

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ДИСКА¹

А. А. Ершов, Ю. А. Крутова

Рассматривается задача Неймана вне малой окрестности круглого плоского диска в трехмерном пространстве. Поверхность этой окрестности предполагается гладкой, ее толщина характеризуется малым параметром ε . Методом согласования построено равномерное асимптотическое разложение решения этой задачи по малому параметру ε . Задача оказалась бисингулярной, поэтому вблизи краев диска было построено дополнительное внутреннее асимптотическое разложение в так называемых растянутых переменных. Физической интерпретацией решения данной краевой задачи является потенциал скоростей идеальной жидкости при ламинарном обтекании тонкого тела, представляющего собой окрестность диска. Предполагается, что на большом удалении от диска ламинарный поток жидкости движется с единичной скоростью, что равносильно условию на потенциал $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = x_3 + O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$, где r — расстояние до начала координат. Краевым условием данной задачи является условие непротекания жидкости через поверхность тела, т.е. $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ на границе. После вычитания x_3 из решения $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ мы имеем краевую задачу для потенциала $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ возмущенного движения жидкости. Поскольку интеграл по поверхности тела от функции $\partial \tilde{u} / \partial \mathbf{n}$ равен нулю, то $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что все коэффициенты внешнего асимптотического разложения по ε имеют такое же поведение на бесконечности. Однако при приближении к краю диска они, напротив, имеют нарастающие особенности, в чем и заключается бисингулярность задачи.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, асимптотическое разложение, метод согласования, тонкое тело, ламинарный поток, идеальная жидкость.

A. A. Ershov, Yu. A. Krutova. Asymptotics of the velocity potential of an ideal fluid flowing around a thin body.

We consider the Neumann problem outside a small neighborhood of a planar disk in three-dimensional space. The surface of this neighborhood is assumed to be smooth, and its thickness is characterized by a small parameter ε . A uniform asymptotic expansion of the solution of this problem with respect to ε is constructed by the matching method. Since the problem turned out to be bisingular, an additional inner asymptotic expansion in the so-called stretched variables was constructed near the edge of the disk. A physical interpretation of the solution of this boundary value problem is the velocity potential of a laminar flow of an ideal fluid around a thin body, which is the neighborhood of the disk. It is assumed that this flow has unit velocity at a large distance from the disk, which is equivalent to the following condition for the potential: $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = x_3 + O(r^{-2})$ as $r \rightarrow \infty$, where r is the distance to the origin. The boundary condition of this problem is the impermeability of the surface of the body: $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ at the boundary. After subtracting x_3 from the solution $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$, we get a boundary value problem for the potential $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ of the perturbed flow of the motion. Since the integral of the function $\partial \tilde{u} / \partial \mathbf{n}$ over the surface of the body is zero, we have $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = O(r^{-2})$ as $r \rightarrow \infty$. Hence, all the coefficients of the outer asymptotic expansion with respect to ε have the same behavior at infinity. However, these coefficients have increasing singularities at the approach to the edge of the disk, which implies the bisingularity of the problem.

Keywords: boundary value problem, Laplace equation, asymptotic expansion, matching method, thin body, laminar flow, ideal fluid.

MSC: 35C20, 35Q35

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-77-93

Введение

Рассматривается вторая краевая задача для уравнения Лапласа вне малой окрестности круглого диска, толщина которой характеризуется малым параметром ε . Ее решение физически интерпретируется как потенциал скоростей идеальной жидкости при ламинарном обтекании тонкого дискообразного тела. Целью данной работы является выяснение асимптотического

¹Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10018).

поведения решения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Главный результат — алгоритм вычисления коэффициентов частичной суммы асимптотического разложения решения, сформулированный в разделе “Построение асимптотического разложения”. Кроме того, в теореме 3 дана явная оценка остатка в равномерной норме.

Впервые первая краевая задача для общего эллиптического уравнения с переменными коэффициентами вне малой окрестности отрезка была рассмотрена в [1]. В монографии [2, гл. III, § 2] был приведен упрощенный вариант этой задачи для уравнения Лапласа. Мы использовали схему построения асимптотики и ее обоснования из [2, гл. III, § 2]. Настоящая статья представляет собой обобщение на трехмерный случай работы [3]. Кроме того, в работе [4] была рассмотрена первая краевая задача вне той же области.

1. Постановка задачи

Пусть σ — диск $\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , $\bar{\sigma}$ — его замыкание, а σ_ε — окрестность σ (рис. 1). Край диска образует окружность

$$S = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий ширину окрестности σ_ε , так что

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon = \sigma.$$

Всюду в этой статье будут употребляться обозначения $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $r_2 = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $r_c = \sqrt{r_2^2 + x_3^2}$. Точный вид окрестности σ_ε определим следующим образом. Пусть $\sigma_\varepsilon = \{x: 0 < r_2 \leq 1, \varepsilon g_-(r_2) < x_3 < g_+(r_2)\}$, где $g_\pm(r_2) \in C^\infty(0, 1)$. Иначе говоря, σ_ε получается из тела вращения σ_1 сжатием к плоскости $x_3 = 0$ с коэффициентом ε^{-1} . Это означает, что вблизи окружности S уравнение границы $\partial\sigma_1$ имеет вид $r_2 = \psi(x_3)$, где $\psi(x_3) \in C^\infty$. Ясно, что $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi''(0) \geq 0$, и дополнительно предположим, что $\psi''(0) > 0$, т. е. кривизна кривой $\partial\sigma_1 \cap \{x: x_2 = 0\}$ в точке $x = (-1, 0, 0)$ отлична от нуля. Без ограничения общности будем считать, что $\psi''(0) = 2$. Нетрудно показать, что указанные предположения эквивалентны следующему условию на функцию $g_\pm(r_2)$:

$$g_\pm(r_2) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}} \quad \text{при } r_2 \rightarrow 0, \quad g_1 = 1. \quad (1.1)$$

Пространство \mathbb{R}^3 с разрезом σ будем обозначать Ω . Пусть $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}_\varepsilon$, $S_\delta = \{x: r_c < \delta\}$, δ — некоторое фиксированное малое положительное число.

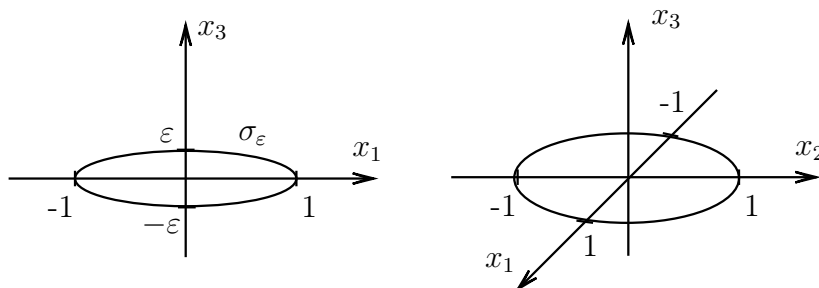


Рис. 1.

