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$

а значит, $\Phi(u^*, x^{(k)}) \leqslant \varphi^*$ для набора реализаций случайных параметров $x^{(k)}$ с суммарной вероятностью больше α. Поэтому

$$\psi_n = \min_{u \in U}\big\{c^\top u + \inf\{\varphi\colon \mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}\big\} \leqslant c^\top u^* + \varphi^*. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $\bar{u} \in U_n$. Построим решение $(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(\tilde{n})}, \bar{\delta})$, являющееся допустимым в задаче (3.2). Пусть $\bar{\varphi} = \inf\{\varphi\colon \mathbf{P}\{\Phi(\bar{u}, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}$. В силу предположения $\psi_n > -\infty$ выполнено $\bar{\varphi} > -\infty$. Определим значения $\bar{\delta}_k$ по правилу

$$\bar{\delta}_k \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi(\bar{u}, x^{(k)}) \leqslant \bar{\varphi}, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Значение вектора $\delta = \bar{\delta}$ является допустимым в задаче (3.2). Если $\bar{\delta}_k = 1$ и $|\Phi(\bar{u}, x^{(k)})| < +\infty$, то выберем

$$\bar{y}^{(k)} \in \operatorname{Arg} \min_{y \in Y(\bar{u}, x^{(k)})} \{q^\top(x^{(k)})y\}.$$

Если $\Phi(\bar{u}, x^{(k)}) = -\infty$, то выберем $\bar{y}^{(k)}$ так, чтобы

$$q^\top\big(x^{(k)}\big)\bar{y}^{(k)} \leqslant \bar{\varphi}, \quad k = \overline{1, \tilde{n}};$$
$$A\big(x^{(k)}\big)\bar{u} + B\big(x^{(k)}\big)\bar{y}^{(k)} \geqslant b\big(x^{(k)}\big), \quad k = \overline{1, \tilde{n}}; \quad \bar{y}^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$

что будет гарантировать допустимость $y^{(k)} = \bar{y}^{(k)}$ в задаче (3.2). Если $\bar{\delta}_k = 0$ или $\Phi(\bar{u}, x^{(k)}) = +\infty$, то установим $\bar{y}^{(k)} = 0$. По определению констант γ_1 и $\gamma_2(x^{(k)})$ решение $\bar{y}^{(k)} = 0$ будет являться допустимым в рассматриваемом случае. Таким образом, по оптимальному решению задачи (3.1) построено допустимое решение задачи (3.2), при котором

$$\psi_n = c^\top \bar{u} + \bar{\varphi}. \tag{3.4}$$

Из соотношения (3.3) следует, что для оптимального решения задачи (3.2) выполнено $\psi_n \leqslant c^\top u^* + \varphi^*$. Согласно (3.4) для построенного решения задачи (3.2) вместо неравенства выполнено равенство, поэтому $(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(\tilde{n})}, \bar{\delta})$ является оптимальным в задаче (3.2), что доказывает второе утверждение теоремы. Из оптимальности решения $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ и достижимости равенства в (3.3) следует, что $\psi_n = c^\top \bar{u} + \bar{\varphi} = c^\top u^* + \varphi^*$; это гарантирует $u^* \in U_n$. Таким образом, оба утверждения теоремы доказаны.

Для применения теоремы 2 необходимо проверить, что $\psi_n \neq -\infty$. Согласно утверждению 1 $\mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) = -\infty\}$ не зависит от u. Таким образом, $\psi_n = -\infty$ тогда и только тогда, когда при некотором $u \in U$ выполнено $\mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) = -\infty\} \geqslant \alpha$. Отсюда следует, что для проверки равенства $\psi_n = -\infty$ достаточно вычислить значение функции квантили только для одного значения u.

При $\psi_n > -\infty$ справедливо утверждение

$$\max_{u\in U} \max\{0, c^\top u - \psi_n\} \leqslant \big|\max_{u\in U} c^\top u - \min_{u\in U} \min_{k\in\Delta}\{c^\top u + \Phi(u, x^{(k)})\}\big|,$$

где Δ — набор индексов k таких, что $\Phi(u, x^{(k)}) > -\infty$. Поэтому константу γ_1 можно определить по формуле

$$\gamma_1 = \big|\max_{u\in U} c^\top u - \min_{u\in U} \min_{k\in\Delta}\{c^\top u + \Phi(u, x^{(k)})\}\big|. \tag{3.5}$$

Заметим, что вычисление данной константы в случае полиэдрального множества U сводится к решению конечного числа задач линейного программирования.

