ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.856

ВАРИАНТ АФФИННО-МАСШТАБИРУЮЩЕГО МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА КОНУСЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

В. Г. Жадан

Рассматривается линейная задача конического программирования, в которой конус является прямым произведением конусов второго порядка (конусов Лоренца). Для ее решения предлагается прямой метод аффинно-масштабирующего типа, обобщающий соответствующий метод для линейного программирования. Метод можно рассматривать как специальный способ решения системы необходимых и достаточных условий оптимальности для пары взаимно двойственных задач конического программирования. На основании этих условий выводится зависимость двойственных переменных от прямых, которая подставляется в условие дополнительности. Получившаяся система уравнений относительно прямых переменных решается с помощью метода простой итерации. Стартовые точки в методе принадлежат конусу, но не обязательно должны удовлетворять линейным ограничениям типа равенства. При предположении о невырожденности решений прямой и двойственной задач и их строгой дополнительности доказывается локальная сходимость метода с линейной скоростью.

Ключевые слова: задача конического программирования, конус второго порядка, аффинно-масштабирующий метод, локальная сходимость.

V. G. Zhadan. A variant of the affine-scaling method for a cone programming problem on a second-order cone.

A linear cone programming problem in which the cone is the direct product of second-order cones (Lorentz cones) is considered. For its solution we propose a direct affine-scaling type method generalizing the corresponding method used in linear programming. The method can be considered as a special way to solve a system of necessary and sufficient optimality conditions for a pair of mutually dual cone programming problems. These conditions are used to derive the dependence of the dual variables on the primal variables, and the dependence is substituted into the complementarity condition. The obtained system of equations is solved with respect to the primal variables by the simple iteration method. The starting points in the method belong to the cone but do not necessarily satisfy the linear equality-type constraints. The local linear convergence of the method is proved under the assumption that the solutions of the primal and dual problems are nondegenerate and strictly complementary.

Keywords: cone programming, second-order cone, affine-scaling method, local convergence.

MSC: 90C22

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-114-124

Введение

Линейная задача конического программирования на конусе второго порядка является весьма универсальной постановкой, к частным случаям которой относятся задачи линейного и квадратичного программирования, включая задачи с квадратичными ограничениями [1]. К решению задач конического программирования сводятся многие другие оптимизационные задачи, например задачи робастного и комбинаторного программирования [2]. Хотя задача конического программирования на конусе второго порядка может быть переформулирована как задача полуопределенного программирования, имеется целый ряд причин рассматривать данную постановку отдельно, особенно это касается численных алгоритмов.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-08259, а также при содействии Программы ведущих научных школ (НШ-8860.2016.1).

Теории и методам решения задач конического и полуопределенного программирования в последнее время уделяется большое внимание [3]. Многие численные методы решения линейных задач конического программирования получены как обобщения соответствующих методов для задач линейного программирования. Среди них наиболее популярны прямо-двойственные методы аффинно-масштабирующего типа, однако имеются обобщения симплекс-метода [4–6]. Рассматриваемый в настоящей работе численный метод также является переносом на случай задачи конического программирования барьерно-проективного метода [7], предложенного ранее для линейного программирования и принадлежащего к классу аффинно-масштабирующих методов. В [8] приводится его обобщение на задачи полуопределенного программирования.

Работа состоит из четырех разделов и заключения. В разд. 1 приводятся вспомогательные сведения из теории задач конического программирования на конусе второго порядка. В разд. 2 дается постановка линейной задачи конического программирования и двойственной к ней. В разд. 3 рассматривается численный алгоритм, в разд. 4 доказывается его локальная сходимость.

Всюду ниже через $\mathrm{Diag}(C_1, \ldots, C_k)$ и $D(c)$ обозначаются соответственно блочно-диагональная матрица с блоками $C_1, \ldots, C_k$ и диагональная матрица с вектором c на диагонали. Символ I_k используется для обозначения единичной матрицы порядка k, символ 0_{kl} — для обозначения нулевой матрицы размерности $k \times l$. Символом 0_k обозначается нулевой k-мерный вектор.

1. Вспомогательные сведения

Пусть K^s — конус второго порядка (конус Лоренца) в пространстве $\mathbb{R}^s$:

$$K^s = \left\{[x^0, \bar{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{s-1} \colon x^0 \geq \|\bar{x}\|\right\},$$

где $\|\bar{x}\|$ — евклидова норма вектора $\bar{x} = [x^1, \ldots, x^{s-1}]^T \in \mathbb{R}^{s-1}$. Границу и внутренность конуса K^s обозначим соответственно ∂K^s и $\mathrm{int} K^s$. Конус K^s является самосопряженным. Он задает в $\mathbb{R}^s$ частичный порядок между векторами, а именно $x_1 \succeq_{K^s} x_2$, если $x_1 - x_2 \in K^s$. Строгое неравенство $x_1 \succ_{K^s} x_2$ означает, что $x_1 - x_2 \in \mathrm{int} K^s$. Считаем, что $s > 1$, при $s = 1$ конус K^1 есть просто неотрицательная полуось действительной прямой.

Для $x = [x^0, \bar{x}]$ и $y = [y^0, \bar{y}]$ из $\mathbb{R}^s$ обозначим через $x \circ y$ их произведение, определяемое следующим образом:

$$x \circ y = \begin{bmatrix} x^T y \\ x^0 \bar{y} + y^0 \bar{x} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Пространство $\mathbb{R}^s$ с таким произведением является йордановой алгеброй. Вектор $\mathbf{e} = [1, 0_{s-1}]^T$ при умножении (1.1) играет роль единицы, так как $x \circ \mathbf{e} = x$ для любого $x \in \mathbb{R}^s$.