Посредством $u(x, \varepsilon) = u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ будем обозначать функцию из $u(x, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$, которая удовлетворяет условиям

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, \varepsilon) = 0, \quad x \in \partial\sigma_\varepsilon, \quad (1.3)$$

$$u(x, \varepsilon) = x_3 + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к области σ_ε .

Итак, целью данной работы является построение и обоснование асимптотического разложения функции $u(x, \varepsilon)$ — решения задачи (1.2)–(1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Задача (1.2)–(1.4) имеет следующую гидродинамическую интерпретацию [5, гл. V, § 37]. Рассматривается обтекание тела σ_ε ламинарным потоком идеальной несжимаемой жидкости. В таком случае движение жидкости является потенциальным, т. е. существует некоторая функция $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$, называемая потенциалом скоростей, такая, что скорость жидкости $V = \text{grad } u$. Условие несжимаемости означает, что $\text{div } V = 0$, но тогда $\Delta u = \text{div grad } u = 0$, т. е. выполнено уравнение (1.2). Условие (1.3) есть условие непротекания жидкости через границу тела. Условие (1.4) интерпретируется как движение жидкости с постоянной единичной скоростью, параллельной оси Ox_3 , на большом удалении от нашего объекта [5, гл. VII, § 64, 66].

2. Внешнее разложение

Внешнее разложение решения задачи (1.2)–(1.4) будем искать в виде ряда

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad (2.1)$$

где

$$\Delta u_k = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\sigma}. \quad (2.2)$$

Условие (1.4) переходит в условия

$$u_0(x) = x_3 + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$u_k(x) = O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k > 0. \quad (2.3)$$

Граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ получаются следующим образом (рис. 2).

Для удобства введем функции $\hat{u}_k(r_2, x_3) \equiv u_k(x)$. По определению производной по направлению

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x \in \sigma_\varepsilon} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)) = (\nabla \hat{u}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)), \mathbf{n}).$$

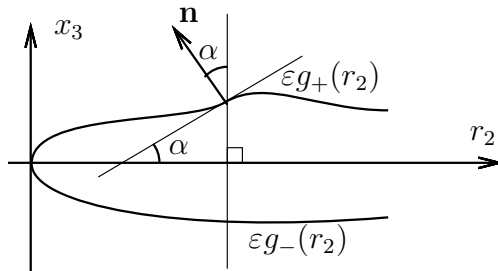


Рис. 2.

Здесь через n обозначена внешняя нормаль к области σ_ε , но выраженная через r_2 и ξ_3 . Заметим, что если мы зафиксируем точку на поверхности $\partial\sigma_\varepsilon$, то \mathbf{n} и n будут одним и тем же вектором, записанным в различных координатах.

Пусть α — угол между осью Ox_3 и нормалью \mathbf{n} . Тогда

$$\begin{aligned} n &= \pm(-\sin \alpha, \cos \alpha) = \pm\left(-\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}\right) \\ &= \pm\left(-\frac{\varepsilon g'_\pm(r_2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(r_2)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(r_2)}}\right). \end{aligned}$$

По условию (1.3) нормальная производная на границе равна нулю, т. е.

$$-\varepsilon g'_\pm(r_2) \frac{\partial \hat{u}}{\partial r_2}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)) = 0.$$

Подставляя в последнее равенство вместо \hat{u} ряд (2.1) и разлагая все функции по степеням ε , получим

$$-\varepsilon g'_\pm(r_2) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{\partial^{j+1} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^j}(r_2, \pm 0) g_\pm^j(r_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{\partial^{j+1} \hat{u}_k}{\partial x_3^{j+1}}(r_2, \pm 0) g_\pm^j(r_2) = 0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x_3}(r_2, \pm 0) = 0, \\ \varepsilon^n : \quad & -g'_\pm(r_2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k-1)!} \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}}(r_2, \pm 0) g_\pm^{n-k-1}(r_2) \\ & + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k+1} \hat{u}_k}{\partial x_3^{n-k+1}}(r_2, \pm 0) g_\pm^{n-k}(r_2) = 0, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из уравнения Лапласа в наших криволинейных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r_2^2} + \frac{1}{r_2-1} \frac{\partial u}{\partial r_2} + \frac{1}{(r_2-1)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

вытекает соотношение

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial x_3^2} = -\frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial r_2^2} - \frac{1}{r_2-1} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial r_2}. \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.4) с учетом соотношения (2.5) можно выразить

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x_3}(r_2, \pm 0) = \frac{1}{r_2-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{g_\pm^{n-k}(r_2)}{(n-k)!} (r_2-1) \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}}(r_2, \pm 0) \right)'_{r_2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, получаем следующие краевые задачи для асимптотических коэффициентов ряда (2.1):

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}, \\ \left. \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm 0} = 0, & x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u_0 = x_3 + O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_n = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{1}{r_2 - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \left((r_2 - 1) \frac{g_{\pm}^{n-k}(r_2)}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}}(r_2, \pm 0) \right)'_{r_2}, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u_n = O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Решение таких задач не представляло бы серьезных трудностей, если бы граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ были непрерывны и интеграл от граничной функции по поверхности σ был равен нулю. Но оказывается, что функции $u_k(x)$ имеют особенности на краях диска σ . Порядок этих особенностей растет с ростом k . Кроме того, разрешимость этих задач неизвестна без знания асимптотик предыдущих коэффициентов $u_k(x)$ при $r_c \rightarrow 0$.

Начнем с изучения функции $u_0(x)$. Представим ее в виде суммы $u_0(x) = x_3 + \tilde{u}_0(x)$, где $\tilde{u}_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{u}_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ \tilde{u}_0 = O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Решение такой задачи существует и непрерывно всюду, если считать различными берега разреза по диску σ , и, кроме того, оно представимо в виде некоторой суммы гармоник сплюснутого сфероида [6, § 28 б].

Удобно ввести естественные обозначения для классов функций. Классы $C(\bar{\Omega})$ ($C^N(\bar{\Omega})$) — это множества функций, определенных в $\bar{\Omega}$ и непрерывных (N раз непрерывно дифференцируемых) всюду, включая границу Ω . При этом точки на разных берегах разреза σ считаются различными точками (т. е. $(x_1, x_2, +0) \neq (x_1, x_2, -0)$ при $0 < r_2 \leq 1$). Если при этом функции определены лишь при $r_c < \delta$, то такие множества будут обозначаться $C(\bar{\Omega} \cap S_\delta)$ ($C^N(\bar{\Omega} \cap S_\delta)$). Посредством $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$ обозначим классы функций, бесконечно дифференцируемых всюду, кроме края диска $\bar{\sigma}$, а посредством $C^\infty(\bar{\Omega} \cap S_\delta \setminus S)$ — такие же функции, определенные при $r_c < \delta$. При этом берега разреза по-прежнему считаются различными.