Таким образом, задача (3.1) может быть решена следующим образом. Сначала необходимо проверить выполнение равенства $\psi_n = -\infty$. Если оно имеет место, то $U_n = U$. Если данное равенство не обеспечено, то необходимо вычислить константу γ_1 согласно (3.5) и константы $\gamma_2(x^{(k)})$, а затем найти решение задачи (3.2), которое даст решение задачи (3.1).

4. Сходимость выборочных аппроксимаций двухэтапной задачи

Основной трудностью доказательства сходимости дискретных аппроксимаций двухэтапной задачи является установление сходимости по стратегии второго этапа. Данная сходимость исследовалась в работе [10] для двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания. Однако стратегия второго этапа в двухэтапной задаче является вспомогательной, а для формулировки задачи достаточно рассмотреть минимальное значение функции потерь второго этапа, при этом саму двухэтапную задачу формулировать в том виде, в каком она представлена в данной работе. Поэтому теорему о сходимости решений задачи (3.1) к решению исходной задачи (1.3) можно сформулировать только относительно стратегии первого этапа.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *множество U компактно и непусто*;
2) $\underline{\alpha} < \alpha < 1$;
3) *если $\psi^* < +\infty$, то для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$ такая, что*

$$|\psi^* - \tilde{\psi}| \leqslant \varepsilon, \quad P_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) > \alpha. \tag{4.1}$$

Тогда $\psi_n \to \psi^*$ (п. н.) при $n \to \infty$ и любая предельная точка $\bar{u}$ последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, в которой $u_n \in U_n$ для всех $n \in N$, оптимальна в задаче (1.3) *п. н.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие 2) доказываемой теоремы гарантирует в силу утверждения 1 выполнение неравенства $\psi^* > -\infty$. Покажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \psi_n \leqslant \psi^* \quad \text{(п.н.)}. \tag{4.2}$$

Согласно условию 3) при $\psi^* < +\infty$ для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$ такая, что справедливо (4.1). Из закона больших чисел следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) = P_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) > \alpha \quad \text{(п.н.)}.$$

Таким образом, при достаточно больших n выполнено утверждение

$$\psi_n \leqslant c^\top u + \varphi^{(n)}_\alpha(\tilde{u}) \leqslant c^\top u + \tilde{\psi} - c^\top \tilde{u} = \tilde{\psi} \leqslant \psi^* + \varepsilon \quad \text{(п.н.)}.$$

Поскольку величина $\varepsilon > 0$ произвольна, неравенство (4.2) выполнено при $|\psi^*| < +\infty$. В случае $\psi^* = +\infty$ неравенство (4.2) имеет место, ибо его правая часть бесконечна. Таким образом, неравенство (4.2) доказано.

Теперь докажем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \psi_n \geqslant \psi^* \quad \text{(п.н.)}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим последовательность $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Обозначим нижний предел данной последовательности через $\bar{\psi} \triangleq \varliminf_{n\to\infty} \psi_n$. Покажем, что $\bar{\psi} > -\infty$. Рассмотрим случайную величину $\eta \triangleq \min_{u\in U} \Phi(u,X)$. В силу утверждения 1, полунепрерывности функции $u \mapsto \Phi(u,x)$, компактности множества U выполнено $\mathbf{P}\{\eta = -\infty\} = \underline{\alpha}$. Поэтому при $\alpha > \underline{\alpha}$ выборочные оценки $\eta_\alpha^{(n)}$ квантили уровня α распределения случайной величины η при достаточно большом n ограничены снизу некоторой константой C. Таким образом, $C \leqslant \eta_\alpha^{(n)} \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(u)$. С учетом компактности множества U также справедливо утверждение $C' \triangleq \min_{u\in U} c^\top u + C \leqslant \psi_n$, откуда следует, что $\bar{\psi} > -\infty$.

Пусть $\{u_n\}_{n\in K}$ — некоторая сходящаяся к $\bar{u}$ подпоследовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bar{\psi} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} \psi_n$, где K — множество номеров элементов сходящейся подпоследовательности. В силу компактности множества U данная подпоследовательность существует.