С помощью симметричной матрицы $\mathrm{Arw}(x)$ порядка s, сопоставляемой вектору $x \in \mathbb{R}^s$ и имеющей вид

$$\mathrm{Arw}(x) = \begin{bmatrix} x^0 & \bar{x}^T \\ \bar{x} & x^0 I_{s-1} \end{bmatrix},$$

произведение $x \circ y$ может быть записано следующим образом:

$$x \circ y = \mathrm{Arw}(x) y = \mathrm{Arw}(y) x = \mathrm{Arw}(x)\mathrm{Arw}(y)\bar{e}, \tag{1.2}$$

где $\bar{e}$ — s-мерный вектор, состоящий из единиц.

Возьмем $x = [x^0; \bar{x}] \in \mathbb{R}^s$. Тогда x можно представить в виде

$$x = \lambda_p p + \lambda_q q, \tag{1.3}$$

где $\lambda_p = x^0 + \|\bar{x}\|$, $\lambda_q = x^0 - \|\bar{x}\|$ и

$$p = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}/\|\bar{x}\| \end{bmatrix}, \qquad q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{x}/\|\bar{x}\| \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Векторы p и q принадлежат границе ∂K^s конуса K^s и таковы, что

$$p \circ q = 0_s, \qquad p + q = \mathbf{e}, \qquad p^2 = p, \qquad q^2 = q,$$

где $p^2 = p \circ p$, $q^2 = q \circ q$. Равенство (1.3) называется *спектральным разложением* вектора x. О паре векторов (p, q), определяемой согласно (1.4), говорят как о *йордановом репере* x. Вектор $x \in \mathbb{R}^s$ принадлежит конусу K^s тогда и только тогда, когда $\lambda_{p,q} \geq 0$. В этом случае вектор x называется *положительно полуопределенным*. Аналогично вектор $x \in \mathbb{R}^s$ называется *положительно определенным*, если $\lambda_{p,q} > 0$. Строгие неравенства имеют место в том и только в том случае, когда $x \in \mathrm{int} K^s$.

Векторы p и q из разложения (1.3) входят в число собственных векторов матрицы $\mathrm{Arw}(x)$, а именно если ввести в рассмотрение ортогональную матрицу

$$Q = Q(x) = \left[\sqrt{2}p, H, \sqrt{2}q\right], \tag{1.5}$$

где H — матрица размерности $s \times (s-2)$, все столбцы которой ортогональны векторам p и q, то столбцы матрицы Q являются собственными векторами матрицы $\mathrm{Arw}(x)$. Коэффициенты λ_p и λ_q являются собственными значениями $\mathrm{Arw}(x)$, которые соответствуют собственным векторам $\sqrt{2}p$ и $\sqrt{2}q$. Еще одним собственным значением матрицы $\mathrm{Arw}(x)$ оказывается компонента x^0. Данное значение имеет кратность $s - 2$, если $x \neq 0_s$.

Касательное пространство $\mathcal{T}_{K^s}(x)$ к конусу K^s в точке $x \in K^s$ равняется всему пространству $\mathbb{R}^s$, если $x \in \mathrm{int} K^s$. В случае, когда $x \in \partial K^s$, например $x = \lambda_p p$, где (p, q) — йордановый репер x, касательное пространство следующее: $\mathcal{T}_{K^s}(x) = \{y \in \mathbb{R}^s\colon \langle q, y\rangle = 0\}$. Угловые скобки указывают на обычное скалярное произведение в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^s$. Наконец, если $x = 0_s$, касательное пространство совпадает с нулевым подпространством.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу конического программирования следующего вида:

$$\min \sum_{i=1}^{r} \langle c_i, x_i\rangle, \qquad \sum_{i=1}^{r} A_i x_i = b, \qquad x_i \succeq_{K_i} 0_{n_i}, \qquad 1 \leq i \leq r. \tag{2.1}$$

Здесь $r \geq 1$, $b \in \mathbb{R}^m$ и $c_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $K_i = K^{n_i}$, $1 \leq i \leq r$. Матрицы A_i имеют размерность $m \times n_i$. Относительно n_i предполагаем, что $n_i > 1$ для всех индексов $1 \leq i \leq r$.

Обозначим $n = n_1 + \cdots + n_r$ и объединим векторы c_i и x_i в единые векторы-столбцы длины n, т. е. $c = [c_1; \ldots; c_r]$, $x = [x_1; \ldots; x_r]$. В них компоненты помещаются одна под другой, на что указывает знак точки с запятой при перечислении этих компонент. Аналогичное объединение проведем для матриц A_i и конусов K_i, положив $\mathcal{A} = [A_1, \ldots, A_r]$, $\mathcal{K} = K_1 \times \cdots \times K_r$. Тогда $\mathcal{F}_P = \{x \in \mathcal{K}\colon \mathcal{A}x = b\}$ есть допустимое множество в задаче (2.1).

Двойственной к (2.1) является задача

$$\max \langle b, u\rangle, \qquad v_i = c_i - A_i^T u, \qquad v_i \succeq_{K_i} 0_{n_i}, \qquad 1 \leq i \leq r. \tag{2.2}$$

Если ввести вектор $v = [v_1; \ldots; v_r] \in \mathbb{R}^n$, то допустимое множество в задаче (2.2) можно записать в виде $\mathcal{F}_D = \left\{[u, v] \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{K}\colon\ v = c - \mathcal{A}^T u\right\}$. Предполагаем, что обе задачи (2.1) и (2.2) имеют решения и строки матрицы A линейно независимы.

Для задач (2.1) и (2.2) имеет место *слабая двойственность*, т. е.

$$\langle c, x\rangle \geq \langle b, u\rangle \tag{2.3}$$

для любых $x \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathbb{R}^m$ таких, что $[u, v] \in \mathcal{F}_D$.