Будем использовать криволинейные координаты (r_c, Θ, φ) , ранее введенные в работе [4] и такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (1 - r_c \cos \Theta) \cos \varphi, \\ x_2 = (1 - r_c \cos \Theta) \sin \varphi, \\ x_3 = r_c \sin \Theta. \end{array} \right.$$

В той же работе были рассмотрены гармонические функции вида

$$\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} \Phi_1(\Theta) + r_c^{\alpha+2} \Phi_2(\Theta) + \dots, \quad (2.9)$$

$$\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} F_1(\Theta) + r_c^{\alpha+2} F_2(\Theta) + \dots, \quad (2.10)$$

где параметр $-\infty < \alpha < +\infty$. В случае $\alpha > -1$ функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ представимы в виде сходящихся рядов

$$\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} \cos((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right),$$

$$\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} \sin((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right).$$

В частности,

$$\tilde{S}_0(r_c, \Theta) = 0, \quad \tilde{C}_0(r_c, \Theta) = 1,$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) &= r_c^{-1/2} \cos \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-1}{4k} \right) r_c^{-1/2+j} \cos \frac{(j+1)\Theta}{2}, \\ \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) &= r_c^{-1/2} \sin \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-1}{4k} \right) r_c^{-1/2+j} \sin \frac{(j+1)\Theta}{2}.\end{aligned}$$

Используя представления вида

$$r_c^{\alpha+k} \cos(\alpha\Theta) = r_c^k \operatorname{Re}(r_2 + ix_3)^\alpha,$$

несложно доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть параметр $\alpha > 0$. Тогда верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{C}_\alpha}{\partial r_2}(r_c, \Theta) &= \tilde{C}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{C}_{\alpha+k}(r_c, \Theta), \\ \frac{\partial \tilde{S}_\alpha}{\partial r_2}(r_c, \Theta) &= \tilde{S}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tilde{S}_{\alpha+k}(r_c, \Theta), \\ \frac{\partial \tilde{C}_\alpha}{\partial x_3}(r_c, \Theta) &= -\tilde{S}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tilde{S}_{\alpha+k}(r_c, \Theta), \\ \frac{\partial \tilde{S}_\alpha}{\partial x_3}(r_c, \Theta) &= \tilde{C}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \tilde{C}_{\alpha+k}(r_c, \Theta),\end{aligned}$$

где a_k, b_k, c_k и d_k — некоторые постоянные.

З а м е ч а н и е 1. Усложнение структуры функций $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ при $\alpha < 0$ возникает при α равном $-1, -2, \dots$, из-за того, что мы приходим к уравнению вида $\Phi''_{k+1}(\Theta) + \beta^2 \Phi_{k+1}(\Theta) = \cos(\beta\Theta)$ при вычислении коэффициента $\Phi_{k+1}(\Theta)$ ряда (2.9) при $\alpha + k = 0$. Подробно данная ситуация описана в [4]. Аналогичная проблема возникает и при построении функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$. Однако до тех пор, пока $\alpha + k < 0$, все коэффициенты $\Phi_{k+1}(\Theta)$ из (2.9) представимы в виде суммы косинусов. Поэтому при отрицательном целом α функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ представимы в виде

$$\begin{aligned}\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta) &= r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + \sum_{\substack{\alpha+k \leq 0, \\ k \geq 1}} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} \cos((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right) + \sum_{\alpha+k \geq 0} r_c^{\alpha+k} \Phi_k(\Theta), \\ \tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta) &= r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + \sum_{\substack{\alpha+k \leq 0, \\ k \geq 1}} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} d_{kj} \sin((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right) + \sum_{\alpha+k \geq 0} r_c^{\alpha+k} F_k(\Theta).\end{aligned}$$

При отрицательных дробных α функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ сохраняют представления (2.9) и (2.10).

Отсюда следует, что лемма 1 также верна и для нецелых отрицательных α , а в случае целых отрицательных α выполняются равенства вида

$$\frac{\partial \tilde{C}_\alpha}{\partial x_3}(r_c, \Theta) = -\tilde{S}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{-\alpha-1} c_k \tilde{S}_{\alpha+k}(r_c, \Theta) + p(x),$$

где $p(x)$ — некоторая функция без особенностей при $r_c \rightarrow 0$.

Из леммы 1 с учетом замечания 1, полноты системы функций $\{\tilde{C}_{j/2}, \tilde{S}_{j/2}\}_{j=0}^{\infty}$ (доказанной в [4, лемма 1; 3, теорема 1]) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть k — целое число, $h_+(r_2)$ и $h_-(r_2)$ — две функции, заданные при $0 < r_2 \leq \delta$ и такие, что $h_{\pm}(r_2) \in C^{\infty}(0, \delta]$,

$$h_{\pm}(r_2) = \left(\sum_{j=-k}^{\infty} \hat{c}_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

И пусть это равенство допускает многократное почленное дифференцирование. Тогда существует гармоническая в $\Omega_{\delta} \setminus S$ функция $u(x)$ такая, что $\frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) = -\frac{h'_{\pm}(r_2)}{1-r_2}$ при $r_2 \in (0, \delta]$, $u(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \cap \bar{S}_{\delta} \setminus S)$:

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) + \sum_{j=1}^{\infty} d_j \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta) = \sum_{j=-k}^{\infty} r_c^{j/2} \tilde{\Phi}_j(\Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Точно так же, как и в работе [4], отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть выполнены все условия леммы 2 и заданы постоянные $d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-k}$, $k > 0$. Тогда существует функция $u(x)$, которая удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 2, только вместо асимптотического разложения (2.12) для нее справедливо асимптотическое разложение вида

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) + \sum_{j=-k}^{\infty} d_j \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Кроме того, из леммы 2 следует, что разложение функции $u_0(x)$ имеет вид

$$u_0(x) = d_{0,0} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_{j,0} \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta) + c_{j,0} \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) \right),$$

где $c_{1,0} = 0$, $c_{2,0} = 1$, остальные $d_{j,0}$ и $c_{j,0}$ — некоторые коэффициенты.

Итак, $u_1(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus S)$, но вблизи краев σ функция $u_1(x)$ не является гладкой. Используя разложения функций $g_{\pm}(r_2)$ и $u_0(x)$, можно получить, что

$$g_{\pm}(r_2) \frac{\partial u_0}{\partial r_2} \Big|_{r_2=\pm 0} = \left(\pm r_2^{1/2} + \left(\sum_{j=2}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}} \right) \left(d_{1,0} r_2^{-1/2} + \dots \right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) = \pm \frac{g_2}{4} r_2^{-1/2} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow +0, \quad (2.14)$$

где $h_{1,j}$ — некоторые коэффициенты, полученные в результате перемножения соответствующих рядов в (2.6) при $n = 1$, явный вид их не важен.

