ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.956.4:517.956.8

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ В БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

С. В. Захаров

Рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром ε при старшей производной. Начальная функция, имеющая вид сглаженной ступеньки, зависит от "растянутой" переменной x/ρ, где ρ — другой малый параметр. Для приложений такая постановка задачи представляет интерес в качестве модели распространения нелинейных волн в физических системах при наличии малой диссипации. В случае, соответствующем волне сжатия, строятся асимптотические решения задачи по параметрам ε и ρ, независимо стремящимся к нулю. Предполагается, что $\rho/\varepsilon \to 0$. Вдали от линии разрыва предельного решения асимптотические решения строятся в виде рядов по степеням ε и ρ. В малой области линейного приближения асимптотическое решение строится в виде ряда по степеням отношения ρ/ε. Коэффициенты внутреннего разложения находятся из рекуррентной цепочки начальных задач. Изучена асимптотика этих коэффициентов на бесконечности. Найдено время перестройки масштаба внутренней пространственной переменной.

Ключевые слова: параболическое уравнение, задача Коши, асимптотика.

S. V. Zakharov. Two-parameter asymptotics in a bisingular Cauchy problem for a parabolic equation.

The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a small parameter ε at the highest derivative is considered. The initial function, which has the form of a smoothed step, depends on a "stretched" variable x/ρ, where ρ is another small parameter. This problem statement is of interest in applications as a model of propagation of nonlinear waves in physical systems in the presence of small dissipation. In the case corresponding to a compression wave, asymptotic solutions of the problem are constructed in the parameters ε and ρ independently tending to zero. It is assumed that $\varepsilon/\rho \to 0$. Far from the line of discontinuity of the limit solution, asymptotic solutions are constructed in the form of series in powers of ε and ρ. In a small domain of linear approximation, an asymptotic solution is constructed in the form of a series in powers of the ratio ρ/ε. The coefficients of the inner expansion are found from a recurrence chain of initial value problems. The asymptotics of these coefficients at infinity is studied. The time of reconstruction of the scale of the inner space variable is found.

Keywords: parabolic equation, Cauchy problem, asymptotics.

MSC: 34E05, 34E10, 34K26, 35K15, 35K59

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-94-103

1. Введение

Одной из актуальных задач современной математической физики является изучение особых точек решений эволюционных уравнений в частных производных [1; 2], поскольку данное направление ведет к лучшему пониманию сложных волновых процессов в физических системах [3; 4], а кроме того, к созданию и развитию новых математических методов [5; 6]. В частности, интерес к детальному изучению свойств асимптотик вблизи особых точек объясняется тем, что подобные сингулярные события сами занимают очень малое время, но во многом определяют все последующее поведение системы на конечных и больших временах [7].

[1]Работа выполнена при поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект "Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов").

Например, для нахождения сдвига фазы ударной волны, которая начинается в точке градиентной катастрофы, необходимо точно знать поведение коэффициентов асимптотического ряда в окрестности самой особой точки [8, гл. 6].

В настоящей работе рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t \geqslant 0, \qquad \varepsilon > 0, \tag{1.1}$$

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \nu(x\rho^{-1}), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \rho > 0, \tag{1.2}$$

играющая важную роль в моделировании эволюционных процессов, таких как нелинейная диффузия, гидродинамическая турбулентность [9, гл. 4], акустические волны в диссипативных средах [10; 11]. В этой задаче большой начальный градиент порождает особую точку в начале координат.

Предполагается, что функция φ бесконечно дифференцируема, а ее вторая производная строго положительна, начальная функция ν ограничена и бесконечно дифференцируема. Тогда, как известно [12, гл. 5], существует единственное ограниченное бесконечно дифференцируемое по x и t решение $u(x, t, \varepsilon, \rho)$. В данной работе проводится его асимптотический анализ при $\varepsilon \to 0$ и $\rho \to 0$. Для приложений такая постановка важна в качестве модели эволюции нелинейных волн с большим начальным градиентом при наличии малой диссипации в среде. Следует подчеркнуть, что параметры стремятся к нулю независимо. Как будет показано ниже, структура асимптотических рядов, приближающих решение $u(x, t, \varepsilon, \rho)$ или просто асимптотически удовлетворяющих уравнению (1.1) и условию (1.2), существенно зависит от соотношения параметров ε и ρ.