Говорят, что задачи (2.1) и (2.2) *строго допустимы*, если найдутся соответственно точки $\hat{x} \in \mathcal{F}_P$ и $[\hat{u}, \hat{v}] \in \mathcal{F}_D$ такие, что $\hat{x} \succ_{\mathcal{K}} 0_n$ и $\hat{v} \succ_{\mathcal{K}} 0_n$ (условия Слейтера). В этом случае задачи (2.1) и (2.2) связаны между собой соотношением *сильной двойственности*, которая означает, что неравенство (2.3) для некоторых $x_* \in \mathcal{F}_P$ и $[u_*, v_*] \in \mathcal{F}_D$ выполняется как равенство. Точки x_* и $[u_*, v_*]$ являются решениями соответственно задач (2.1) и (2.2), причем для x_* и v_* оказывается справедливым равенство $\langle x_*, v_* \rangle = 0$.

Решения x_* и $[u_*, v_*]$ в этом случае удовлетворяют *условию дополнительности*, т. е. для каждой пары компонент $x_{*,i}$ и $v_{*,i}$ справедливо равенство $x_{*,i} \circ v_{*,i} = 0_{n_i}$, $1 \leq i \leq r$. Матрицы $\mathrm{Arw}(x_{*,i})$ и $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$ коммутируют между собой. *Условие строгой дополнительности* означает, что помимо указанных равенств выполняется еще включение $x_* + v_* \in \mathrm{int}\mathcal{K}$. Понятно, что данное включение имеет место тогда и только тогда, когда $x_{*,i} + v_{*,i} \in \mathrm{int}K_i$ для каждого $1 \leq i \leq r$. В этом случае либо одна компонента принадлежит внутренности конуса K_i, другая — нулевая, либо обе они принадлежат границе конуса K_i.

Невырожденные точки в задачах (2.1) и (2.2) определяются с помощью *касательного пространства* $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(z)$ к конусу $\mathcal{K}$ в точке $z \in \mathcal{K}$. Данное касательное пространство получается как декартово произведение касательных пространств $\mathcal{T}_{K_i}(z_i)$, т. е. $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(z) = \mathcal{T}_{K_1}(z_1) \times \cdots \times \mathcal{T}_{\mathcal{K}_r}(z_r)$. Кроме того, нам потребуются нуль-пространство $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ матрицы $\mathcal{A}$ и пространство столбцов $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^T}$ матрицы $\mathcal{A}^T$. Дадим определение невырожденности допустимых точек, следуя [1]. Эквивалентные определения невырожденности приводятся также в [9].

Определение. Точка $x \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(x) + \mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^n$. Соответственно точка $[u, v] \in \mathcal{F}_D$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(v) + \mathcal{R}_{\mathcal{A}^T} = \mathbb{R}^n$.

Если оптимальное решение x_* прямой задачи (2.1) невырожденное, то решение $[u_*, v_*]$ двойственной задачи (2.2) единственное, и наоборот, если решение $[u_*, v_*]$ двойственной задачи невырожденное, то решение x_* задачи (2.1) единственное.

Пусть $x \in \mathcal{K}$. Составим из r векторов x_i, входящих в общий вектор x, три блока компонент: x_B, x_I и x_Z. К блоку x_B отнесем те ненулевые компоненты x_i, для которых $x_i \in \partial K_i$. Блок x_I составляют те компоненты x_i, для которых $x_i \in \mathrm{int}K_i$. Наконец, в блок x_Z входят только $x_i = 0_{n_i}$. Всюду ниже, не умаляя общности, считаем, что эти блоки располагаются в следующем порядке:

$$x = [x_B; x_I; x_Z], \tag{2.4}$$

причем x_B и x_I состоят из компонент:

$$x_B = [x_1; \ldots; x_{r_B}], \qquad x_I = [x_{r_B+1}; \ldots; x_{r_B+r_I}]. \tag{2.5}$$

Таким образом, $r_B + r_I + r_Z = r$. Аналогичное блочное представление будем использовать для матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_B$, а именно: $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_B, \mathcal{A}_I, \mathcal{A}_Z]$, $\mathcal{A}_B = [A_1, \ldots, A_{r_B}]$. Подобным образом поступаем и с вектором $v \in \mathcal{K}$, разбивая его на блоки v_B, v_I и v_Z, а также разбиваем матрицу $\mathcal{A}$ в соответствие с разбиением v на подматрицы $\mathcal{A}_B$, $\mathcal{A}_I$ и $\mathcal{A}_Z$. Отметим, что некоторые блоки x и v могут быть пустыми.

Предположим, что для $1 \leq i \leq r_B$ выполняется $x_i = \beta_i p_i \in \partial K_i$, где (p_i, q_i) — репер x_i. Тогда $x \in \partial \mathcal{A}$. Пусть $A_i^{Q_L}$ обозначает матрицу $A_i Q_i^L$, где Q_i^L — левая подматрица размерности $n_i \times (n_i - 1)$ ортогональной матрицы $Q_i = \left[\sqrt{2}p_i, H_i, \sqrt{2}q_i\right]$, имеющей вид (1.5) и состоящей из собственных векторов матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$, т. е. $Q_i^L = \left[\sqrt{2}p_i, H_i\right]$. Положим $\mathcal{A}_B^{Q_L} = \left[A_1^{Q_L}, \ldots A_{r_B}^{Q_L}\right]$.

Предположим, кроме того, что $v \in \partial\mathcal{K}$ и для компонент v_i, $1 \leq i \leq r_B$, выполняется $v_i = \beta_i q_i \in \partial K_i$, где (p_i, q_i) есть репер v_i. Обозначим $A_i^p = A_i p_i$, $1 \leq i \leq r_B$, и составим матрицу $A_B^p = [A_1^p, \ldots, A_{r_B}^p]$.

Имеют место следующие критерии невырожденности в прямой и двойственной задачах [1].

