ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518.45

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ СУММ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

В. П. Заставный, А. С. Левадная

В работе рассматривается следующая задача: найти достаточные условия на последовательности $\{\gamma(r)\}$, $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$, чтобы для любой последовательности $\{b_k\}$, удовлетворяющей условию $\sum_{k=r}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|\le\gamma(r)$, $b_k\to 0$, сходился интеграл $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$, где $p>0$, $q\in[1-p;1)$, $U(x):=\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j}^{v_j}b_k\sin kx\Big|$. В такой постановке для $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, задача была рассмотрена и решена С. А. Теляковским. Для случая, когда $p\ge 1$, $q=0$, $v_j=n_{j+1}-1$, а последовательность $\{b_k\}$ является монотонной, А. С. Белов получил критерий принадлежности функции $U(x)$ пространству L_p. В теореме 1 данной работы получены достаточные условия сходимости указанного выше интеграла, которые при $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, совпадают с достаточными условиями С. А. Теляковского. В случае $\gamma(r)=O(1/r)$ условия С. А. Теляковского могут не выполняться, а применение теоремы 1 позволяет гарантировать сходимость интеграла. Соответствующие примеры приведены в последнем параграфе работы. Вопрос о необходимых условиях сходимости интеграла $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$, где $p>0$, $q\in[1-p;1)$, остается открытым.

Ключевые слова: тригонометрический ряд, суммы модулей блоков, степенной вес.

V. P. Zastavnyi, A. S. Levadnaya. Power wight integrability for sums of moduli of blocks from trigonometric series.

The following problem is studied: find conditions on sequences $\{\gamma(r)\}$, $\{n_j\}$, and $\{v_j\}$ under which, for any sequence $\{b_k\}$ such that $\sum_{k=r}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|\le\gamma(r)$, $b_k\to 0$, the integral $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$ is convergent, where $p>0$, $q\in[1-p;1)$, and $U(x):=\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j}^{v_j}b_k\sin kx\Big|$. In the case $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, this problem was studied and solved by S. A. Telyakovskii. In the case where $p\ge 1$, $q=0$, $v_j=n_{j+1}-1$, and the sequence $\{b_k\}$ is monotone, A. S. Belov obtained a criterion for the belonging of the function $U(x)$ to the space L_p. In Theorem 1 of the present paper, we give sufficient conditions for the convergence of the above integral, which for $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, coincide with Telyakovskii's sufficient conditions. In the case $\gamma(r)=O(1/r)$, Telyakovskii's conditions may be violated, but the application of Theorem 1 guarantees the convergence of the integral. The corresponding examples are given in the last section of the paper. The question on necessary conditions for the convergence of the integral $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$, where $p>0$ and $q\in[1-p;1)$, remains open.

Keywords: trigonometric series, sums of moduli of blocks, power weight.

MSC: 42A32

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-125-133

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $\gamma(r)$, $r\in\mathbb{N}$, — фиксированная, убывающая к нулю положительная числовая последовательность, т. е.

$$0<\gamma(r+1)\le\gamma(r)\quad\forall r\in\mathbb{N},\qquad \lim_{r\to\infty}\gamma(r)=0. \tag{1.1}$$

Эта последовательность определяет класс числовых последовательностей $\{b_k\}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty}b_k=0;\qquad \sum_{k=r}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|\le\gamma(r)\quad\text{при всех}\quad r\in\mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Условию (1.2) удовлетворяет, например, последовательность $b_k:=\gamma(k)$, $k\in\mathbb{N}$.