Исходя из этого граничного условия и следствия 1, можно определить вид асимптотического разложения функции $u_1(x)$ при $r_c \rightarrow 0$ и следующих асимптотических коэффициентов. Однако, так как $u_k(x)$ определены в более широкой области, нежели Ω_{δ} , и, кроме того, они должны удовлетворять на бесконечности условию (2.3), докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть k — целое число, функции $h_{\pm}(r_2) \in C^{\infty}(0, 1]$, для них справедливы асимптотические разложения (2.11) при $r_2 \rightarrow +0$ и, кроме того, они таковы, что составные функции

$$\tilde{h}_{\pm}(r_2) = \begin{cases} h_{\pm}(r_2), & 0 < r_2 \leq 1, \\ h_{\pm}(2-r_2), & 1 \leq r_2 < 2, \end{cases}$$

являются бесконечно дифференцируемыми ($\tilde{h}_{\pm} \in C^{\infty}(0, 2)$). В случае $k > 0$ пусть заданы постоянные $d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-k}$.

Тогда существует функция $u(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus S)$, гармоническая в Ω и удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) &= \frac{h'_{\pm}(r_2)}{r_2 - 1}, \quad 0 < r_2 \leq 1, \\ u(x) &= O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $r_c \rightarrow 0$ для функции $u(x)$ справедливо асимптотическое разложение (2.12) при $k \leq 0$ и асимптотическое разложение (2.13) при $k > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что множество функций, имеющих разложение вида (2.11) является замкнутым относительно операций дифференцирования, умножения и сложения. Такие функции возникают вследствие преобразований ряда (1.1) при построении асимптотики. Условие (2.11) на функции $h_{\pm}(r_2)$ можно ослабить, однако нет необходимости выходить из класса функций, заданных рядами вида (2.11).

З а м е ч а н и е 3. Условие (2.15) связано с тем, что если решение задачи (1.2)–(1.4) после вычитания x_3 имеет асимптотику $O(r^{-2})$ на бесконечности, то и коэффициенты его асимптотического разложения по ε обязаны иметь такое же поведение на бесконечности. Опираясь на теорему 1, в дальнейшем мы будем проводить построение этих коэффициентов, поэтому условие (2.15) используется для их описания.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим вначале случай, когда $k \leq 0$. Как уже было отмечено во введении, в случае достаточной гладкости границы и краевых условий достаточным условием для того, чтобы наша функция $u(x)$ удовлетворяла условию (2.15) на бесконечности, является равенство нулю интеграла от граничной функции, т. е.

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 < r_2 \leq 1, \\ x_3 = 0}} \frac{h'_+(r_2)}{r_2 - 1} dS - \iint_{\substack{0 < r_2 \leq 1, \\ x_3 = 0}} \frac{h'_-(r_2)}{r_2 - 1} dS &= \begin{bmatrix} x_1 = (1 - r_2) \cos \varphi, \\ x_2 = (1 - r_2) \sin \varphi, \\ |I| = (1 - r_2) \end{bmatrix} \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 h'_+(r_2) dr_2 d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 h'_-(r_2) dr_2 d\varphi \\ &= -2\pi \left(\lim_{r_2 \rightarrow 1-0} (h_+(r_2) - h_-(r_2)) - \lim_{r_2 \rightarrow +0} (h_-(r_2) - h_+(r_2)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь $|I|$ — якобиан замены; условием является только последний знак равенства.

В силу (2.11) равенство (2.16) всегда выполняется при $k \leq 0$. Поскольку задача разрешима, то возьмем ее решение $u(x)$, которое стремится к нулю на бесконечности, и измерим значения функции $u(x)$ на торе $r_c = \delta$. Совокупность этих значений образует некоторую функцию $f(\Theta) \in C[0, 2\pi]$, а сама функция $u(x)$ является также и единственным решением из класса функций $C^{\infty}(\Omega \cap S_{\delta}) \cap C(\bar{\Omega} \cap \bar{S}_{\delta})$ следующей смешанной краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \cap S_{\delta}, \\ u|_{r=\delta} = f(\Theta), & \Theta \in [0, 2\pi], \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm 0} = \frac{(h_{\pm}(r_2))'_{r_2}}{r_2 - 1} \underset{r_2 \rightarrow +0}{\text{ac.}} \left(\left(\sum_{j=-k}^{\infty} q_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}} \right)'_{r_2}. \end{cases}$$

В силу полноты системы $\{\tilde{C}_{j/2}, \tilde{S}_{j/2}\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве осесимметричных функций (не зависящих от φ), определенных на торе с надрезом $\bar{\Omega} \cap \bar{S}_{\delta}$ (см., [4]), у данной задачи существует решение в виде ряда

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} \left(c_j \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) + d_j \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta) \right),$$

где $c_{-k} = q_{-k}$, $c_{-k+1} = q_{-k+1} - q_{-k}/4, \dots$.

2. Предположим, что $h_{\pm}(r_2) = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} c_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}$ при $r_2 \rightarrow +0$.

Представим в виде суммы $h_{\pm}(r_2) = s_{\pm}(x_1) + p_{\pm}(x_1)$, где $s_{\pm}(r_2) = \frac{c_{-1}}{\pm\sqrt{r_2}}\chi_1(r_2)$, $p_{\pm}(r_2) = h_{\pm}(r_2) - \frac{c_{-1}}{\pm\sqrt{x_1}}\chi_1(r_2)$, $\chi_1(r_2)$ — срезающая функция, которая тождественно равна единице при $r_2 \leq \delta_1 - \hat{\delta}$ и тождественно равна нулю при $r_2 \geq \delta_1 + \hat{\delta}$, $0 < \delta < 1$, $0 < \hat{\delta} \ll \delta_1$.

Функцию $u(x)$ будем искать в виде суммы $u_1(x) + u_2(x)$, где функция u_1 является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{s'_{\pm}(r_2)}{r_2 - 1}, & 0 < r_2 < 1, \\ u_1(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty, \end{cases}$$

а функция u_2 — решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{p'_{\pm}(r_2)}{r_2 - 1}, & 0 < r_2 < 1, \\ u_2(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

В случае с u_2 имеет место предыдущий случай. Рассмотрим функцию u_1 . В классе ограниченных бесконечно дифференцируемых функций эта задача неразрешима, поскольку интеграл поверхности σ от производной функции u_1 по внешней нормали к σ не только не равен нулю, но и вообще расходится. Однако эта задача разрешима в классе функций с особенностью на крае диска σ . Будем искать u_1 также в виде суммы $u_1(x) = c_{-1}\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c) + c_{-1}\tilde{u}_1(x)$, где $\tilde{u}_1(x)$ — гладкая функция, а $\chi_2(r_c)$ — гладкая функция, меняющая свое значение с 1 до 0 в $\hat{\delta}$ -окрестности поверхности $r_c = \delta_2$. Таким образом, $\tilde{u}_1(x)$ — это решение задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_1(x) = -\Delta(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{(\pm r_2^{-1/2}\chi_1(r_2))'_{r_2}}{r_2 - 1} - \frac{\partial}{\partial x_3}(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) \Big|_{x_3=\pm 0}, & 0 < r_2 \leq 1. \end{cases}$$