При $\varepsilon \to 0$ и $\rho = \mathrm{const}$, в случае, когда обобщенное решение вырожденного уравнения первого порядка (уравнение (1.1) при $\varepsilon = 0$) является гладким при $t \geqslant 0$ всюду за исключением одной гладкой линии разрыва $\{(x, t)\colon x = s(t, \rho),\ t \geqslant \rho\}$, асимптотику решения с точностью до произвольной степени параметра ε построил и обосновал А. М. Ильин [13]. Заметим, что замена переменных $x = \rho\sigma$, $t = \rho\theta$ в уравнении (1.1) и начальном условии (1.2) приводит к задаче $u_\theta + [\varphi(u)]_\sigma = \delta u_{\sigma\sigma}$, $\delta = \varepsilon/\rho$, $u(\sigma, 0) = \nu(\sigma)$. Если $\delta \to 0$, то асимптотическое приближение решения такой задачи с точностью до произвольной степени параметра δ получается непосредственно из результатов Ильина [13, формулы (4.3), (4.16), (4.17)]. Например, разложение решения в окрестности точки опрокидывания волны $(x, t) = (0, \rho)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k/4} \sum_{j=0}^{k-1} w_{k,j}(\xi, \tau) \ln^j \delta,$$

где коэффициенты $w_{k,j}(\xi, \tau)$ зависят от внутренних переменных, определяемых с помощью замены $x = \varepsilon^{3/4}\rho^{1/4}\xi$, $t = \rho + \varepsilon^{1/2}\rho^{1/2}\tau$, а главный коэффициент $w_{1,0} = -2[\varphi''(0)\Lambda]^{-1}\Lambda_\xi$ выражается через вещественный аналог функции Пирси $\Lambda(\xi, \tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2z^4 + z^2\tau + z\xi)\, dz$.

Теперь пусть соотношение параметров ε и ρ таково, что

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \to 0. \tag{1.3}$$

Будем считать, что функция ν, входящая в начальное условие (1.2), удовлетворяет следующим асимптотическим соотношениям:

$$\nu(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n^{\pm}}{\sigma^n}, \quad \sigma \to \pm\infty, \tag{1.4}$$

где $\nu_0^+ < \nu_0^-$, что физически соответствует волне сжатия. В работе [14, теорема 1] было впервые установлено, что асимптотика решения задачи (1.1), (1.2) при выполнении условий (1.3), (1.4) имеет нестандартную структуру вблизи особой точки. А именно, возникают две области со специфическими пространственно-временными масштабами, а не одна, как в других известных задачах для уравнения (1.1). Затем в [15, Theorem 1] и [16, теорема 1] была строго доказана справедливость асимптотической формулы в главном приближении равномерно в полосе $\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, $T=\mathrm{const}>0$.

В настоящей работе построен полный асимптотический ряд в меньшей из двух областей, непосредственно начинающейся от момента $t=0$, подробно исследовано поведение его коэффициентов при переходе в другую область (промежуточного разложения), а также построены асимптотические ряды для областей, отделенных от особой точки и линии разрыва решения предельной задачи.

2. Асимптотика вдали от разрыва

Исследование задачи (1.1), (1.2) удобно начать, зная решение предельной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x}=0,\quad u(x,0)=\begin{cases}\nu_0^-, & x<0,\\ \nu_0^+, & x\geqslant 0.\end{cases}\tag{2.1}$$

При $\nu_0^->\nu_0^+$ методом характеристик [17] находим обобщенное решение

$$u_{0,0}(x,t)=\begin{cases}\nu_0^-, & x<ct,\\ \nu_0^+, & x>ct,\end{cases}\qquad c=\frac{\varphi(\nu_0^+)-\varphi(\nu_0^-)}{\nu_0^+-\nu_0^-},\tag{2.2}$$

разрывное на линии $x=ct$, определяемой из соображений единственности решения задачи (2.1). Теоремы существования и единственности обобщенного решения вырожденного уравнения первого порядка содержатся в работе [18].

Прежде всего рассмотрим области вне окрестности линии разрыва и найдем внешнее разложение. Учитывая соотношение (1.4) при $\sigma\to+\infty$, в области

$$\Omega_0^+=\{(x,t)\colon x>ct+\varepsilon^{1-\delta_0},\ 0<\delta_0<1\}$$

справа от линии $x=ct$ будем строить асимптотическое решение уравнения (1.1) в виде ряда

$$\mathscr{U}^+(x,t,\varepsilon,\rho)=\nu_0^++\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\rho^{m-n}\varepsilon^n u_{m,n}^+(x,t).\tag{2.3}$$

В области $\Omega_0^-=\{(x,t)\colon x<ct-\varepsilon^{1-\delta_0}\}$ слева от линии разрыва будем строить аналогичный ряд

$$\mathscr{U}^-(x,t,\varepsilon,\rho)=\nu_0^-+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\rho^{m-n}\varepsilon^n u_{m,n}^-(x,t).\tag{2.4}$$

Формально подставляя ряды (2.3) и (2.4) в уравнение (1.1) и собирая вместе коэффициенты при $\rho^{m-n}\varepsilon^n$, приходим к рекуррентной системе начальных задач

$$\frac{\partial u_{m,n}^\pm}{\partial t}+\varphi'(\nu_0^\pm)\frac{\partial u_{m,n}^\pm}{\partial x}=F_{m,n}^\pm,\quad u_{m,n}^\pm(x,0)=\delta_{n,0}\nu_m^\pm x^{-m},\tag{2.5}$$