Пусть последовательность $\{b_k\}$ удовлетворяет условию (1.2), а $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$ — две последовательности натуральных чисел, удовлетворяющих условию $n_j < n_{j+1}$, $n_j \le v_j$, $j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$U(x) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x), \quad u_j(x) := \Big| \sum_{k=n_j}^{v_j} b_k \sin kx \Big|, \tag{1.3}$$

В данной работе изучается следующая задача об интегрируемости функции $U(x)$ со степенным весом: *найти достаточные условия на последовательности* $\{\gamma(r)\}$, $\{n_j\}$ *и* $\{v_j\}$, *чтобы для любой последовательности* $\{b_k\}$, *удовлетворяющей условию* (1.2), *сходился интеграл*

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx, \quad \text{где} \;\; p > 0, \quad q \in [1-p;1). \tag{1.4}$$

В такой постановке для $\gamma(r) = B/r$, $B > 0$, задача была рассмотрена и решена в статье С. А. Теляковского [12, теоремы 4, 5] (для $p \in \mathbb{N}$ и $b_k = 1/k$ см. также [11]). В этой же статье приведена подробная история подобных задач (с соответствующими ссылками). Задачу об ограниченности $U(x)$ для случая $\gamma(r) = B/r$, $B > 0$, $v_j = n_{j+1} - 1$, исследовал Л. Лейндлер [6]. Отметим следующие работы, которые касаются случая $p \ge 1$ и $q = 0$:

1) В 2006 г. А. С. Белов исследовал случай, когда $v_j = n_{j+1} - 1$, а последовательность $\{b_k\}$ является монотонной. В его работе [1, теорема 4] доказано, что принадлежность функции $U(x)$ пространству L_p, $p > 1$, эквивалентна сходимости двух рядов. Отметим, что проверка сходимости (расходимости) одного из этих рядов затруднительна. В [1, теорема 3] получен простой критерий, когда $U(x) \in L_1$. В 2012 г. А. С. Белов [2, теоремы 3,4] получил аналогичные критерии, когда при любом натуральном j последовательность $\{b_k\}$ убывает при $k \in [n_j, v_j]$.

2) В некоторых работах вместо условия (1.2) рассматривался случай, когда числа b_k являются коэффициентами Фурье функции ограниченной вариации. Для этого случая получены как критерии, так и отдельно достаточные и отдельно необходимые условия принадлежности функции $U(x)$ пространству L_p, $1 \le p \le +\infty$ (см. [3; 4; 7–10; 13]).

Основные результаты данной работы содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $s_j := v_j - n_j + 1$ *и выполнены условия* (1.1), (1.2). *Тогда интеграл* (1.4) *сходится, если выполняется одно из условий* (1.5)–(1.7) *или* (1.8):

$$p \ge 1, \quad 1-p < q < 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j)\ s_j^{(p+q-1)/p} < +\infty, \tag{1.5}$$

$$p \ge 1, \qquad q = 1-p, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j) \ln^{1/p}(s_j + 1) < +\infty, \tag{1.6}$$

$$0 < p < 1, \quad 1-p < q < 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^p(n_j)\ s_j^{p+q-1} < +\infty, \tag{1.7}$$

$$0 < p < 1, \qquad q = 1-p, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^p(n_j) \ln(s_j + 1) < +\infty. \tag{1.8}$$

Если дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$, *то утверждение теоремы останется в силе, если в условиях* (1.5)–(1.7) *и* (1.8) *величину* s_j *заменить на* $m_j := \min\{v_j - n_j + 1; 1/\gamma(n_j)\}$.

З а м е ч а н и е 1. Если выполнено условие (1.2), то очевидно выполняется неравенство

$$|b_r| = \Big| \sum_{k=r}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \Big| \le \sum_{k=r}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \le \gamma(r), \quad r \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Если $v_j < n_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, и сходится ряд $\sum_{r=1}^{\infty} \gamma(r)$, то ряд (1.3) сходится равномерно на $\mathbb{R}$, а функция $U(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и, значит, интеграл (1.4) сходится при любых $p > 0$ и $q < 1$. Поэтому при выполнении условия $v_j < n_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, теорема 1 содержательна лишь в случае расходимости ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \gamma(r)$.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы С. А. Теляковского [12, теоремы 4, 5] являются частным случаем теоремы 1 при $\gamma(r) = B/r$, $B > 0$. При $\gamma(r) \neq O(1/r)$ теоремы С. А. Теляковского не применимы, а применение теоремы 1 иногда позволяет гарантировать сходимость интеграла (1.4). Даже при $\gamma(r) = O(1/r)$ теоремы С. А. Теляковского могут не гарантировать сходимость интеграла (1.4), а применение теоремы 1 позволяет гарантировать сходимость данного интеграла. Соответствующие примеры приведены в последнем разделе, когда $\gamma(r) = 1/(r^{\mu} \ln^{\delta}(r+2))$, $0 < \mu \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$.