Критерий невырожденности в задаче (2.1). *Точка $x \in \mathcal{F}_P$, в которой $x = [x_B; x_I, x_Z]$, является невырожденной в том и только в том случае, когда строки матрицы $\mathcal{A}^Q = \left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right]$ линейно независимы.*

Критерий невырожденности в задаче (2.2). *Точка $[u,v] \in \mathcal{F}_D$, в которой $v = [v_B; v_Z; v_I]$, является невырожденной в том и только в том случае, когда столбцы матрицы $\mathcal{A}^p = \left[\mathcal{A}^p_B, \mathcal{A}_Z\right]$ линейно независимы.*

Из первого критерия следует, что должно выполняться неравенство $\sum\limits_{i=1}^{r_B+r_I} n_i - r_B \geq m$. Соответственно из второго критерия следует неравенство $m \geq r_B + \sum\limits_{i=r_B+1}^{r_B+r_I} n_i$, если считать, что $v_i = 0_{n_i}$, $r_B < i \leq r_B + r_I$. В силу непрерывности критерии невырожденности будут выполняться и в некоторых окрестностях точек x и $[u,v]$.

3. Условия оптимальности и итерационный процесс

Если число блоков r в задаче (2.1) равно единице, то, как известно, эта задача допускает аналитическое решение [1]. Поэтому ниже считаем, что $r > 1$.

Условия оптимальности для пары задач (2.1) и (2.2) состоят из следующих равенств и неравенств:

$$\begin{gathered} x \circ v = 0_n, \\ \mathcal{A}x = b, \\ v = c - \mathcal{A}^T u, \\ x \succeq_{\mathcal{K}} 0_n, \quad v \succeq_{\mathcal{K}} 0_n, \end{gathered} \tag{3.1}$$

причем первое равенство вытекает из равенства $\langle x, v\rangle = 0$ и неравенств $x \succeq_{\mathcal{K}} 0_n$, $v \succeq_{\mathcal{K}} 0_n$. Здесь и ниже под произведением $x \circ v$ понимается n-мерный вектор $[x_1 \circ v_1; \ldots; x_r \circ v_r]$.

Для построения численного метода решения задачи (2.1) воспользуемся условиями оптимальности (3.1). Наша цель заключается в освобождении от двойственной переменной u и в сведении системы равенств, входящих в (3.1), к зависимости только от прямой переменной x. Положим $v(u) = c - A^T u$ и подставим $v(u)$ в первое равенство из (3.1). Тогда оно преобразуется к виду

$$x \circ (A^T u) = x \circ c. \tag{3.2}$$

Обозначим через $\mathrm{Arw}(x)$ блочно-диагональную матрицу с r диагональными блоками:

$$\mathrm{Arw}(x) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(x_1), \ldots, \mathrm{Arw}(x_r)\right).$$

Умножая обе части (3.2) на матрицу $\mathcal{A}$ и принимая во внимание формулу (1.2), приходим к уравнению

$$\Gamma(x)u = \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)c, \tag{3.3}$$

где симметричная матрица $\Gamma(x)$ порядка m имеет вид $\Gamma(x) = \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)\mathcal{A}^T$.

Добавим к равенству (3.3) второе равенство из (3.1), предварительно умноженное на некоторое число $\tau > 0$. В результате получаем следующее уравнение относительно u:

$$\Gamma(x)u = \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)c + \tau\,(b - \mathcal{A}x). \tag{3.4}$$

Если матрица $\Gamma(x)$ неособая, то, разрешая уравнение (3.4), получаем

$$u = u(x) = \Gamma^{-1}(x)\left[\mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)c + \tau\,(b - \mathcal{A}x)\right].$$

Для слабой двойственной переменной v тогда имеем

$$v = v(x) = v(u(x)) = \left[I_n - \mathcal{A}^T\Gamma^{-1}(x)\mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)\right]c + \tau\mathcal{A}^T\Gamma^{-1}(x)\,(\mathcal{A}x - b). \tag{3.5}$$

Если подставить теперь зависимость $v(x)$ в первое равенство из (3.1), то приходим к системе нелинейных уравнений

$$x \circ v(x) = 0_n. \tag{3.6}$$

Применение для решения системы (3.6) метода простой итерации приводит к следующему итерационному процессу:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k\, x_k \circ v_k, \qquad v_k = v(x_k), \tag{3.7}$$

где $\alpha_k > 0$ — шаг перемещения. От стартовой точки x_0 потребуем только, чтобы $x_0 \succ_{\mathcal{K}} 0_n$.

Утверждение 1. *Пусть точка $x \in \mathcal{F}_P$ невырожденная. Тогда матрица $\Gamma(x)$ положительно определена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Считаем, не умаляя общности, что для точки x справедливо представление (2.4), (2.5). Так как $x \in \mathcal{K}$, то $x_i \in K_i$. Поэтому все собственные числа симметричной матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$ неотрицательные, сами матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$ положительно полуопределенные. Более того, они положительно определенные, если $r_B < i \le r_B + r_I$. Отметим также, что эти матрицы нулевые, когда $i > r_B + r_I$.

Если $x_i \neq 0_{n_i}$, то матрицу $\mathrm{Arw}(x_i)$ согласно вышесказанному можно представить в виде

$$\mathrm{Arw}(x_i) = Q_i D\left(\lambda_{p,i}, x_i^0, \ldots, x_i^0, \lambda_{q,i}\right) Q_i^T,$$

где $Q_i = \left[\sqrt{2}p_i, H_i, \sqrt{2}q_i\right]$, (p_i, q_i) — репер x_i. В случае, когда $1 \le i \le r_B$ и $x_i = \lambda_{p,i} p_i \in \partial K_i$, выполняется $x_i^0 = \|\bar{x}_i\|$, следовательно, $\lambda_{p,i} = 2x_i^0$, $\lambda_{q,i} = 0$.