Докажем, что можно выбрать такое δ_2 , чтобы существовало решение $\tilde{u}(x)$, которое стремится к нулю на бесконечности, как $O(r^{-2})$. В этом случае $u_1(x)$ и вся функция $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ будет стремиться к нулю на бесконечности, как $O(r^{-2})$. Заметим, что для того чтобы $\tilde{u}_1(x) = O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$, должно выполняться равенство

$$\iint_{\partial\sigma} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}} dS + \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \Delta(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) dx = 0.$$

Вычислим эти два интеграла:

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\sigma} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}} dS \approx 2(\delta_1^{-1/2} - \delta_2^{-1/2}), \\ & \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \Delta(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) dx \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_c^2} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} - \frac{\cos \Theta}{1 - r_c \cos \Theta} \frac{\partial}{\partial r_c} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) (\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) dx \end{aligned}$$

$$\approx \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} (\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_2(r_c)) dx \approx \iint_{r_c = \delta_2} \frac{1}{\delta_2} (-\delta_2^{-1/2}) \sin \frac{\Theta}{2} dS = -8\pi \delta_2^{-3/2}.$$

Постоянную δ_2 можно приближенно найти из уравнения $2(\delta_1^{-1/2} - \delta_2^{-1/2}) \approx 8\pi \delta_2^{-3/2}$. Очевидно, что решение такого уравнения всегда существует, точное решение не важно.

Докажем, что существует функция $u_3(x) = \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) + \tilde{u}_3(r_c, \Theta)$, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_3 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \sigma} = 0, & 0 < r_2 \leq 1, \\ u_3(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где $\chi_3(r_c)$ — срезающая функция, аналогичная $\chi_2(r_c)$, меняющая свое значение с 1 до 0 в окрестности $r_c = \delta_3$, а $\tilde{u}_3(r_c, \Theta)$ — это гладкая функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_3 = -\Delta(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \sigma} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)), & 0 < r_2 \leq 1, \\ \tilde{u}_3(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Действительно, в силу леммы 1 $\frac{\partial}{\partial x_3}(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)) \Big|_{x_3 = \pm 0} = 0$.

Используя первую формулу Грина (см., например, [7, § 6.1]), вычислим

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3 / \sigma} \Delta(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)) dx &= \iiint_K (1 \cdot \Delta(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)) - \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) \cdot \Delta 1) dx \\ &= \iint_K \left(1 \cdot \frac{\partial(\tilde{C}_{-1/2} \cdot \chi_3)}{\partial \mathbf{n}_K} - \tilde{C}_{-1/2} \cdot \chi_3 \frac{\partial 1}{\partial \mathbf{n}_K} \right) dS = \iint_K \frac{\partial(\tilde{C}_{-1/2} \chi_3)}{\partial \mathbf{n}_K} dS = \iint_{r_c = \delta_3 - \hat{\delta}} \frac{\partial \tilde{C}_{-1/2}}{\partial r_c} dS \\ &= - \iint_{\substack{r_c = \delta_3 - \hat{\delta}, \\ x_3 > 0}} \frac{\partial \tilde{C}_{-1/2}}{\partial r_c} dS - \iint_{\substack{r_c = \delta_3 - \hat{\delta}, \\ x_3 < 0}} \frac{\partial \tilde{C}_{-1/2}}{\partial r_c} dS = 0 \end{aligned}$$

в силу нечетности $\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta)$ относительно плоскости $x_3 = 0$. Здесь $K = \{\delta_3 - \hat{\delta} < r_c < \delta_3 + \hat{\delta}\} \setminus \sigma$ — область, внутри которой меняет свое значение срезающая функция $\chi_3(r_c)$, \mathbf{n}_K — внешняя нормаль к области K .

Заметим, что $u_3(x) \neq 0$, так как $\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) \rightarrow \infty$ при $r_c \rightarrow 0$, а $\tilde{u}_3(x)$ — ограниченная функция.

Итак, $u(x) = c_{-1} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_2(r_c) + c_{-1} \tilde{u}_1(x) + u_2(x) + d_{-1} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) + d_{-1} \tilde{u}_3(x)$, где d_{-1} — произвольная постоянная. При этом $c_{-1} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_2(r_c) + d_{-1} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) = c_{-1} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) + d_{-1} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta)$ при достаточно малых r_c , а функция $c_{-1} \tilde{u}_1(x) + u_2(x) + d_{-1} \tilde{u}_3(x)$ имеет разложение вида (2.12).

Таким образом, мы доказали, что для данного случая такая функция $u(x)$ существует и имеет разложение вида (2.13).

Аналогичные действия можно произвести в случае других особенностей краевых условий. Теорема 1 доказана.

Итак, согласно теореме 1 и условию (2.14)

$$u_1(x) = d_{0,1} + \frac{g_2}{2} r_c^{1/2} \sin \frac{\Theta}{2} + d_{1,1} r_c^{1/2} \cos \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_{j,1}(\Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

Граничное условие для функции $u_2(x)$ имеет вид

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm 0} = \frac{1}{r_2 - 1} \left(\frac{g_{\pm}^2(r_2)}{2} (r_2 - 1) \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial r_2 \partial x_3} (r_2, \pm 0) + g_{\pm}(r_2) (r_2 - 1) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial r_2} (r_2, \pm 0) \right)'_{r_2}. \quad (2.18)$$

Согласно теореме 1 из этого вида граничного условия также следует разрешимость задачи на $u_2(x)$ в классе функций $C^\infty(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$.

Если учесть асимптотические разложения (1.1), (2.17) и краевое условие $\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x_3} = 0$ на поверхности диска σ_0 , то можно найти

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm 0} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{d}_{j,2} z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0,$$

где $\tilde{d}_{j,2}$ — некоторые коэффициенты.

В соответствии с теоремой 1 можно построить гармоническую и ограниченную в Ω функцию $u_2(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus C)$, которая удовлетворяет условию (2.18) и имеет следующее разложение при $r \rightarrow 0$:

$$u_2(x) = d_{0,2} + \sum_{j=1}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_{j,2}(\Theta).$$

Однако впоследствии окажется, что на самом деле функция $u_2(x)$ может иметь особенности на краю диска σ_0 , а в разложении не хватает слагаемого $d_{-1,2} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) + c_{-1,2} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)$.

Граничная функция для коэффициента $u_3(x)$ уже имеет неинтегрируемую особенность на краю диска $\bar{\sigma}_0$. Действительно, согласно условию (2.6)

$$\hat{u}_3(r_2, \pm 0) = \frac{1}{r_2 - 1} \left(\sum_{k=0}^2 \frac{g_{\pm}^{3-k}(r_2)}{(3-k)!} (r_2 - 1) \frac{\partial^{3-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{2-k-1}} (r_2, \pm 0) \right)'_{r_2} = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \tilde{c}_{j,3} z^j \right)'_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow +0.$$

Следовательно, функция $u_3(x)$ неограничена около края диска σ_0 ; при приближении к краю σ_0 она растет, по крайней мере, как $r_c^{-1/2}$. Однако после согласования асимптотических разложений окажется, что она может расти, и как r_c^{-1} . В классе таких функций в соответствии с теоремой 1 существует решение $u_3(x)$, определенное с точностью до произвольных постоянных $c_{-1,3}$, $c_{-2,3}$.