где $\delta_{0,0}=1$, $\delta_{n,0}=0$ при $n\neq0$,

$$F_{m,n}^\pm=\frac{\partial^2u_{m-1,n-1}^\pm}{\partial x^2}-\sum_{q=2}^{m-n}\frac{\varphi^{(q)}(\nu_0^\pm)}{q!}\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_q=m\\ j_1+\ldots+j_q=n}}\frac{\partial\left(u_{i_1,j_1}\cdot\ldots\cdot u_{i_q,j_q}\right)}{\partial x}.\tag{2.6}$$

Методом характеристик находим коэффициенты внешнего разложения

$$u_{m,n}^{\pm}(x,t) = \frac{\delta_{n,0}\nu_m^{\pm}}{[x-\varphi'(\nu_0^{\pm})t]^m} + \int\limits_0^t F_{m,n}^{\pm}(x-\varphi'(\nu_0^{\pm})(t-t'),t')dt'. \tag{2.7}$$

Поскольку $\varphi''(u) > 0$, функция $\varphi(u)$ является выпуклой книзу, а следовательно, справедливы неравенства $\varphi'(\nu_0^+) < \dfrac{\varphi(\nu_0^+)-\varphi(\nu_0^-)}{\nu_0^+-\nu_0^-} < \varphi'(\nu_0^-)$. Отсюда и из формулы (2.2) для числа c вытекает, что линия $x = \varphi'(\nu_0^+)t$ не лежит в области Ω_0^+, а линия $x = \varphi'(\nu_0^-)t$ не лежит в области Ω_0^-; тем самым знаменатель в формуле (2.7) корректно определен. Учитывая формулу (2.2) и используя соотношения (2.6) и (2.7), по индукции приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для коэффициентов* (2.7) *асимптотических рядов* (2.3) *и* (2.4) *при всех* $m \geqslant 1$ *и* $0 \leqslant n \leqslant m-1$ *справедлива формула*

$$u_{m,n}^{\pm}(x,t) = \sum_{s=n}^{m-1} \frac{\alpha_{m,n,s}^{\pm}\, t^s}{[x-\varphi'(\nu_0^{\pm})t]^{m+s}}, \tag{2.8}$$

где $\alpha_{m,n,s}^{\pm}$ *— однозначно определяемые константы,* $\nu_0^{\pm} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\nu(x)$.

В качестве примера приведем формулы для коэффициентов при ρ, ρ^2 и $\rho\varepsilon$:

$$u_{1,0}^{\pm}(x,t) = \frac{\nu_1^{\pm}}{x-\varphi'(\nu_0^{\pm})t}, \quad u_{2,0}^{\pm}(x,t) = \frac{\nu_2^{\pm}}{[x-\varphi'(\nu_0^{\pm})t]^2} + \frac{(\nu_1^{\pm})^2\varphi''(\nu_0^{\pm})t}{[x-\varphi'(\nu_0^{\pm})t]^3}, \quad u_{2,1}^{\pm}(x,t) = \frac{2\nu_1^{\pm}t}{[x-\varphi'(\nu_0^{\pm})t]^3}.$$

Согласно формуле (2.7) при $t=0$ формальные ряды (2.3) и (2.4) переходят в асимптотические ряды для начальной функции: $\mathscr{U}^{\pm}(x,0,\varepsilon,\rho) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\nu_m^{\pm}\left(\dfrac{\rho}{x}\right)^m$, тем самым асимптотически удовлетворяя начальному условию (1.2). В силу построения функций $u_{m,n}^{\pm}(x,t)$, которые являются решениями задач (2.5), ряды $\mathscr{U}^{+}(x,t,\varepsilon,\rho)$ и $\mathscr{U}^{-}(x,t,\varepsilon,\rho)$ также асимптотически удовлетворяют уравнению (1.1) в областях Ω_0^+ и Ω_0^- соответственно.

3. Окрестность особой точки

Из формулы (2.8) следует, что при достаточно малых x и t ряды (2.3) и (2.4) уже не являются асимптотическими. Для построения асимптотического решения вблизи точки $x=0$, $t=0$, удовлетворяющего начальному условию (1.2), естественно “растянуть” переменную x на величину ρ^{-1}. Чтобы уравнение (1.1) сохранило при этом эволюционный характер, производная по t должна быть того же порядка, что и правая часть, то есть порядка $\varepsilon\rho^{-2}$. Исходя из этих соображений, сделаем замену переменных

$$x = \rho\sigma, \quad t = \frac{\rho^2}{\varepsilon}\omega. \tag{3.1}$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial h}{\partial\omega} - \frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2} = -\mu\frac{\partial\varphi(h)}{\partial\sigma}, \tag{3.2}$$