Тогда, отбрасывая нулевые матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$, получаем следующее разложение:

$$\Gamma(x) = \left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right] G(x) \left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right]^T,$$

где блочно-диагональная матрица $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \Omega_{r_B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Arw}(x_{r_B+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Arw}(x_{r_B+r_I}) \end{bmatrix},$$

причем Ω_i — диагональные матрицы порядка $n_i - 1$ следующего вида:

$$\Omega_i = D\left(2x_i^0, x_i^0, \ldots, x_i^0\right), \qquad 1 \le i \le r_B.$$

Так как все диагональные блоки в $G(x)$ положительно определенные, то $G(x)$ — положительно определенная матрица. Поскольку согласно критерию невырожденности в прямой задаче строки матрицы $\left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right]$ линейно независимы, приходим к выводу, что ранг матрицы $\Gamma(x)$ равен m. Таким образом, $\Gamma(x)$ — положительно определенная матрица.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Пусть x_* — невырожденное решение задачи* (2.1). *Тогда x_* есть стационарная точка для итерационного процесса* (3.7), *т. е. $x_* \circ v(x_*) = 0_n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем решение $[u_*, v_*]$ двойственной задачи (2.2). Двойственная переменная u_* и слабая двойственная переменная v_* связаны между собой равенством $v_* = c - \mathcal{A}^T u_*$. Так как x_* — решение (2.1), то $x_* \circ v_* = 0_n$. Следовательно, $x_* \circ (\mathcal{A}^T u_*) = x_* \circ c$. Данное равенство можно переписать в виде $\mathrm{Arw}(x_*)\mathcal{A}^T u_* = \mathrm{Arw}(x_*)c$, из которого следует, что точка u_* есть решение системы линейных уравнений $\mathrm{Arw}(x_*)\mathcal{A}^T u = \mathrm{Arw}(x_*)c$. Но в силу невырожденности точки x_* столбцы матрицы $\mathrm{Arw}(x_*)\mathcal{A}^T$ линейно независимы. Отсюда следует, что $u(x_*) = u_*$. Поэтому $v(x_*) = v_*$ и выполняется равенство $x_* \circ v(x_*) = x_* \circ v_* = 0_n$.

Утверждение доказано.

Ниже предполагается, что задача (2.1) *невырожденная*, т. е. все точки $x \in \mathcal{F}_P$ невырожденные.

4. Локальная сходимость метода

Дадим обоснование локальной сходимости итерационного процесса (3.7) с помощью теоремы Островского [10]. Считаем, что зависимость $v(x)$ выбирается согласно (3.5). Обозначим через $W(x)$ отображение $W(x) = x \circ v(x)$.

Лемма. *Пусть точка $x \in \mathbb{R}^n$ является невырожденной. Тогда матрица Якоби $W_x(x)$ отображения $W(x)$ имеет вид*

$$W_x(x) = (I_n - P(x)) \operatorname{Arw}(v(x)) + \tau P(x), \qquad P(x) = \operatorname{Arw}(x)\Gamma(x). \tag{4.1}$$

Доказательство. Дифференцируя $W(x)$, получаем

$$W_x(x) = \operatorname{Arw}(v(x)) + \operatorname{Arw}(x) v_x(x) = \operatorname{Arw}(v(x)) - \operatorname{Arw}(x)\, \mathcal{A}^T u_x(x). \tag{4.2}$$

Здесь $v_x(x)$ и $u_x(x)$ — матрицы Якоби соответственно отображений $v(x)$ и $u(x)$.

Согласно (3.4) вектор-функция $u(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\mathcal{A} \operatorname{Arw}(x) \left(c - \mathcal{A}^T u(x)\right) \equiv \tau \left(\mathcal{A}x - b\right).$$

Продифференцируем данное тождество по x:

$$\mathcal{A} \operatorname{Arw}(v(x)) - \mathcal{A} \operatorname{Arw}(x) \mathcal{A}^T u_x(x) = \tau \mathcal{A}. \tag{4.3}$$

Так как по предположению точка x является невырожденной, то согласно утверждению 1 матрица $\Gamma(x) = \mathcal{A} \operatorname{Arw}(x) \mathcal{A}^T$ неособая. Поэтому, разрешая уравнение (4.3), получаем

$$u_x(x) = \Gamma^{-1}(x) \left[\mathcal{A} \operatorname{Arw}(v(x)) - \tau \mathcal{A}\right].$$

После подстановки данного выражения в (4.2) приходим к (4.1).

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть x_* и $[u_*, v_*]$ — невырожденные оптимальные решения соответственно задач* (2.1) *и* (2.2). *Пусть, кроме того, выполнено условие строгой дополнительности. Тогда можно указать такое $\bar{\alpha} > 0$, что для $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ итерационный процесс* (3.7) *с постоянным шагом $\alpha_k = \alpha$ локально сходится с линейной скоростью к x_*.*

Доказательство. Возьмем отображение $F(x) = x - \alpha W(x)$ и покажем, что спектральный радиус $\rho(F_x(x_*))$ матрицы Якоби $F_x(x_*)$ этого отображения в точке x_* при достаточно малом α меньше единицы. Для этого нужно знать собственные числа матрицы $W_x(x_*)$. Найдем их.

Предположим, что для x_* имеет место разбиение (2.4), т. е. $x_* = [x_{*,B}; x_{*,I}; x_{*,Z}]$. Рассмотрим аналогичное разбиение для вектора $v_* = [v_{*,B}; v_{*,Z}; v_{*,I}]$. Здесь в блок $v_{*,B}$ входят те ненулевые компоненты $v_{*,i}$, для которых $v_{*,i} \in \partial K_i$. В блок $v_{*,I}$ входят те компоненты $v_{*,i}$, для которых $v_{*,i} \in \operatorname{int} K_i$. Блок $v_{*,Z}$ состоит из нулевых компонент $v_{*,i} = 0_{n_i}$.