Теорема 2. *Существуют функции $u_k(x)$, которые удовлетворяют соотношениям (2.2), (2.3), (2.6) и имеют асимптотические разложения*

$$u_k(x) = \sum_{j=-k+1}^{\infty} d_{j,k} \tilde{C}_{j/2}(x) + c_{j,k} \tilde{S}_{j/2}(x) = \sum_{j=-k+1}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_{j,k}(\Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

При определении каждой функции $u_k(x)$ для $k \geq 2$ имеются произвольные постоянные $d_{-1,k}$, $d_{-2,k}$, \dots , $d_{-k+1,k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко провести по индукции, опираясь на теорему 1. При $k \leq 3$ это утверждение уже проверено. Если утверждение верно для всех $k < n$, то при построении функции $u_n(x)$ остается лишь убедиться в том, что асимптотическое разложение функции $(r_2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_{\pm}^{n-k}(r_2)}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}} (r_2, \pm 0)$ в граничном условии (2.6) начинается с члена $r_2^{(-n+1)/2}$. Действительно, главный член асимптотики в сомножителе $[g_{\pm}(r_2)]^{n-k}$ равен $r_2^{(n-k)/2}$, а в сомножителе $\frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}} (r_2, \pm 0)$ главный член по предположению индукции и в силу асимптотического разложения (2.19) равен $r_2^{-\frac{k-1}{2} - (n-k)}$. Отсюда и из теоремы 1 следует существование искомой функции $u_n(x)$.

Теорема 2 доказана.

3. Внутреннее разложение

Вблизи края диска коэффициенты внешнего асимптотического разложения имеют нарастающие особенности, поэтому в соответствии с методом согласования асимптотических разложений будем использовать в окрестности края диска другое асимптотическое разложение. В качестве внутренних переменных возьмем $\rho = \varepsilon^{-2}r$, $\rho_2 = \varepsilon^{-2}r_2$, $\rho_c = \varepsilon^{-2}r_c$, $\xi_3 = \varepsilon^{-2}x_3$, и те же самые углы φ и θ . Уравнение поверхности $\partial\sigma_\varepsilon$ в этих переменных примет вид

$$\xi_3 = \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_\pm(\rho_2, \varepsilon), \quad (3.1)$$

где

$$\Phi_\pm(\rho_2, \varepsilon) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2} \varepsilon^j z^{j+2} \right)_{z=\pm\sqrt{\rho_2}}, \quad \varepsilon\sqrt{\rho_2} \rightarrow 0.$$

Посредством D обозначим область $\{(\rho_2, \xi_3, \varphi) : \rho_2 < \xi_3^2, \xi_3 \in \mathbb{R}\}$, через n_D — внутреннюю нормаль к области D .

Граничное условие (1.3) для функции $v(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) \equiv u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ переходит в равенство

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_\pm(\rho_2, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (3.2)$$

Внутреннее разложение будем искать в виде ряда

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\rho_2, \xi_3). \quad (3.3)$$

(Здесь $v_0(\rho_2, \xi_3) \equiv 0$, так как $\tilde{u}_0(0, 0) = 0$.)

Уравнение (1.2) в координатах (ρ_2, ξ_3, φ) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^2 v}{\partial r_2^2} - \frac{1}{\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2\rho_2)} \frac{\partial v}{\partial \rho_2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon^2\rho_2)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_3^2} = 0.$$

Подставляя в него ряд (3.3), получим уравнения для коэффициентов внутреннего разложения

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v_0 = 0, \quad \Delta_{\rho_2, \xi_3} v_{2i} = \sum_{j=0}^i \rho_2^j \frac{\partial v_{2(i-1)-2j}}{\partial \rho_2}, \quad i \geq 1, \quad (3.4)$$

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v_1 = 0, \quad \Delta_{\rho_2, \xi_3} v_{1+2i} = \sum_{j=0}^i \rho_2^j \frac{\partial v_{2i-1-2j}}{\partial \rho_2}, \quad i \geq 1. \quad (3.5)$$

Заметим, что по построению данным уравнениям удовлетворяют коэффициенты разложения функций $\tilde{C}_\alpha(\varepsilon^2\rho_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(\varepsilon^2\rho_c, \Theta)$ по ε .

Подставляя ряд (3.3) в граничное условие (3.2), можно получить граничные условия вида

$$\pm \frac{\partial v_k}{\partial n_D} \Big|_{\partial D} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\rho_2}}} \frac{d}{d\rho_2} \Psi_{k, \pm}(\rho_2), \quad (3.6)$$

где $\Psi_{k, \pm}(\rho_2)$ — некоторые функции от ρ_2 , выражающиеся через функции v_0, \dots, v_{k-1} и Φ_\pm . Явная формула для функций $\Psi_{k, \pm}(\rho_2)$ при произвольном k не имеет большого значения, но важно следующее свойство функций v_k и пар функций $\Psi_{k, \pm}(\rho_2)$: все они разлагаются в ряды вида $v_k(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2}) = \sum_j c_{kj}(\pm\sqrt{\rho_2})^j$ при $\rho_2 \rightarrow \infty$, причем это свойство сохраняется при их сложении, перемножении и дифференцировании.

Приближенно заменяя границу (3.1) на параболу $\xi_3 = \pm\sqrt{\rho_2}$, будем искать функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ при $\rho_2 < \xi_3^2$. При нахождении $v_i(\xi, \eta)$ мы будем опираться на уже построенные функции $u_k(x)$ и на условие согласования рядов U и V .

Заметим, что для [2, лемма 2.2] мы можем сформулировать аналог, заменив первое краевое условие вторым, с аналогичным доказательством. Из него, в свою очередь, вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть ряд $\tilde{v} = \sum_{j=-k}^{\infty} \rho_c^{-j/2} \Phi_j(\Theta)$, где k — некоторое натуральное число, является ф. а. р. краевой задачи

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v = F(\rho_2, \xi_3) \text{ в области } D, \quad (3.7)$$

$$\pm \frac{\partial v}{\partial n_D} \Big|_{\partial D} = \frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{4\rho_2 + 1}} \frac{d}{d\rho_2} \Psi_{\pm}(\rho_2), \quad \rho_2 \geq 0, \quad (3.8)$$

при $\rho \rightarrow \infty$, где $F(\rho_2, \xi_3) \in C^\infty(\overline{D})$, $\Psi_{\pm}(\rho_2) \in C^\infty(\{\rho_2 \geq 0\})$; кроме того, функции $\Psi_{\pm}(\rho_2)$ необходимым образом согласованы, чтобы обеспечить бесконечную дифференцируемость граничной функции в условии (3.8), записанной от переменной ξ_3 , по всей границе (в частности, $\Psi_+(0) = \Psi_-(0)$). Пусть $r_{0,+}$ и $r_{0,-}$ — это коэффициенты при нулевой степени ρ_2 при разложении функций $\Psi_{\pm}(\rho_2)$ в ряд при $\rho_2 \rightarrow \infty$, и пусть $r_{0,+} = r_{0,-} = r_0$. Предположим также, что равенства (3.7) и (3.8) допускают дифференцирование любого порядка в том смысле, что правые части этих равенств разлагаются в асимптотические ряды, полученные соответствующим почленным дифференцированием ряда \tilde{v} . Тогда существует функция $v(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.7) и соотношению (3.8) с точностью до $O(\varepsilon^2 \rho_c)$ и такая, что

$$v(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) = \tilde{v} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{-j} \left(c_j \tilde{S}_{j/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) + d_j \tilde{C}_{j/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) \right), \quad \rho_c \in (\varepsilon^{-\beta}, \varepsilon^{-\alpha}), \quad (3.9)$$

где $0 < \alpha < \beta < 2$.

