ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ[1]

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

При исследовании сингулярно возмущенных задач оптимального управления используется известный и хорошо развитый метод пограничных функций построения асимптотики решения краевых задач, к которым приводят условия оптимальности управления. Такой подход эффективен для задач с гладкими управляющими воздействиями из открытой области. Задачи с замкнутой и ограниченной областью управления исследованы менее полно. Как правило, изучаются случаи, когда управление является скалярной или многомерной функцией со значениями из выпуклого многогранника. В последнем случае оптимальное управление кусочно-постоянно со значениями в вершинах многогранника, поэтому ключевым здесь является описание асимптотики точек переключения оптимального управления. В настоящей работе исследована одна задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы с гладкими геометрическими ограничениями на управление в виде шара. Основное отличие от ранее рассмотренных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае матрица при быстрых переменных представляет собой многомерный аналог жордановой клетки второго порядка с нулевым собственным числом и тем самым не удовлетворяет стандартному условию асимптотической устойчивости. Доказана разрешимость задачи. Получена и обоснована полная асимптотика по степенной асимптотической последовательности времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem.

In the study of singularly perturbed optimal control problems, asymptotic solutions to the boundary value problem resulting from the optimality condition for the control are constructed by means of the well-known and well-developed method of boundary functions. This approach is effective for problems with smooth controls from an open domain. Problems with a closed bounded domain of the control have been investigated less thoroughly. The cases that are usually considered involve situations where the control is a scalar function or a multidimensional function with values in a convex polyhedron. In the latter case, since the optimal control is a piecewise constant function with values at the vertices of the polyhedron, it is important to describe the asymptotic behavior of the switching points of the optimal control. In this paper we investigate a time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system with smooth geometric constraints on the control in the form of a ball. The main difference of this case from systems with fast and slow variables studied earlier is that in this case the matrix at the fast variables is a multidimensional analog of the second-order Jordan cell with zero eigenvalue and, thus, does not satisfy the standard condition of asymptotic stability. The solvability of the problem is proved. Power asymptotic expansions of the optimal time and optimal control with respect to a small parameter at the derivatives in the equations of the system are constructed and substantiated.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problems, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-67-76

1. Постановка задачи

Рассмотрим одну из задач теории оптимального управления [1; 2] — задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. об-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

зор [3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad u \in \mathbb{R}^{2n}, \\ \varepsilon\dot{y} = Jy + u, & \|u\| \leqslant 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, & \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

I_n — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Далее всюду будем обозначать единичные матрицы соответствующих размеров через I.

Цель настоящего исследования — получить асимптотические разложения времени быстродействия, оптимального управления и компонент вектора состояния.

Ранее в работе [4] были получены основные соотношения для системы общего вида с многоугольником в качестве ограничивающего множества, в работах [5; 6] исследовано поведение областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что собственные значения матрицы при быстрых переменных равны нулю, и тем самым нарушено стандартное условие (см., например, [6, гл. 3, п. 3.2, предположение A1]) асимптотической устойчивости этой матрицы. В настоящей работе используются методы, основы подхода к которым заложены в [7], и общие соотношения, полученные в [8]. Отметим статью [9], в которой впервые была исследована асимптотика решения для другой системы, в которой матрица при быстрых переменных также не удовлетворяет условию асимптотической устойчивости. В настоящей работе будет показано, что время быстродействия, как и остальные характеристики задачи, в отличие от работы [9] раскладывается в степенные асимптотические ряды в смысле Пуанкаре [10, Definition 2.5].

Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x_i, y_i, u_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2.$$

Вследствие критерия Калмана (см, например, [11, теорема 5]) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (1.3) вполне управляема.