где $h(\sigma,\omega) \equiv u(\rho\sigma,\rho^2\omega/\varepsilon)$, с условием $\mu = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \to 0$. Асимптотическое решение вблизи особой точки ищем в виде ряда

$$\mathscr{H}(\sigma,\omega,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n h_n(\sigma,\omega), \tag{3.3}$$

для коэффициентов которого из уравнения (3.2) и условия (1.2) получаем рекуррентную цепочку начальных задач

$$\frac{\partial h_0}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial \sigma^2} = 0, \qquad h_0(\sigma, 0) = \nu(\sigma), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial \varphi(h_0)}{\partial \sigma}, \qquad h_1(\sigma, 0) = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_n}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial E_n}{\partial \sigma}, \qquad h_n(\sigma, 0) = 0, \tag{3.6}$$

где

$$E_n = \sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(h_0)}{q!} \sum_{n_1+\ldots+n_q=n-1} \prod_{p=1}^{q} h_{n_p}, \quad n \geqslant 2. \tag{3.7}$$

Ряд (3.3) строится однозначно — все коэффициенты $h_n(\sigma, \omega)$ как решения системы задач (3.4)–(3.6) определяются единственным образом. Для нахождения области, в которой ряд (3.3) имеет смысл, и для построения асимптотик в других областях необходимо знать поведение функций $h_n(\sigma, \omega)$ на бесконечности. Как показано в работе [19], функция

$$h_0(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu(s) \exp\Big[-\frac{(\sigma - s)^2}{4\omega}\Big] ds, \tag{3.8}$$

т. е. решение задачи (3.4) с условием (1.4) при $|\sigma| + \omega \to \infty$ имеет асимптотику

$$h_0(\sigma, \omega) = R_{0,0,0}(z) + \sum_{m=1}^{N} \omega^{-m/2} \left[R_{0,m,0}(z) + \ln\omega R_{0,m,1}(z)\right] + O\left((\sigma^2 + \omega)^{-\gamma N}\right), \tag{3.9}$$

где

$$R_{0,0,0}(z) = \frac{\nu_0^-}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z}^{+\infty} e^{-y^2} dy + \frac{\nu_0^+}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-y^2} dy, \quad z = \frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}},$$

$R_{0,m,0}$ и $R_{0,m,1}$ — гладкие функции, для которых имеют место оценки $R_{0,m,l}(z) = O\big(z^m e^{-z^2}\big)$ при $|z| > 1$, $\gamma > 0$. Отметим, что согласно [16, теорема 1] для решения задачи (1.1), (1.2) равномерно в полосе $\{(x,t)\colon x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T = \mathrm{const} > 0$, справедлива формула

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = h_0\Big(\frac{x}{\rho}, \frac{\varepsilon t}{\rho^2}\Big) - R_{0,0,0}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\Big) + \Gamma\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\Big) + O\big(\mu^{1/2} \ln\mu\big)$$

при $\varepsilon \to 0$, $\rho \to 0$, $\mu = \rho/\varepsilon \to 0$, где Γ — решение задачи Коши $\Gamma_\theta + [\varphi(\Gamma)]_\eta - \Gamma_{\eta\eta} = 0$, $\Gamma(\eta, 0) = \begin{cases} \nu_0^-, & \eta < 0, \\ \nu_0^+, & \eta \geqslant 0, \end{cases}$ во внутренних переменных $\eta = x/\varepsilon$, $\theta = t/\varepsilon$.

Асимптотика решений задач (3.5) и (3.6), которые можно выразить в виде свертки

$$h_n(\sigma, \omega) = -\int\limits_0^{\omega} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega - v)}} \exp\Big[-\frac{(\sigma - s)^2}{4(\omega - v)}\Big] \frac{\partial E_n}{\partial s}\, ds\, dv, \tag{3.10}$$

при $|\sigma| + \omega \to \infty$ находится тем же методом, что был использован в работе [19].

Теорема 2. *Для решений задач* (3.4)–(3.6), *определяемых рекуррентно по формулам* (3.8) *и* (3.10), *при всех $n \geqslant 0$ справедливо асимптотическое представление* (*остающееся справедливым при дифференцировании по σ*)

$$h_n(\sigma, \omega) = \omega^{n/2} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-m/2} \sum_{l=0}^{m} (\ln\omega)^l R_{n,m,l}\Big(\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}\Big) + O\big((\sigma^2 + \omega)^{-\gamma_n N}\big) \tag{3.11}$$