З а м е ч а н и е 4. Лемму 3 мы будем использовать при построении коэффициентов $v_k(\rho_2, \xi_3)$ внутреннего разложения. При этом коэффициенты разложения функции (3.9) по ε будут добавлены к функциям $v_k(\rho_2, \xi_3)$, $v_{k+2}(\rho_2, \xi_3)$, $v_{k+4}(\rho_2, \xi_3)$, ... Эти добавки будут удовлетворять рекуррентным уравнениям (3.4), (3.5), хотя граничные условия будут изменены.

4. Построение асимптотического разложения

Построение коэффициентов рядов (2.1) и (3.3) — функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ — удобно проводить, опираясь на таблицу согласования этих рядов (см., например, [2]). В нашей таблице второй индекс i будем брать по номеру раскладываемой функции внутреннего разложения.

Построим в соответствии с теоремой 2 функции u_k . При этом функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ определены однозначно, а для $k \geq 2$ при определении каждой функции имеется $k - 1$ произвольных постоянных $d_{-k+1,1}$, $d_{-k+2,2}$, ..., $d_{-1,k-1}$. Фиксируем пока эти постоянные каким-нибудь образом и выпишем в нижних частях клеток каждой строки в таблице асимптотическое разложение функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $r_c \rightarrow 0$. После перехода к внутренним переменным ρ_2 , ξ_3 (так что $r_c = \varepsilon^2 \rho_c$, а полярный угол Θ сохраняет свое значение) в столбцах таблицы появятся ряды $\varepsilon^i V_i$.

Т а б л и ц а

$U \setminus V$	$\varepsilon v_1(\rho_2, \xi_3)$	$\varepsilon^2 v_2(\rho_2, \xi_3)$	$\varepsilon^3 v_3(\rho_2, \xi_3)$...
$u_0(x)$	$\varepsilon \rho_c^{1/2} (d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^2 \rho_c (d_{2,2} \cos \Theta + c_{2,2} \sin \Theta)$	$\varepsilon^3 \rho_c^{3/2} (d_{3,3} \cos \frac{3\Theta}{2} + c_{3,3} \sin \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{4} c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$...
	$r_c^{1/2} (d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$r_c (d_{2,2} \cos \Theta + c_{2,2} \sin \Theta)$	$r_c^{3/2} (d_{3,3} \cos \frac{3\Theta}{2} + c_{3,3} \sin \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{4} c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon d_{0,1}$	$\varepsilon^2 \rho_c^{1/2} (d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 \rho_c (d_{2,3} \cos \Theta + c_{2,3} \sin \Theta)$...
	$\varepsilon d_{0,1}$	$\varepsilon r_c^{1/2} (d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon r_c (d_{2,3} \cos \Theta + c_{2,3} \sin \Theta)$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon \rho_c^{-1/2} (d_{-1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^3 \rho_c^{1/2} (d_{1,3} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,3} \sin \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{-1,1} \cos \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{-1,1} \sin \frac{3\Theta}{2})$...
	$\varepsilon^2 r_c^{-1/2} (d_{-1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^2 r_c^{1/2} (d_{1,3} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,3} \sin \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{-1,1} \cos \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{-1,1} \sin \frac{3\Theta}{2})$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon \rho_c^{-1} (d_{-2,1} \cos \Theta + c_{-2,1} \sin \Theta)$	$\varepsilon^2 \rho_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 (d_{0,3} + \frac{1}{4} d_{-2,1} \cos 2\Theta - \frac{1}{4} c_{-2,1} \sin 2\Theta)$...
	$\varepsilon^3 r_c^{-1} (d_{-2,1} \cos \Theta + c_{-2,1} \sin \Theta)$	$\varepsilon^3 r_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 (d_{0,3} + \frac{1}{4} d_{-2,1} \cos 2\Theta - \frac{1}{4} c_{-2,1} \sin 2\Theta)$	
...

Лемма 4. *Ряды V_i являются ф.а.р. краевых задач (3.4)–(3.6).*

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы из [2, гл. III, §2, лемма 4]. \square

Далее, опираясь на лемму 3, можно по асимптотическим рядам V_i построить функции $v_i(\xi, \eta)$ — решения задач (3.4)–(3.6). Если бы ряды V_i являлись асимптотическими рядами для функций $v_i(\rho_2, \xi_3)$ при $\rho_c \rightarrow \infty$, то по построению рядов V_i было бы выполнено условие согласования рядов (2.1) и (3.3). Но, как следует из леммы 3, асимптотический ряд для

функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ может отличаться от ряда V_i на некоторый ряд

$$H_i = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_c^{-j/2} \left(C_{j,i} \sin \frac{j\Theta}{2} + D_{j,i} \cos \frac{j\Theta}{2} \right),$$

удовлетворяющий однородному граничному условию $\frac{\partial H_i}{\partial n_D}(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2}) = 0$, поэтому построение функций $v_i(\rho_2, \xi_3)$ надо проводить последовательно.

Сначала построим функцию $v_1(\rho_2, \xi_3)$ по ряду V_1 . В результате первый столбец в таблице изменится, начиная с члена $\varepsilon^2 r_c^{-1/2} (d_{-1,1} \cos(\Theta/2) + c_{-1,1} \sin(\Theta/2))$: изменится коэффициент $c_{-1,1}$. Кроме того, изменятся столбцы правее V_1 : они заполнятся коэффициентами разложения соответствующей функции (3.9) по ε . Но в результате, опираясь на теорему 2, окончательно построим функцию $u_2(x)$.

Так как изменение функции $u_2(x)$ влечет за собой изменения в граничных условиях для следующих функций $u_k(x)$, то все они, вообще говоря, изменятся. Но их главные члены асимптотики, стоящие в первом столбце таблицы, уже окончательно определены. Ряды V_i при $i \geq 2$ также изменятся, но в силу леммы 4 они по-прежнему останутся ф.а.р. задач (3.4)–(3.6). Далее, в соответствии с леммой 3 построим функцию $v_2(\rho_2, \xi_3)$ по ряду V_2 , стоящему во втором столбце. Теперь этот столбец изменится, начиная с члена $\varepsilon^2 \rho_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos(\Theta/2) + c_{-1,2} \sin(\Theta/2))$. Это дает возможность окончательно определить $u_3(x)$ и т. д.