Отметим, что доказательство теоремы 1 проведено по той же схеме, что и доказательство теорем из [12, теоремы 4, 5; 4, теорема 5].

2. Вспомогательные утверждения

Выпишем несколько известных простых соотношений и неравенств:

$$\sigma_k(x) := \sum_{j=0}^{k} \sin jx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\Big(k + \dfrac{1}{2}\Big)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$
$$|\sigma_k(x)| \leq \frac{\pi}{x}, \quad 0 < x \leq \pi. \tag{2.1}$$

При любых $n, v \in \mathbb{N}$, $n \leq v$, справедливо равенство

$$S_{n,v}(x) := \sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx = b_v \sigma_v(x) + \sum_{k=n}^{v-1} (b_k - b_{k+1}) \sigma_k(x) - b_n \sigma_{n-1}(x). \tag{2.2}$$

Если выполнены условия (1.1), (1.2), то из (2.1) и (2.2) вытекает, что при любом $x \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$R_n(x) := \sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

а для его суммы и частных сумм при $n \leq v$, $0 < x \leq \pi$, справедливы неравенства (см. (1.9))

$$|S_{n,v}(x)| \leq (v - n + 1)\gamma(n), \quad |S_{n,v}(x)| \leq \frac{(\gamma(v) + 2\gamma(n))\pi}{x} \leq \frac{3\pi\gamma(n)}{x}, \quad |R_n(x)| \leq \frac{2\pi\gamma(n)}{x}. \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), $n, v \in \mathbb{N}$, $n \leq v$, *и* $s := v - n + 1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big| \leq C\gamma(n) \min\Big\{\frac{1}{x}; s\Big\}, \quad x \in (0; \pi], \quad \text{где } C = 3\pi. \tag{2.5}$$

Если дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$, *то неравенство* (2.5) *останется верным с константой* $C = 4\pi \max\big\{1; \sup_{r \geq 1} r\gamma(r)\big\}$ *при замене* s *на* $m := \min\{v - n + 1; 1/\gamma(n)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (2.5) вытекает из неравенств (2.4). Пусть дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$. Докажем, что при любых $n, v \in \mathbb{N}$, $n \leq v$, справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big| \leq 4\pi \sup_{r \geq 1} r\gamma(r), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

откуда будет следовать утверждение леммы 1 для случая $\gamma(r) = O(1/r)$. Для доказательства неравенства (2.6) используем хорошо известные рассуждения из [5, гл. V, § 1; 14, § 7.2]. Пусть $C_1 := \sup_{r\geq 1} r\gamma(r)$. Берем произвольное фиксированное $x \in (0;\pi]$. Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ сумму ряда (2.3) представим в виде

$$R_d(x) = S_{d,d+N-1}(x) + R_{d+N}(x), \quad \text{где} \quad N := \left[\frac{\pi}{x}\right].$$

Для натурального числа N очевидно выполняется неравенство

$$\frac{\pi}{N+1} < x \leq \frac{\pi}{N}. \tag{2.7}$$

Учитывая неравенства (1.9), (2.4) и (2.7), получаем

$$|S_{d,d+N-1}(x)| \leq \sum_{k=d}^{d+N-1} \gamma(k)kx \leq C_1 xN \leq \pi C_1;$$

$$|R_{d+N}(x)| \leq \frac{2\pi}{x}\gamma(d+N) \leq 2(N+1)\gamma(N+1) \leq 2C_1.$$