Заметим, что функцию вероятности (1.2) можно представить в виде $P_\varphi(u) = -\mathbf{M}[f(u,\varphi,X)]$, где $f(u,\varphi,x) \triangleq -\chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u,x) - \varphi)$. В связи с тем, что функция $\Phi(\cdot)$ является нормальным интегрантом, функция $((u,\varphi),x) \mapsto f(u,\varphi,x)$ также является нормальным интегрантом. Согласно [4, Theorem 2.3] при конечном значении $\bar{\psi}$

$$\begin{aligned}\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} P^{(n)}_{\psi_n - c^\top u_n}(u_n) &= -\varliminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_n, \psi_n - c^\top u_n, X_k)\\ &\leqslant -\mathbf{M}[f(\bar{u}, \bar{\psi} - c^\top \bar{u}, X)] = P_{\bar{\psi} - c^\top \bar{u}}(\bar{u}).\end{aligned} \tag{4.4}$$

При $\bar{\psi} = +\infty$ данное неравенство также выполнено, потому что правая часть неравенства равна 1.

Поскольку $P^{(n)}_{\psi_n - c^\top u_n}(u_n) \geqslant \alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$, из (4.4) следует выполнение соотношения $P_{\bar{\psi} - c^\top \bar{u}}(\bar{u}) \geqslant \alpha$, откуда имеем, что

$$\bar{\psi} = \varliminf_{n\to\infty} \psi_n = \varliminf_{n\to\infty} \big(c^\top u_n + (\psi_n - c^\top u_n)\big) = \big(c^\top \bar{u} + (\bar{\psi} - c^\top \bar{u})\big) \geqslant \psi^* \quad \text{(п. н.)};$$

это и доказывает неравенство (4.3).

Из неравенств (4.2) и (4.3) следует выполнение равенства

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi^* \quad \text{(п. н.)}. \tag{4.5}$$

Теперь докажем, что для любой предельной точки последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выполнено $\bar{u} \in U^*$ (п. н.). В силу (4.5) соотношение (4.4) справедливо для любой сходящейся к $\bar{u}$ подпоследовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. С учетом этого, выполнено неравенство $P_{\bar{\psi} - c^\top \bar{u}}(\bar{u}) \geqslant \alpha$, которое обеспечивает $c^\top \bar{u} + \varphi_\alpha(\bar{u}) \leqslant \bar{\psi}$. С другой стороны, $c^\top \bar{u} + \varphi_\alpha(\bar{u}) \geqslant \psi^* = \bar{\psi}$. Таким образом, стратегия $\bar{u}$ оптимальна в исходной задаче, а значит, теорема 3 доказана.

Заметим, что теорема 3 гарантирует сходимость выборочных аппроксимаций как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации.

Условие 3) теоремы 3 будет выполнено, например, в том случае, когда функция вероятности $P_\varphi(\cdot)$ является строго монотонной по $\varphi \in \mathbb{R}^1$.

Рассмотрим случай $\psi^* = -\infty$, не учитываемый в данной теореме. Заметим, что указанное равенство имеет место в том и только том случае, когда $\underline{\alpha} \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) = -\infty\} \geqslant \alpha$. Согласно утверждению 1 величина $\underline{\alpha}$ не зависит от u, поэтому при $\alpha < \underline{\alpha}$ решение аппроксимирующей задачи (3.1) будет п. н. давать решение $\psi_n = -\infty$ при всех n, начиная с некоторого достаточно большого номера.

Заключение

В работе построена выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием, для которой предложена процедура поиска точного решения, основанная на сведении задачи к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. При этом учтены случаи, когда оптимальное значение критериальной функции данной задачи является бесконечным. Доказана теорема о сходимости выборочных аппроксимаций к решению исходной задачи как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации. Также рассмотрены случаи бесконечного оптимального значения критериальной функции исходной задачи.