Пусть r_B, r_I и r_Z — количество компонент векторов $x_{*,i}$ в соответствующих блоках для x_*. Пусть, аналогично, $\bar{r}_B$, $\bar{r}_I$ и $\bar{r}_Z$ — количество компонент векторов $v_{*,i}$ в блоках для v_*. Считаем, не умаляя общности, что

$$x_{*,B} = [x_{*,1}; \ldots; x_{*,r_B}], \qquad x_{*,I} = [x_{*,r_B+1}; \ldots; x_{*,r_B+r_I}].$$

Так как имеет место условие строгой дополнительности, то в силу вышесказанного $r_B = \bar{r}_B$, $r_I = \bar{r}_Z$ и $r_Z = \bar{r}_I$. Поэтому

$$v_{*,B} = [v_{*,1}; \ldots; v_{*,r_B}], \qquad v_{*,Z} = [v_{*,r_B+1}; \ldots; v_{*,r_B+r_I}].$$

Кроме того,

$$x_{*,Z} = [x_{*,r_B+r_I+1}; \ldots; x_{*,n}], \qquad v_{*,I} = [v_{*,r_B+r_I+1}; \ldots; v_{*,n}].$$

Согласно лемме $W_x(x_*) = (I_n - P(x_*))\,\mathrm{Arw}\,(v_*) + \tau P(x_*)$. Обозначим $\mathcal{A}_1 = [\mathcal{A}_B, \mathcal{A}_I]$ и $X_1 = \mathrm{Diag}\ (\mathrm{Arw}(x_{*,B}), \mathrm{Arw}(x_{*,I}))$, где

$$\mathrm{Arw}(x_{*,B}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(x_{*,1}), \ldots, \mathrm{Arw}(x_{*,r_B})\right),$$

$$\mathrm{Arw}(x_{*,I}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(x_{*,r_B+1}), \ldots, \mathrm{Arw}(x_{*,r_B+r_I})\right).$$

Обозначим также $Y_1 = \mathrm{Diag}\ (\mathrm{Arw}(v_{*,B}), \mathrm{Arw}(v_{*,Z}))$ и $Y_2 = \mathrm{Arw}(v_{*,I})$, где

$$\mathrm{Arw}(v_{*,B}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(v_{*,1}), \ldots, \mathrm{Arw}(v_{*,r_B})\right),$$

$$\mathrm{Arw}(v_{*,Z}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(v_{*,r_B+1}), \ldots, \mathrm{Arw}(v_{*,r_B+r_I})\right),$$

$$\mathrm{Arw}(v_{*,I}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(v_{*,r_B+r_I+1}), \ldots, \mathrm{Arw}(v_{*,r})\right).$$

Матрица $\mathrm{Arw}(v_{*,Z})$ нулевая. Тогда в этих обозначениях матрица Якоби $W_x(x_*)$ принимает вид верхней блочной треугольной матрицы

$$W_x(x_*) = \left[\begin{array}{cc} W_1 & W_2 \\ 0 & Y_2 \end{array}\right],$$

в которой

$$W_1 = (I_k - P_1)\,Y_1 + \tau P_1, \qquad P_1 = X_1\mathcal{A}_1^T\left(\mathcal{A}_1 X_1 \mathcal{A}_1^T\right)^{-1}\mathcal{A}_1, \qquad k = \sum_{i=1}^{r_B+r_I} n_i,$$

причем матрицы P_1 и $I_k - P_1$ идемпотентные.

Собственные числа матрицы $W_x(x_*)$ определяются собственными числами матриц W_1 и Y_2. Так как каждый блок блочно-диагональной матрицы Y_2 является симметричной положительно определенной матрицей, то все собственные числа ν_j, $1 \le j \le n-k$, матрицы Y_2 положительные. Обозначим через ν_* максимальное собственное значение из этих чисел.

Определим теперь собственные числа матрицы W_1. Пусть для определенности $x_{*,i} = \lambda_{p,i}p_{*,i}$, $1 \le i \le r_B$. Здесь $(p_{*,i}, q_{*,i})$ — репер точки $x_{*,i} \in \partial K_i$. Тогда на основании вышесказанного для всех таких индексов для каждой матрицы $\mathrm{Arw}(x_{*,i})$ справедливо разложение $Q_iD_iQ_i^T$ вида (1.5) с соответствующей ортогональной матрицей $Q_i = \left[\sqrt{2}p_{*,i}, H_i, \sqrt{2}q_{*,i}\right]$ и с диагональной матрицей D_i, у которой на диагонали стоит вектор собственных значений $\lambda_{*,i} = \left[\lambda_{p,i}, x^0_{*,i}, \ldots, x^0_{*,i}, 0\right]^T$, причем $\lambda_{p,i} = 2x^0_{*,i}$. Положим

$$Q_B = \mathrm{Diag}\ (Q_1, \ldots, Q_{r_B}), \qquad \Lambda_B = \mathrm{Diag}\ (D(\lambda_{*,1}), \ldots, D(\lambda_{*,r_B})).$$

Примем во внимание, что в решениях x_* и $[u_*, v_*]$ матрицы $\mathrm{Arw}(x_{*,i})$ и $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$, $1 \le i \le r_B$, коммутируют между собой. Следовательно, в качестве ортогональной матрицы, состоящей из собственных векторов матрицы $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$, можно взять матрицу Q_i. Тогда если ввести блочно-диагональную матрицу U, на диагонали которой стоят Q_B и I_l, где $l = \sum\limits_{i=r_B+1}^{r_B+r_I} n_i$, а также блочно-диагональную матрицу Λ с блоками Λ_B и $\mathrm{Arw}(x_{*,I})$, то матрица W_1 преобразуется к виду

$$W_1 = U\bar{W}_1U^T, \qquad \bar{W}_1 = (I_k - \bar{P}_1)\Theta + \tau\bar{P}_1, \qquad \bar{P}_1 = \Lambda(\mathcal{A}^Q)^T\left(\mathcal{A}^Q\Lambda(\mathcal{A}^Q)^T\right)^{-1}\mathcal{A}^Q. \tag{4.4}$$

Здесь $\mathcal{A}^Q = \mathcal{A}[Q_B, I_l]$ и $\Theta = \mathrm{Diag}\ (\Theta_B, 0_{ll})$, $\Theta_B = \mathrm{Diag}\ (D(\theta_{*,1}), \ldots, D(\theta_{*,r_B}))$, через $\theta_{*,i}$ обозначен вектор $\theta_{*,i} = [0, v^0_{*,i}, \ldots, v^0_{*,i}, 2v^0_{*,i}]^T$, состоящий из собственных значений матрицы $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$. Матрица $\bar{P}_1$ является идемпотентной.