Из последних двух неравенств вытекает неравенство $|R_d(x)| \leq 2\pi C_1$, откуда следует (2.6). Необходимо только учесть равенство $S_{n,v}(x) = R_n(x) - R_{v+1}(x)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), $n, v \in \mathbb{N}$, $n \leq v$, *и* $s := v - n + 1$. *Тогда при любых* $p > 0$ *и* $q \in [1-p; 1)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \leq C^p C(p,q)\gamma^p(n) \begin{cases} s^{p+q-1}, & \text{если } q \in (1-p;1); \\ \ln(s+1), & \text{если } q = 1-p, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $C = 3\pi$, $C(p,q) = p/((1-q)(p+q-1))$ *и* $C(p,q) = (2+2p)/p$ *соответственно при* $q \in (1-p;1)$ *и* $q = 1-p$. *Если дополнительно* $\gamma(r) = O(1/r)$ *и* $\gamma(n) \leq 1$, *то неравенство* (2.8) *останется верным с константой* $C = 4\pi \max\{1; \sup_{r\geq 1} r\gamma(r)\}$ *при замене* s *на* $m := \min\{v-n+1; 1/\gamma(n)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая неравенство (2.5) и неравенство $s \geq 1$, получаем

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \leq C^p\gamma^p(n)\bigg(s^p \int_0^{1/s} \frac{1}{x^q}dx + \int_{1/s}^{\pi} \frac{1}{x^{p+q}}dx\bigg).$$

Если $q \in (1-p\,;\,1)$, то

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \leq C^p\,\gamma^p(n)\; s^{p+q-1}\frac{p}{(1-q)(p+q-1)}.$$

В случае $q = 1-p$ имеем

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \leq C^p\gamma^p(n)\Big(\frac{1}{p} + \ln\pi + \ln s\Big) \leq C^p\gamma^p(n)\frac{2+2p}{p}\ln(s+1).$$

Здесь мы учли, что при любых $s \geq 1$ выполняются неравенства $e < \pi s < 4s \leq (s+1)^2$.

Если дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$, то можно применить неравенство (2.5) с константой $C = 4\pi\max\{1; \sup_{r\geq 1} r\gamma(r)\}$ при замене s на $m = \min\{v-n+1; 1/\gamma(n)\}$. Если еще $\gamma(n) \leq 1$, то $m \geq 1$ и, значит, справедливы все предыдущие неравенства с заменой s на m.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $p \geq 1$. Из неравенства Минковского вытекает, что

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx\right)^{1/p}, \quad p \geq 1. \tag{3.1}$$

Из этого неравенства и (2.8) получаем следующие два неравенства для $p \geq 1$:

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{1/p} \leq CC^{1/p}(p,q)\sum_{j=1}^{\infty}\gamma(n_j)\ s_j^{(p+q-1)/p}, \quad q \in (1-p\,;1);$$

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{1/p} \leq CC^{1/p}(p,q)\sum_{j=1}^{\infty}\gamma(n_j)\ln^{1/p}(s_j+1), \quad q = 1-p.$$

Пусть теперь $0 < p < 1$. В этом случае справедливо неравенство

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \leq \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx, \quad p \in (0;1). \tag{3.2}$$

Из этого неравенства и (2.8) получаем следующие два неравенства для $0 < p < 1$:

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \leq C^p C(p,q)\sum_{j=1}^{\infty}\gamma^p(n_j)\ s_j^{p+q-1}, \quad q \in (1-p\,;\,1);$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \leq C^p C(p,q)\sum_{j=1}^{\infty}\gamma^p(n_j)\ln(s_j+1), \quad q = 1-p.$$

Пусть дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$. Так как $n_j \to \infty$, то $\gamma(n_j) \leq 1$ при всех $j \geq j_0$. Поэтому к членам рядов (3.1) и (3.2) с номерами $j \geq j_0$ можно применить неравенство (2.8) с константой $C = 4\pi\max\{1; \sup_{r\geq 1} r\gamma(r)\}$, если $s = s_j$ заменить на $m = m_j := \min\{v_j - n_j + 1; 1/\gamma(n_j)\}$.