Предложенная методология может быть в дальнейшем расширена на более широкий класс двухэтапных задач с различными критериальными функционалами, с различной нелинейной структурой целевых функций. Также представляется интересным исследование сходимости выборочных аппроксимаций многоэтапных задач стохастического программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.** Lectures on stochastic programming: Modeling and theory. MPS/SIAM Series on Optimization. 9. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009. 436 p.
2. **Кибзун А. И., Наумов А. В.** Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. № 1. С. 83–93.
3. **Норкин В. И., Кибзун А. И., Наумов А. В.** Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50, № 5. С. 34–48.
4. **Artstein Z., Wets R.J.-B.** Consistency of minimizers and the SLLN for stochastic programs // J. Convex Anal. 1996. Vol. 2, iss. 1/2. P. 1–17.
5. **Pagnoncelli B. K., Ahmed S., Shapiro A.** Sample average approximation method for chance constrained programming: Theory and Applications // J. Optim. Theory Appl. 2009. Vol. 142. P. 399–416. doi: 10.1007/s10957-009-9523-6 .
6. Kibzun A.I., Ivanov S.V. Convergence of discrete approximations of stochastic programming problems with probabilistic criteria. Proc. 9th Internat. Conf. DOOR 2016 (Vladivostok, 2016), eds. Kochetov, Yu. et all., Ser. Theoretical Computer Science and General Issues, vol. 9869, pp. 525–537, Heidelberg: Springer, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2 .
7. **Rockafellar R. T., Wets R.J.-B.** Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 736 p. doi: 10.1007/978-3-642-02431-3 .
8. **Еремин И.И.** Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Академия, 2007. 256 с.
9. **Кибзун А. И., Кан Ю. С.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М: Физматлит, 2009. 372 с.
10. **Lepp R.** Approximate solution of stochastic programming problems with recourse // Kybernetika. 1987. Vol. 23, iss. 6. P. 476–482.

Иванов Сергей Валерьевич
Поступила 19.05.2017
канд. физ.-мат. наук, доцент
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
e-mail: sergeyivanov89@mail.ru

Кибзун Андрей Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
заведующий кафедрой теории вероятностей
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
e-mail: kibzun@mail.ru

REFERENCES

1. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on stochastic programming: Modeling and theory.* MPS/SIAM Series on Optimization. 9. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009, 436 p. ISBN: 9780898716870 .
2. Kibzun A.I., Naumov A.V. A two-stage quantile linear programming problem. *Autom. Remote Control*, 1995, vol. 56, iss. 1, pp. 68–76.
3. Norkin V.I., Kibzun A.I., Naumov A.V. Reducing two-stage probabilistic optimization problems with discrete distribution of random data to mixed-integer programming problems. *Cybern. Syst. Anal.*, 2014, vol. 50, pp. 679–692. doi: 10.1007/s10559-014-9658-9 .
4. Artstein Z., Wets R.J.-B. Consistency of minimizers and the SLLN for stochastic programs. *J. Convex Anal.*, 1996, vol. 2, iss. 1/2, pp. 1–17.
5. Pagnoncelli B.K., Ahmed S., Shapiro A. Sample average approximation method for chance constrained programming: Theory and applications. *J. Optim. Theory Appl.*, 2009, vol. 142, pp. 399–416. doi: 10.1007/s10957-009-9523-6 .
6. Kibzun A.I., Ivanov S.V. Convergence of discrete approximations of stochastic programming problems with probabilistic criteria. Proc. 9th Internat. Conf. DOOR 2016 (Vladivostok, 2016), eds. Kochetov, Yu. et all., Ser. Theoretical Computer Science and General Issues, vol. 9869, pp. 525–537, Heidelberg: Springer, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2 .
7. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. *Variational analysis.* Berlin: Springer, 2009, 736 p. doi: 10.1007/978-3-642-02431-3 .
8. Eremin I.I. *Lineinaya optimizatsiya i sistemy lineinykh neravenstv* [Linear optimization and systems of linear inequalities]. Moscow, Akademiya Publ., 2007, 256 p. ISBN: 978-5-7695-2963-4 .
9. Kan Yu. S., Kibzun A.I. *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami* [Problems in stochastic programming with probabilistic criteria]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 372 p. ISBN: 978-5-9221-1148-5/hbk .
10. Lepp R. Approximate solution of stochastic programming problems with recourse. *Kybernetika*, 1987, vol. 23, iss. 6, pp. 476–482.

The paper was received by the Editorial Office on May 19, 2017.

Sergei Valer'evich Ivanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia, e-mail: sergeyivanov89@mail.ru .

Andrei Ivanovich Kibzun, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Head of a department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia, e-mail: kibzun@mail.ru .