при $|\sigma| + \omega \to \infty$, где $N \geqslant 1$, $R_{n,m,l}$ — гладкие функции автомодельной переменной, $\gamma_n > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=0$ справедливость разложения (3.11) вытекает их формулы (3.9). Проводя далее доказательство по индукции, предположим, что разложение (3.11) справедливо для всех $h_l(\sigma,\omega)$ при $l<n$. Полосу интегрирования $S_\omega=\{s\in\mathbb{R},\ 0\leqslant v\leqslant\omega\}$ в формуле (3.10) разобьем на два множества $D_0=\{0\leqslant s^2+v\leqslant(\sigma^2+\omega)^p,\ 0<p<1\}$ и $D_1=S_\omega\setminus D_0$; и по отдельности исследуем интегралы

$$h_n^{(0)}(\sigma,\omega)=-\iint\limits_{D_0}\frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega-v)}}\exp\Big[-\frac{(\sigma-s)^2}{4(\omega-v)}\Big]\frac{\partial E_n}{\partial s}\,dsdv,$$

$$h_n^{(1)}(\sigma,\omega)=-\iint\limits_{D_1}\frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega-v)}}\exp\Big[-\frac{(\sigma-s)^2}{4(\omega-v)}\Big]\frac{\partial E_n}{\partial s}\,dsdv.$$

После замены $v=\omega\beta,\ s=2y\sqrt{\omega\beta}$ получаем

$$h_n^{(0)}(\sigma,\omega)=-\iint\limits_{D_0'}\frac{\sqrt{\omega\beta}}{\sqrt{\pi(1-\beta)}}\exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big]\frac{\partial E_n}{\partial y}\,dyd\beta, \tag{3.12}$$

где $D_0'=\{0\leqslant\beta(1+4y^2)\leqslant(\sigma^2+\omega)^p/\omega\}$. Для независимых переменных рассмотрим отдельно множества $T_\alpha=\{(\omega,\sigma)\colon\omega\geqslant|\sigma|^\alpha\}$ и $X_\alpha=\{(\omega,\sigma)\colon\omega<|\sigma|^\alpha\}$, где $1+p<\alpha<2$. Пусть сначала $(\sigma,\omega)\in X_\alpha$, тогда при $(s,v)\in D_0$ и $(y,\beta)\in D_0'$ справедливы соотношения

$$\frac{s^2}{\omega-v}=\frac{4y^2\beta}{1-\beta}=O((\sigma^2+\omega)^{p-\alpha/2})\to0,\quad\Big|\frac{\sigma s}{\omega-v}\Big|=\Big|\frac{4yz\sqrt{\beta}}{1-\beta}\Big|=O((\sigma^2+\omega)^{(1+p-\alpha)/2})\to0,$$

$$\frac{\sigma^2}{\omega-v}\geqslant\frac{\sigma^2}{\omega}>|\sigma|^{2-\alpha}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\exp\Big[-\frac{(\sigma-s)^2}{4(\omega-v)}\Big]=O\Big(\exp\Big[-\frac{|\sigma|^{2-\alpha}}{4}\Big]\Big). \tag{3.13}$$

Кроме того, из предположения индукции, выражения (3.7) и оценки $v=O(\sigma^{2p})$, справедливой в области D_0, следует, что

$$\frac{\partial E_n}{\partial s}=O\big(\sigma^{(n-2)p}\big). \tag{3.14}$$

Используя оценки (3.13) и (3.14), из формулы (3.12) получаем

$$|h_n^{(0)}(\sigma,\omega)|\leqslant K_n|\sigma|^{(n-2)p}\exp\Big[-\frac{|\sigma|^{2-\alpha}}{4}\Big]\iint\limits_{D_0'}\frac{\sqrt{\omega\beta}\,dyd\beta}{\sqrt{1-\beta}}\leqslant K_n'|\sigma|^{c_n}\exp\Big[-\frac{|\sigma|^{2-\alpha}}{4}\Big],$$

где c_n, K_n и K_n' — некоторые константы. Теперь пусть $(\sigma,\omega)\in T_\alpha$. В этом случае удобно сделать замену

$$y=\frac{s}{2\sqrt{v}},\quad\chi=\frac{s^2+v}{4\omega},\quad dsdv=\frac{16\omega^{3/2}\sqrt{\chi}}{(1+4y^2)^{3/2}}dyd\chi.$$

Тогда

$$h_n^{(0)}(\sigma,\omega)=\Big(\frac{\omega}{\pi}\Big)^{1/2}\int\limits_0^{\varkappa_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4y^2-4\chi}}\exp\Big[-\frac{(z\sqrt{1+4y^2}-2y\sqrt{\chi})^2}{1+4y^2-4\chi}\Big]$$

$$\times\Big[\frac{2}{\sqrt{1+4y^2}}\frac{\partial E_n}{\partial y}+\frac{16y\chi}{(1+4y^2)^{3/2}}\frac{\partial E_n}{\partial\chi}\Big]dyd\chi,$$

где $\varkappa_0 = \dfrac{(\sigma^2+\omega)^p}{4\omega} = O\big((\sigma^2+\omega)^{p-\alpha/2}\big) \to 0$. С помощью этого представления приходим к разложению

$$h_n^{(0)}(\sigma,\omega) = \sum_{|l|+r\neq 0} \varkappa_0^l (\ln\varkappa_0)^r c_{n,l}(z,\omega), \quad (\sigma,\omega)\in T_\alpha,$$

в котором точный вид коэффициентов $c_{n,l}(z,\omega)$ не имеет значения, что видно из дальнейшего.