Из (4.4) следует, что матрица W_1 подобна матрице $\bar{W}_1$, поэтому собственные числа матрицы W_1 совпадают с собственными числами матрицы $\bar{W}_1$. Пусть μ — произвольное собственное число матрицы $\bar{W}_1$, которому соответствует собственный вектор y. Тогда справедливо равенство

$$\left[\left(I_k - \bar{P}_1\right)\Theta + \tau\bar{P}_1\right] y = \mu y, \tag{4.5}$$

а также вытекающее из него равенство

$$\langle y, \left[\left(I_k - \bar{P}_1\right)\Theta + \tau\bar{P}_1\right] y\rangle = \mu\langle y, y\rangle. \tag{4.6}$$

Так как матрица $\bar{P}_1$ идемпотентная, то после умножения обеих частей равенства (4.5) слева на матрицу $\bar{P}_1$ приходим дополнительно еще к одному равенству

$$\tau\bar{P}_1 y = \mu\bar{P}_1 y. \tag{4.7}$$

Пусть $\mathcal{Y}$ — подпространство пространства $\mathbb{R}^k$, состоящее из векторов $y = [y_1; \ldots; y_{r_B+r_I}]$ таких, что $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ и при этом последние компоненты векторов y_i, $1 \le i \le r_B$, равны нулю. Через $\mathcal{Y}^\perp$ обозначим ортогональное дополнение $\mathcal{Y}$.

Из равенства (4.6) следует, что любой вектор $y \in \mathcal{Y}^\perp$, у которого только единственная компонента отлична от нуля, удовлетворяет ему. В самом деле, пусть $y \in \mathcal{Y}^\perp$ и для определенности $y_i^{n_i} = 1$, а все остальные компоненты вектора y_i и другие подвекторы y_j, $j \ne i$, вектора y нулевые. Тогда, подставляя данный вектор y в (4.6) и принимая во внимание, что у матрицы $\bar{P}_1$ строка с соответствующим номером нулевая, получаем $\mu = v_{*,i}^{n_i} = 2v_{*,i}^0 > 0$. Таких собственных значений μ имеется r_B штук.

Возьмем теперь $y \in \mathcal{Y}$. Из (4.7) видно, что если $y \notin \mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$, где $\mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$ — нуль-пространство матрицы $\mathcal{A}^Q$, то $\mu = \tau > 0$. Количество таких собственных чисел равно m.

Далее считаем, что $y \in \mathcal{Y}$ и $y \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$. Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $M = \operatorname{Diag}(M_B, M_I)$, в которой

$$M_B = \operatorname{Diag}\left(M_1, \ldots, M_{r_B}\right), \qquad M_I = \operatorname{Diag}\left(\operatorname{Arw}^{-1}(x_{*,r_B+1}), \ldots, \operatorname{Arw}^{-1}(x_{*,r_B+r_I})\right),$$

$$M_i = D\left((2x_{*,i}^0)^{-1}, (x_{*,i}^0)^{-1}, \ldots, (x_{*,i}^0)^{-1}, 1\right), \qquad 1 \le i \le r_B.$$

Тогда умножение обеих частей равенства (4.5) на $y^T M$ дает

$$\langle y, M\Theta y\rangle = \mu\langle y, My\rangle. \tag{4.8}$$

Матрица M положительно определенная, матрица Θ диагональная, причем ее правый нижний блок нулевой. Следовательно, $\langle y, M\Theta y\rangle = \langle y_B, M_B\Theta_B y_B\rangle$, где $y_B = [y_1; \ldots; y_{r_B}]$. Так как диагональные матрицы M_B и Θ_B положительно полуопределенные, то $\mu \ge 0$.

Но равенство $\mu = 0$ невозможно. Действительно, из (4.8) следует, что $\mu = 0$ в том и только в том случае, когда $y \in \mathcal{Y}_1$, где

$$\mathcal{Y}_1 = \left\{y \in \mathbb{R}^k \colon y_i^j = 0,\ 1 \le j \le n_i - 1,\ 1 \le i \le r_B\right\}.$$

Так как y — ненулевой вектор и $y \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$, то, взяв $y \in \mathcal{Y}_1$, приходим к выводу, что столбцы матрицы

$$[A_1 p_{*,1}, \ldots, A_{r_B} p_{*,r_B}, A_{r_B+1}, \ldots, A_{r_B+r_I}]$$

линейно зависимы. Это противоречит критерию невырожденности точки $[u_*, v_*]$ в двойственной задаче (2.2). Поэтому обязательно $y \notin \mathcal{Y}_1$ и, следовательно, $\mu > 0$. Число таких положительных собственных чисел равно $k - r_B - m$.

Таким образом все собственные числа матрицы $\bar{W}_1$, а стало быть и матрицы W_1, действительные и строго положительные. Пусть μ_* — максимальное собственное значение матрицы W_1. Тогда собственные значения всей матрицы $W_x(x_*)$ строго положительные. Поэтому, взяв $0 < \bar{\alpha} < 2/\max\{\nu_*, \mu_*\}$, получаем, что при $\alpha < \bar{\alpha}$ спектральный радиус $\rho(F_x(x_*))$

удовлетворяет неравенству $\rho(F_x(x_*)) < 1$. Поэтому по теореме Островского итерационный процесс (3.7) локально сходится к x_*.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнены предположения теоремы. Пусть, кроме того,* $x_0 \in \mathcal{F}_P$ *и* $x_0 \succ_{\mathcal{K}} 0_n$. *Тогда можно указать такое* $\bar{\alpha} > 0$, *что итерационный процесс*

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k\, x_k \circ \left[I_n - \mathcal{A}^T \Gamma^{-1}(x_k) \mathcal{A}\, \mathrm{Arw}(x_k)\right] c \tag{4.9}$$

сходится к x_* *с линейной скоростью, если шаг* α_k *берется постоянным и равным* $0 < \alpha < \bar{\alpha}$.