Теорема доказана.

4. Пример

Пусть

$$f(x) := x + (x+2)^\alpha \ln^\beta(x+2), \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0.$$

Так как $f(x+1) - f(x) = f'(\xi) > 1$, $x \geq 1$, то последовательность $\{[f(j)]\}_{j\geq 1}$ строго возрастает. Мы рассматриваем случай, когда $n_j = [f(j)]$, $v_j = n_{j+1} - 1$, $j \in \mathbb{N}$. Здесь $s_j := v_j - n_j + 1 = n_{j+1} - n_j$. Будем считать, что выполнено одно из двух условий: 1) $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$; 2) $\alpha = 1$, $\beta > 0$. Тогда

$$s_j \sim \alpha j^{\alpha-1}\ln^\beta j, \quad j \to \infty.$$

Пусть

$$\gamma(r) := \frac{1}{r^\mu \ln^\delta(r+2)}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \text{где } 0 < \mu < 1, \quad \delta \geq 0, \quad \text{или} \quad \mu = 1, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Очевидно,

$$n_j \sim j^\alpha \ln^\beta j, \quad \gamma(n_j) \sim \frac{\alpha^{-\delta}}{j^{\alpha\mu}(\ln j)^{\beta\mu+\delta}}, \quad j \to \infty.$$

Условие $\gamma(r) = O(1/r)$ выполняется только при $\mu = 1$, и в этой ситуации

$$m_j := \min\{s_j; 1/\gamma(n_j)\} = s_j, \quad j \geq j_0.$$

Найдем условия сходимости рядов (1.5)–(1.7) и (1.8) (с учетом указанных ограничений на параметры α, β, μ и δ) и сравним полученные результаты при $\mu = 1$ с результатами С. А. Теляковского (см. [12]). Рассмотрим четыре случая.

1) Пусть $p \geq 1$ и $1 - p < q < 1$ (это условие эквивалентно неравенству $0 < (1-q)/p < 1$). Тогда при $j \to \infty$ имеем

$$\gamma(n_j)\ s_j^{\frac{p+q-1}{p}} \sim \frac{\alpha^{\frac{p+q-1}{p}-\delta}}{j^{\alpha\mu-(\alpha-1)\frac{p+q-1}{p}}(\ln j)^{\beta\mu+\delta-\beta\frac{p+q-1}{p}}}.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.5) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ \alpha\Big(\dfrac{1-q}{p}+\mu-1\Big) > \dfrac{1-q}{p}; \\ \text{ii)}\ \alpha\Big(\dfrac{1-q}{p}+\mu-1\Big) = \dfrac{1-q}{p}, \quad \beta\Big(\dfrac{1-q}{p}+\mu-1\Big)+\delta > 1. \end{array}\right.$$

С учетом ограничений на параметры получаем, что ряд (1.5) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ 1-\dfrac{1-q}{p} < \mu \leq 1, \quad \alpha > \dfrac{1-q}{1-q+p(\mu-1)}; \\ \text{ii)}\ 1-\dfrac{1-q}{p} < \mu \leq 1, \quad \alpha = \dfrac{1-q}{1-q+p(\mu-1)}, \quad \beta > \dfrac{(1-\delta)p}{1-q+p(\mu-1)}. \end{array}\right.$$

Если $p \geq 1$, $1-p < q < 1$, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $0 < \delta \leq 1$, то при $(1-\delta)p/(1-q) < \beta \leq p/(1-q)$ ряд (1.5) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta = 0$).