Теперь исследуем функцию $h_n^{(1)}(\sigma,\omega)$. Поскольку $\iint_{D_1} \ldots\, ds\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{4\varkappa_0/(1+4y^2)}^{1} \ldots\, d\beta$, используя предположение индукции и выражение (3.7) для E_n в правой части уравнения (3.6), получаем

$$E_n(s,v) = v^{(n-1)/2} \sum_{m=0}^{N-1} v^{-m/2} \sum_{l=0}^{m} (\ln v)^l Q_{n,m,l}(y) + O\big((s^2+v)^{-\gamma_n' N}\big),$$

$$h_n^{(1)}(\sigma,\omega) = \omega^{n/2} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-m/2} \sum_{l=0}^{m} (\ln\omega)^l$$

$$\times \iint\limits_{D_1'} \frac{\beta^{(n-m-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \sum_{r=0}^{m-l} (\ln\beta)^r \exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big] \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y) dy d\beta + O\big((\sigma^2+\omega)^{-\gamma_n N}\big),$$

где $Q_{n,m,l}$ и $\widetilde{Q}_{n,m,l,r}$ — гладкие функции медленного роста, $D_1' = \{y\in\mathbb{R},\ 4\varkappa_0/(1+4y^2) \leqslant \beta \leqslant 1\}$, $\gamma_n' > 0$, $\gamma_n > 0$. При этом оценка интеграла $\iint_{D_1} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(\omega-v)}} \exp\Big[-\dfrac{(\sigma-s)^2}{4(\omega-v)}\Big](s^2+v)^{-\gamma_n' N} ds\, dv$ получается из неравенства $s^2+v \geqslant (\sigma^2+\omega)^p$, справедливого в силу определения области D_1. Для выделения особенности при $\beta\to 0$ в интеграле

$$\iint\limits_{D_1'} \frac{\beta^{(n-m-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \sum_{r=0}^{m-l} (\ln\beta)^r \exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big] \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y)\, dy\, d\beta$$

при $m > n$ рассмотрим функцию

$$\Psi_{n,m,r}(y,\beta,z) = (\ln\beta)^r \beta^{(n-m-1)/2} \Big\{ \exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big] - \exp(-z^2) \sum_{k=0}^{m-n} \beta^{k/2} P_{2k}(y,z) \Big\};$$

в фигурных скобках из экспоненты вычитается ее частичная сумма ряда Тейлора при $\beta^{1/2}\to 0$, $P_{2k}(y,z)$ — полиномы по y и z степени $2k$. Тогда

$$\iint\limits_{D_1'} \frac{(\ln\beta)^r}{\sqrt{1-\beta}} \beta^{(n-m-1)/2} \exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big] \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y) dy\, d\beta$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int\limits_0^1 \frac{\Psi_{n,m,r}(y,\beta,z)}{\sqrt{1-\beta}} d\beta\, dy - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int\limits_0^{4\varkappa_0/(1+4y^2)} \frac{\Psi_{n,m,r}(y,\beta,z)}{\sqrt{1-\beta}}\, d\beta\, dy$$

$$+ \exp(-z^2) \sum_{k=0}^{m-n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_{2k}(y,z) \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int\limits_{4\varkappa_0/(1+4y^2)}^{1} (\ln\beta)^r \beta^{(n-m-1+k)/2} d\beta\, dy.$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы является функцией только от z; второе и третье экспоненциально малы при $(\sigma,\omega)\in X_\alpha$, а при $(\sigma,\omega)\in T_\alpha$ представляют собой суммы по ненулевым степеням $\varkappa_0$ и $\ln\varkappa_0$, которые по лемме А. Р. Данилина [20, с. 2169] (см. также [21, гл. 7, § 30]) асимптотически сокращаются при сложении с $h_n^{(0)}(\sigma,\omega)$, поскольку можно рассмотреть малую величину $\varkappa_1 = (\sigma^2+\omega)^{-1/2}$ и представить суммы с $\varkappa_0$ в виде выражений, содержащих $\varkappa_1$ и $\ln\varkappa_1$ в степенях произвольного ненулевого параметра. Таким образом, приходим к разложению (3.11), в котором (при $m > n$)

$$R_{n,m,l}(z) = \sum_{r=0}^{m-l} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int_0^1 \frac{\Psi_{n,m,r}(y,\beta,z)}{\sqrt{1-\beta}}\,d\beta\,dy.$$