Доказательство следует из того факта, что равенство $\mathcal{A}x_0 = b$ сохраняется и на всех последующих итерациях, т. е. $\mathcal{A}x_k = b$. Поэтому зависимость от τ в (3.5) пропадает, и можно считать, что $\tau = 0$. Поскольку в этом случае траектории, порождаемые итерационными процессами (3.7) и (4.9), полностью совпадают, то утверждение следствия есть частный случай более общего утверждения теоремы.

Отметим также, что в методе (4.9) на каждой итерации целевая функция убывает, так как выполняется неравенство $\langle c, x_{k+1} \rangle < \langle c, x_k \rangle$, если точка x_k не является стационарной для процесса (4.9). Таким образом, метод (4.9) ведет себя как релаксационный, его можно назвать *допустимым вариантом* основного метода (3.7).

Заключение

Предложенный метод обладает как достоинствами, так и недостатками. Одним из достоинств метода является возможность брать в качестве стартовых точек недопустимые точки. Они могут даже не принадлежать конусу. Теорема гарантирует, что это не повлияет на сходимость метода, если стартовая точка взята достаточно близко к решению. Недостатками метода являются его локальность и малый шаг перемещения. Существенно расширить область сходимости можно в допустимом варианте метода. В нем можно также использовать наискорейший спуск для выбора шагов α_k, однако это потребует модификации правых частей метода (4.9) в тех точках, в которых x_k принадлежат границе конуса $\mathcal{K}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Alizadeh F., Goldfarb D.** Second-order cone programming // Math. Program., Ser. B. 2003. Vol. 95. P. 3–51. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079.
2. Applications of second order cone programming / M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, H. Lebret // Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 284. P. 193–228. doi: 10.1016/S0024-3795(98)10032-0 .
3. **Anjos M. F., Lasserre J. B., eds.** Handbook on semidefinite, cone and polynomial optimization: theory, algorithms, software and applications. New York: Springer, 2011. 960 p. doi: 10.1007/978-1-4614-0769-0 .
4. **Nesterov Y. E., Todd M. J.** Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones // SIAM J. Optim. 1998. Vol. 8, no. 2. P. 324–364. doi: 10.1137/S1052623495290209 .
5. **Monteiro R. D. C., Tsuchia T.** Polynomial convergence of primal-dual algorithms for the second-order cone program bazed on MZ-family directions // Math. Program. 2000. Vol. 88. P. 61–83. doi: 10.1007/s101070000137 .
6. **Muramatsu M.** A pivoting procedure for a class of second-order cone programming // Optim. Methods Softw. 2006. Vol. 21, № 2. P. 295–315. doi: /10.1080/10556780500094697 .
7. **Evtushenko Yu., Zhadan V.** Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming // Comput. Optimiz. and Appl. 1994. Vol. 3, no. 4. P. 289–304.
8. **Бабынин М. С., Жадан В. Г.** Прямой метод внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1780–1801.

9. **Pataki G.** Cone-LP's and semidefinite programs: geometry and simplex-type method // Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5), 1996. P. 1–13.
10. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.

Жадан Виталий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына, ФИЦ Информатика и управление РАН,
г. Москва
e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила 31.05.2017

REFERENCES

1. Alizadeh F., Goldfarb D. Second-order cone programming. *Math. Program.*, Ser. B, 2003, vol. 95, pp. 3–51. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079.
2. Lobo M.S., Vandenberghe L., Boyd S., Lebret H.. Applications of second order cone programming. *Linear Algebra Appl.*, 1998, vol. 284, pp. 193–228. doi: 10.1016/S0024-3795(98)10032-0 .
3. Anjos M. F., Lasserre J. B., eds. *Handbook on semidefinite, cone and polynomial optimization: theory, algorithms, software and applications.* New York: Springer, 2011, 960 p. doi: 10.1007/978-1-4614-0769-0 .
4. Nesterov Y. E., Todd M. J. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM J. Optim.*, 1998, vol. 8, no. 2, pp. 324–364. doi: 10.1137/S1052623495290209 .
5. Monteiro R. D. C., Tsuchia T. Polynomial convergence of primal-dual algorithms for the second-order cone program bazed on MZ-family directions. *Math. Program.*, 2000, vol. 88, pp. 61–83. doi: 10.1007/s101070000137 .
6. Muramatsu M. A pivoting procedure for a class of second-order cone programming. *Optim. Methods Softw*, 2006, vol. 21, no. 2, pp. 295–315. doi: 10.1080/10556780500094697 .
7. Evtushenko Yu., Zhadan V. Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming. *Comput. Optimiz. Appl.*, 1994, vol. 3, no. 4, pp. 289–304.
8. Babynin M.S., Zhadan V.G. A primal interior point method for linear semidefinite programming problem. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1746-1767. doi: 10.1134/S0965542508100035 .
9. Pataki G. Cone-LP's and semidefinite programs: geometry and simplex-type method. Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5), 1996, pp. 1–13.
10. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* New York; London: Academic Press, 1970, 592 p. ISBN: 978-0-12-528550-6 . Translated under the title "Iteratsionnye metody resheniya sistem nelineinykh uravnenii so mnogimi neizvestnymi", Moscow, Mir, 1975, 560 p.

The paper was received by the Editorial Office on May 31, 2017.

Vitalii Grigor'evich Zhadan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, 119333 Russia, e-mail: zhadan@ccas.ru .