2) Пусть $p \geq 1$ и $q = 1 - p$. Тогда при $j \to \infty$ имеем

$$\gamma(n_j)\ \ln^{\frac{1}{p}}(s_j+1) \sim \frac{\alpha^{-\delta}}{j^{\alpha\mu}(\ln j)^{\beta\mu+\delta}}\big((\alpha-1)\ln j + \beta\ln(\ln j)\big)^{1/p}.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.6) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ \alpha > \dfrac{1}{\mu}; \\ \text{ii)}\ \alpha = \dfrac{1}{\mu}, \quad \beta > \dfrac{1}{\mu}\Big(1-\delta+\dfrac{\operatorname{sign}(\alpha-1)}{p}\Big). \end{array}\right.$$

Если $p \geq 1$, $q = 1-p$, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $0 < \delta \leq 1$, то при $1 - \delta < \beta \leq 1$ ряд (1.6) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta = 0$).

3) Пусть $0 < p < 1$ и $1-p < q < 1$ (это условие эквивалентно неравенству $0 < (1-q)/p < 1$). Тогда при $j \to \infty$ имеем

$$\gamma^p(n_j)\ s_j^{p+q-1} \sim \frac{\alpha^{p+q-1-p\delta}}{j^{\alpha\mu p-(\alpha-1)(p+q-1)}(\ln j)^{p(\beta\mu+\delta)-\beta(p+q-1)}}.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.7) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i) } \alpha\,(\mu p-p-q+1)>2-p-q; \\ \text{ii) } \alpha\,(\mu p-p-q+1)=2-p-q, \quad \beta\,(\mu p-p-q+1)>1-p\delta. \end{array}\right.$$

С учетом ограничений на параметры получаем, что ряд (1.7) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i) } 1-\dfrac{1-q}{p}<\mu\le 1, \quad \alpha>\dfrac{2-p-q}{\mu p-p-q+1}; \\ \text{ii) } 1-\dfrac{1-q}{p}<\mu\le 1, \quad \alpha=\dfrac{2-p-q}{\mu p-p-q+1}, \quad \beta>\dfrac{1-p\delta}{\mu p-p-q+1}. \end{array}\right.$$

Если $0<p<1$, $1-p<q<1$, $\mu=1$, $\alpha=1+(1-p)/(1-q)$, $0<\delta\le 1$, то при $(1-p\delta)/(1-q)<\beta\le 1/(1-q)$ ряд (1.7) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta=0$).

4) Пусть $0<p<1$ и $q=1-p$. Тогда при $j\to\infty$ имеем

$$\gamma^p(n_j)\ \ln(s_j+1)\sim\frac{\alpha^{-p\delta}}{j^{\alpha\mu p}(\ln j)^{\beta\mu p+\delta p}}\big((\alpha-1)\ln j+\beta\ln(\ln j)\big)\,.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.8) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i) } \alpha>\dfrac{1}{\mu p}; \\ \text{ii) } \alpha=\dfrac{1}{\mu p}, \quad \beta>\dfrac{1}{\mu p}\,(1-\delta p+\operatorname{sign}(\alpha-1))\,. \end{array}\right.$$

Если $0<p<1$, $q=1-p$, $\mu=1$, $\alpha=1/p$, $0<\delta\le 1$, то при $2/p-\delta<\beta\le 2/p$ ряд (1.8) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta=0$).

В заключение отметим, что вопрос о необходимых условиях сходимости интеграла (1.4) остается открытым (кроме указанного во введении случая $p\ge 1$ и $q=0$). Это касается и критерия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белов А.С.** О суммах модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами // Вестн. Иванов. гос. ун-та. Сер. Биология, химия, физика, математика. 2006. Вып. 3. С. 107–121.
2. **Белов А.С.** О свойствах суммы модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 6. С. 35–62.
3. **Белов А.С., Теляковский С.А.** Усиление теорем Дирихле — Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 25–40.
4. **Заставный В.П.** Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 166–179.
5. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.
6. **Leindler L.** On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. 2001. Vol. 27, no. 4. P. 279–285.
7. **Попов А.Ю., Теляковский С.А.** К оценкам частных сумм рядов Фурье функций ограниченной вариации // Изв. вузов. Математика. 2000. № 1. С. 51–55.
8. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.