При $0 \leqslant m \leqslant n$ в процедуре регуляризации нет необходимости. В этом случае

$$R_{n,m,l}(z) = \sum_{r=0}^{m-l} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int_0^1 \frac{(\ln\beta)^r \beta^{(n-m-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big]\,d\beta\,dy;$$

в частности, при $m = l = 0$ получаем формулы

$$R_{1,0,0}(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big] \frac{d\varphi(R_{0,0,0}(y))}{dy}\,dy\,d\beta,$$

$$R_{n,0,0}(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\beta^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\Big]$$
$$\times \frac{d}{dy}\Big[\sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(R_{0,0,0}(y))}{q!} \sum_{i_1+\ldots+i_q=n-1} \prod_{\alpha=1}^{q} R_{i_\alpha,0,0}(y)\Big]\,dy\,d\beta,$$

определяющие асимптотику функций h_n в главном $h_n(\sigma,\omega) \sim \omega^{n/2} R_{n,0,0}\Big(\dfrac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}\Big)$. Теорема доказана.

4. Резюме

В настоящей работе выявлена структура формальных асимптотических решений задачи (1.1), (1.2) с двумя независимыми малыми параметрами ε и ρ. Резюмируем главные результаты. В областях $\Omega_0^{\pm}$ слева и справа от линии разрыва решения предельной задачи формальное асимптотическое решение строится в виде рядов по степеням ε и ρ с гладкими коэффициентами, зависящими от x и t:

$$\mathscr{U}^{\pm}(x,t,\varepsilon,\rho) = \nu_0^{\pm} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \rho^{m-n} \varepsilon^n u_{m,n}^{\pm}(x,t).$$

Коэффициенты рядов $\mathscr{U}^+(x,t,\varepsilon,\rho)$ и $\mathscr{U}^-(x,t,\varepsilon,\rho)$ определяются как решения начальных задач (2.5) и находятся методом характеристик, а $\nu_0^{\pm} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \nu(x)$. Структура функций $u_{m,n}^{\pm}(x,t)$, установленная в теореме 1, определяется по существу левой частью уравнения (1.1), т. е дифференциальным оператором первого порядка. В силу построения функций $u_{m,n}^{\pm}(x,t)$ ряды $\mathscr{U}^+(x,t,\varepsilon,\rho)$ и $\mathscr{U}^-(x,t,\varepsilon,\rho)$ также асимптотически удовлетворяют уравнению (1.1) в областях Ω_0^+ и Ω_0^-, соответственно. В области $\Omega_1 = \{(x,t)\colon t>0,\ x^2+\varepsilon t < \rho^{\delta_1}\varepsilon^{2-\delta_1},\ 0<\delta_1<2\}$ преобладающими являются линейные по u члены уравнения (1.1). Здесь формальное асимптотическое решение строится в виде ряда

$$\mathscr{H}(\sigma,\omega,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n h_n(\sigma,\omega), \quad \text{где} \quad \mu = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{x}{\rho}, \quad \omega = \frac{\varepsilon t}{\rho^2}.$$

Коэффициенты $h_n(\sigma,\omega)$ определяются как решения начальных задач (3.4)–(3.6) по формулам (3.8) и (3.10). В силу системы уравнений (3.4)–(3.6), которым удовлетворяют функции $h_n(\sigma,\omega)$, ряд $\mathscr{H}(\sigma,\omega,\mu) = \mathscr{H}\left(x/\rho, \varepsilon t/\rho^2, \rho/\varepsilon\right)$ асимптотически удовлетворяет уравнению (1.1) и сохраняет асимптотический характер в области Ω_1. Теорема 2 утверждает, что разложение коэффициентов $h_n(\sigma,\omega)$ при $|\sigma|+\omega\to\infty$ имеет вид (3.11) в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\left\{(\sigma^2+\omega)^{-\gamma_n N}\right\}_{N=1}^{\infty}$, где $\gamma_n>0$. За время порядка $\varepsilon\mu^{\delta_1}$ в асимптотике происходит перестройка масштаба внутренней пространственной переменной от ρ к ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
2. **Сулейманов Б.И.** О решении уравнения Кортевега — де Вриза, возникающего вблизи точки опрокидывания в задачах с малой дисперсией // Письма в журн. эксперимент. и теорет. физики. 1993. Т. 58, № 11. С. 906–910.
3. **Dubrovin B., Elaeva M.** On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity // Russ. J. Math. Phys. 2012. Vol. 19, iss. 4. P. 449–460. doi: 10.1134/S106192081204005X.
4. **Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И.** От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам // Журн. эксперимент. и теорет. физики. 2010. Т. 137, вып. 1. С. 149–164.
5. **Теодорович Э.В.** Метод ренормализационной группы в задачах механики // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 2. С. 335–367.
6. On critical vehaviour in systems of Hamiltonian partial differential equations / B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein, A. Moro // J. Nonlinear. Sci. 2015. Vol. 25, iss. 3. P. 631–707. doi: 10.1007/s00332-015-9236-y.
7. **Захаров С.В.** Сингулярные асимптотики в задаче Коши для параболического уравнения с малым параметром // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 97–104.
8. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
9. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
10. **Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.** Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
11. **Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.** Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 456–466.
12. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
13. **Ильин А.М.** Об асимптотике решений одной задачи с малым параметром // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1989. Т. 53, вып. 2. С. 258–275.
14. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с двумя малыми параметрами // Докл. Акад. Наук. 2008. Т. 422, № 6. С. 733–734.
15. **Zakharov S.V.** Two-parameter asymptotics in the Cauchy problem for a quasi-linear parabolic equation // Asympt. Analysis. 2009. Vol. 63, no. 1–2. P. 49–54. doi: 10.3233/ASY-2008-0927.
16. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 699–706.
17. **Годунов С.К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
18. **Олейник О.А.** Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 3(75). С. 3–73.
19. **Захаров С.В.** О распределении тепла в бесконечном стержне // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 3. С. 379–385.
20. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
21. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила 12.12.2016