Таким образом, построены функции $u_k(x)$ — решения задач (2.7), (2.8) и функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ — решения задач (3.4)–(3.6), так что для рядов (2.1) и (3.3) выполнено условие согласования

$$A_{N_1, \xi} A_{N_2, x} U = A_{N_2, x} A_{N_1, \xi} V \quad \text{для любых } N_1, N_2,$$

где $A_{N, y}$ — оператор взятия частичной суммы, записанной в переменных y , содержащей степени ε с показателями не выше N (см. [2, с. 19]).

Тем самым построение асимптотических разложений решения задачи (1.2)–(1.4) закончено. Необходимо только отметить, что функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ определены лишь в области D , т. е. при $\rho_2 < \xi_3^2$. Однако в окрестности края диска требуется приблизить решение $u(x, \varepsilon)$ при $-\sqrt{\rho_2} + \varepsilon \Phi_-(\rho_2, \varepsilon) \leq \xi_3 \leq \sqrt{\rho_2} + \varepsilon \Phi_+(\rho_2, \varepsilon)$, т. е., может быть, в более широкой области, чем D . Для упрощения будем считать, что в некоторой фиксированной окрестности края $g_+(r_2) \geq \sqrt{r_2}$ и $g_-(r_2) \leq -\sqrt{r_2}$, так что функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ определены всюду в пересечении этой окрестности с Ω_ε .

5. Обоснование асимптотического разложения

Пусть срезающая функция $\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi(x) = 0$ вне $S_{2\delta}$ и $\chi(x) = 1$ внутри S_δ . Введем обозначение

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N, x} U + (A_{N, \xi} V - A_{N, \xi} A_{N, x} U) \chi(x) - u(x, \varepsilon),$$

где U — ряд (2.1), V — ряд (3.3).

Теорема 3. Для всех достаточно больших N всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка $|T_N(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{N/4-3}$, где постоянная M не зависит от x и ε .

Доказательство можно провести полностью аналогично [2, гл. III, § 2]. Действительно, так как все функции осесимметричны, то можно воспользоваться полученной в [3] оценкой $\Delta T_N = O(\varepsilon^{N-1})$ в Ω_ε . Так же можно оценить

$$\left. \frac{\partial T_N}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \sigma_\varepsilon} = O(\varepsilon^{N/4-11/4}).$$

Затем можно воспользоваться устойчивостью факторизованной задачи Неймана [8] и получить требуемое утверждение.

Теорема 3 доказана.

Следствие 2. В области $\Omega_\varepsilon \cap \{r_c > \varepsilon^\gamma\}$ ряд (2.1) является равномерным асимптотическим разложением решения задачи (1.2)–(1.4). В области $\Omega_\varepsilon \cap \{r_c < \varepsilon^\gamma\}$ ряд (3.3) является равномерным асимптотическим разложением той же задачи, где γ — любое число такое, что $0 < \gamma < 2$.

Доказательство аналогично [2, гл. III, § 2]. □

6. Заключение

Заметим, что с точки зрения построения асимптотики в трехмерном случае, в отличие от двумерного, интересными случаями тонких тел являются тела, сжатые по одной или двум координатам из трех. В работах [2, гл. III, § 2; 3] рассмотрены первая и вторая внешние краевые задачи вне сжатой по одному измерению двумерной области. В работе [9] рассмотрены первая и вторая краевые задачи в трехмерном пространстве вне области, представляющей собой малую окрестность отрезка, т. е. сильно сжатой по двум измерениям. В [4] и в настоящей работе рассмотрен случай сжатия дырки в трехмерном пространстве в одном измерении (первая и вторая краевые задачи соответственно). Таким образом, построена асимптотика решений внешних краевых задач для уравнения Лапласа во всех в некотором смысле основных случаях в двумерном и трехмерном пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141), № 4. С. 514–537.
2. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
3. Ершов А.А. Асимптотика решения задачи Неймана вне малой окрестности отрезка // Сб. тр. Том 2: Физика. Химия. Математика / отв. редакторы Е.Г. Екомасов, Б.Н. Хабибуллин. Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. С. 177–182.
4. Ершов А.А. Задача об обтекании тонкого диска // Вестн. ЧелГУ. Сер. Математика. Механика. 2011. Вып. 14, № 27 (242). С. 61–78.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1950. 676 с.
6. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 604 с.
7. Ильин А.М. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2005. 192 с.
8. Олейник О.А. Об устойчивости задачи Неймана // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, вып. 1 (67). С. 223–225.
9. Федорюк М.В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Тр. семинара С.Л. Соболева. 1980. № 1. С. 113–131.

Ершов Александр Анатольевич

Поступила 30.11.2016

канд. физ.-мат. наук,

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент кафедры вычислительной математики

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: ale10919@yandex.ru

Крутова Юлия Александровна

магистрант

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: lulia_74rus@mail.ru

REFERENCES

1. Il'in A.M. A boundary value problem for the elliptic equation of second order in a domain with a narrow slit. 1. The two-dimensional case. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 4, pp. 459–480. doi: 10.1070/SM1976v028n04ABEH001663.
2. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence: AMS, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 334 p.
3. Ershov A.A. Asymptotic behavior of the solution of the Neumann problem outside a small neighborhood of a segment. *Proceedings, vol. 2: Physics. Chemistry. Mathematics*, eds. E.G. Ekomasov, B.N. Khabibullin, Ufa, Editorial and Publishing Center (RITs) Bashkirskii Gos. Universitet, 2015, pp. 177–182 (in Russian).
4. Ershov A.A. The problem of the flow around a thin disk. *Vestn. Chelyainskii Gos. Universitet., Ser. Mat. Mekh. Inf.*, 2011, iss. 14, no. 27 (242), pp. 61–78 (in Russian).
5. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of liquids and gases*. New York etc., Pergamon Press, 1966, 804 p. Original Russian text published in *Mekhanika zhidkosti i gaza*, Moscow, Nauka Publ., 1950, 676 p.
6. Smythe W.R. *Static and dynamic electricity*, vol. 3. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1950, 616 p. Translated under the title *Elektrostatika i elektrodinamika*, Moscow, Izd-vo Inostrannoi Literatury, 1954, 604 p.
7. Il'in A.M. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 192 p. ISBN: 978-5-9221-1036-5.
8. Oleinik O.A. On the stability of the Neumann problem. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 1 (67), pp. 223–225 (in Russian).
9. Fedoryuk M.V. The Dirichlet problem for the Laplace operator in the exterior of a thin rotation solid. *Trudy Seminara S. L. Soboleva*, 1980, no. 1, pp. 113–131 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on November 30, 2016.

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, 454001 Russian, e-mail: ale10919@yandex.ru.

Iuliya Aleksandrovna Krutova, graduate student, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russian, e-mail: lulia_74rus@mail.ru.