9. **Telyakovskii S.A.** Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 215–218.
10. **Теляковский С.А.** Некоторые свойства рядов Фурье функции ограниченной вариации. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.
11. **Теляковский С.А.** О свойствах блоков членов ряда $\sum \frac{1}{k}\sin kx$ // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64, №5. С. 713–718.
12. **Теляковский С.А.** Добавление к работе В. П. Заставного "Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье" // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 277–281.
13. **Trigub R.M.** A note on the paper of Telyakovskii "Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation"// East J. Approx. 2007. Vol. 13, no. 1. P. 1–6.
14. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М: Мир, 1985. Т. 1, 264 с.

Заставный Виктор Петрович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор
Донецкий национальный университет,
г. Донецк, Украина
e-mail: zastavn@rambler.ru

Поступила 15.05.2017

Левадная Антонина Сергеевна
аспирант
Донецкий национальный университет,
г. Донецк, Украина
e-mail: last.dris@mail.ru

REFERENCES

1. Belov A.S. Some properties of the sum of the moduli of the terms of a grouped trigonometric series with monotonic coefficients. *Vestn. Ivanov. gos. un-ta. Ser. Biologiya, khimiya, fizika, matematika*, 2006. No. 3. pp. 107–121 (in Russian).
2. Belov A.S. Some properties of the sum of the moduli of the terms of a grouped trigonometric series. *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, no. 6, pp. 798–825. doi: https://doi.org/10.4213/sm7851 .
3. Belov A.S., Telyakovskii S.A. Refinement of the Dirichlet–Jordan and Young's theorems on Fourier series of functions of bounded variation. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 6, pp. 777–791. doi: https://doi.org/10.4213/sm2420 .
4. Zastavnyi V.P. Estimates for sums of moduli of blocks in trigonometric Fourier series. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 190–204. doi: 10.1134/S0081543811050208 .
5. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959, vol. I, 383 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Mir Publ., 1965, vol. I, 616 c.
6. Leindler L. On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series. *Anal. Math.*, 2001, vol. 27, no. 4, pp. 279–285.
7. Popov A.Yu., Telyakovskii S.A. On estimates for partial sums of Fourier series of functions of bounded variation. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 2000, vol. 44, no. 1, pp. 50–54.
8. Telyakovskii S.A. On partial sums of Fourier series of Functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 372–381.
9. Telyakovskii S.A. Some properties of Fourier series of functions with bounded variation. *East J. Approx.*, 2004, vol. 10, no. 1–2, pp. 215–218.
10. Telyakovskii S.A. Some properties of Fourier series of functions with bounded variation. II, *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2005, suppl. 2, pp. 188–195.
11. Telyakovskii S.A., On the properties of blocks of terms of the series $\sum \frac{1}{k}\sin kx$. *Ukr. Math. J.*, 2012, vol. 64, no. 5, pp. 816–822.
12. Telyakovskii S.A. An addition to V.P. Zastavnyi's paper "Estimates for sums of moduli of blocks in trigonometric Fourier series". *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 277–281 (in Russian).

13. Trigub R.M. A note on the paper of Telyakovskii “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation”. *East J. Approx.*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 1–6.
14. Edwards R.E. *Fourier series. A modern introduction*, vol. 1. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1979, Ser. Grad. Texts in Math., 64, 228 p. doi: 10.1007/978-1-4612-6208-4 . Translated under the title “ Ryady Fur’e v sovremennom izlozhenii”. Moscow: Mir Publ., 1985, vol. 1, 264 p.

The paper was received by the Editorial Office on May 15, 2017.

Viktor Petrovich Zastavnyi, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Donetsk National University, Universitetskaya str. 24, Donetsk, 83001, Ukraine, e-mail: zastavn@rambler.ru .

Antonina Sergeevna Levadnaya, doctoral student, Donetsk National University, Universitetskaya str. 24, Donetsk, 83001, Ukraine, e-mail: last.dris@mail.ru .