REFERENCES

1. Arnold V.I. *Singularities of caustics and wave fronts*. Dordrecht: Kluwer, 1990, Math. and Its Appl. Ser., vol. 62, 259 p. ISBN: 0-7923-1038-1. Translated under the title *Osobennosti kaustik i volnovykh frontov*, Moscow, Fazis Publ., 1996, 334 p.
2. Suleimanov B.I. Solution of the Korteweg–de Vries equation which arises near the breaking point in problems with a slight dispersion. *JETP Letters*, 1993, vol. 5, no. 11, pp. 849–849.
3. Dubrovin B., Elaeva M. On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. *Russ. J. Math. Phys.*, 2012, vol. 19, iss. 4. pp. 449–460. doi: 10.1134/S106192081204005X .
4. Garifullin R.N., Suleimanov B.I. From weak discontinuities to nondissipative shock waves. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2010, vol. 110, iss. 1, pp. 133–146. doi:10.1134/S1063776110010164 .
5. Teodorovich E.V. Renormalization group method in the problems of mechanics. *J. Appl. Math. Mech.*, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 299–326.
6. Dubrovin B., Grava T., Klein C., Moro A. On critical behaviour in systems of Hamiltonian partial differential equations. *J. Nonlinear. Sci.*, 2015, vol. 25, iss. 3, pp. 631–707. doi: 10.1007/s00332-015-9236-y .
7. Zakharov S.V. Singular asymptotics in the Cauchy problem for a parabolic equation with a small parameter. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 97–104 (in Russian).
8. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence, AMS, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5 . Original Russian text published *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
9. Whitham G.B. *Linear and nonlinear waves.* New York: John Wiley & Sons Inc., 1974, 636 p. ISBN: 0-471-94090-9 . Original Russian text published *Lineinye i nelineinye volny*, Moscow, Mir Publ., 1977, 624 p.
10. Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. *Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles.* Manchester, Manchester University Press, 1991, 308 p. ISBN: 0-7190-3275-X . Original Russian text published *Nelineinye sluchainye volny v sredakh bez dispersii*, Moscow, Nauka Publ., 1990, 216 p.
11. Kudashev V.R., Suleimanov B.I. The effect of small dissipation on the onset of one-dimensional shock waves. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 441–451. doi: 10.1016/S0021-8928(01)00050-8 .
12. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Providence: AMS, 1968, 648 p. ISBN: 0821815733 . Original Russian text published *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa.* Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p.
13. Il'in A.M. On the asymptotics of the solution of a problem with a small parameter. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1990, vol. 34, no. 2, pp. 261–279. doi: 10.1070/IM1990v034n02ABEH000629 .
14. Zakharov S.V. The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with two small parameters. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 769–770.
15. Zakharov S.V. Two-parameter asymptotics in the Cauchy problem for a quasi-linear parabolic equation. *Asympt. Analysis.*, 2009, vol. 63, no. 1–2, pp. 49–54. doi: 10.3233/ASY-2008-0927 .
16. Zakharov S.V. Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a large initial gradient and low viscosity. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 665-672. doi: 10.1134/S0965542510040081 .
17. Godunov S.K. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 416 p.
18. Oleinik O.A. Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Amer. Math. Soc. Transl., Ser.* 2, 1963, vol. 26, pp. 95–172.
19. Zakharov S.V. Heat distribution in an infinite rod. *Math. Notes* 2006, vol. 80, no. 3, pp. 366–371. doi:10.1007/s11006-006-0148-x .
20. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. doi: 10.1134/S0965542506120062 .
21. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p.

The paper was received by the Editorial Office on December 12, 2016.

Sergei Viktorovich Zakharov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematis and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: svz@imm.uran.ru.