Непосредственным вычислением из (1.2), (1.3) и равенства $J^2 = 0$ получаем, что

$$e^{Jt/\varepsilon} = I + \frac{t}{\varepsilon}J, \quad e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & tI + \dfrac{t^2}{2\varepsilon}J \\ 0 & I + \dfrac{t}{\varepsilon}J \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующую задачу о быстродействии, получающуюся из (1.1), если положить $\varepsilon = 0$ и $u_2 \equiv 0$ (т. е. не принимать во внимание неуправляемые объекты).

$$\begin{cases} \dot{x_2} = -u_1, & x_2,\, u_1 \in \mathbb{R}^n, \\ x_2(0) = x_{2,0}, & \|u_1\| \leqslant 1, \\ x_2(T_0) = 0, \quad T_0 \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.4}$$

Согласно принципу максимума [1; 11, с. 140] оптимальное управление $u_0(t) = u_1(t)$ имеет вид

$$u_0(t) \equiv q_0, \quad \|q_0\| = 1,$$

где постоянный вектор $q_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению

$$0 = x_{2,0} - T_0 q_0. \tag{1.5}$$

Естественным является предположение

$$x_{2,0} \neq 0. \tag{1.6}$$

Тогда из (1.5) получаем

$$T_0 = \|x_{2,0}\|, \quad q_0 = \frac{x_{2,0}}{\|x_{2,0}\|}. \tag{1.7}$$

Теорема 1. *При любом начальном векторе z_0 с компонентой $x_{2,0} \neq 0$ и любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ задача (1.1) разрешима и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = T_0$.*

Доказательство. Рассмотрим управление $v_\varepsilon(t) = (v^*_{1,\varepsilon}(t), v^*_{2,\varepsilon}(t))^*$, $\|v_\varepsilon(t)\| \leqslant 1$, где $v_{1,\varepsilon}(t) := (1-\varepsilon)V_\varepsilon$, $\|V_\varepsilon\| = 1$, $v_{2,\varepsilon}(t) := \varepsilon W_\varepsilon(t)$. Здесь и далее $*$ — знак операции транспонирования матриц. Покажем, что с помощью такого управления можно перевести систему из положения z_0 в начало координат за время $\theta_\varepsilon = T_0 + \theta(\varepsilon)$, где T_0 — оптимальное время (1.7) в вырожденной задаче (1.4), $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Подставим управление $v_\varepsilon(t)$ в систему уравнений, получающуюся в силу формулы Коши из (1.1),

$$0 = z_0 + \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon \, v_\varepsilon(t)\, dt.$$

Покомпонентно эта система запишется в виде

$$\begin{cases} -2\varepsilon x_{1,0} = \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} (-2t(1-\varepsilon)V_\varepsilon + t^2 W_\varepsilon(t))\, dt, & x_{2,0} = \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} tW_\varepsilon(t)\, dt, \\ -\varepsilon y_{1,0} = \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} ((1-\varepsilon)V_\varepsilon - tW_\varepsilon(t))\, dt, & -y_{2,0} = \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} W_\varepsilon(t)\, dt. \end{cases} \tag{1.8}$$

Из второго и третьего уравнений системы (1.8) находим

$$(1-\varepsilon)\theta_\varepsilon V_\varepsilon = x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0}. \tag{1.9}$$

Отсюда

$$\theta_\varepsilon = \frac{\|x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0}\|}{1-\varepsilon} \overset{(1.7)}{=} T_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.10}$$

Затем первое, второе и четвертое уравнения системы (1.8) с учетом (1.9) можно записать следующим образом:

$$\int\limits_0^{\theta_\varepsilon} t^2 W_\varepsilon(t)\, dt = -2\varepsilon x_{1,0} + \theta_\varepsilon(x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0}), \quad \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} tW_\varepsilon(t)\, dt = x_{2,0}, \quad \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} W_\varepsilon(t)\, dt = -y_{2,0}. \tag{1.11}$$

Вектор-функцию $W_\varepsilon(t)$ можно найти в виде $W_\varepsilon(t) = a_\varepsilon t^2 + b_\varepsilon t + c_\varepsilon$, где a_ε, b_ε и $c_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ — некоторые векторы. Действительно, система (1.11) преобразуется к системе линейных алгебраических уравнений относительно компонент a_ε, b_ε, c_ε с ненулевым определителем, обратная величина к которому есть $O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, следовательно, однозначно разрешима. При этом в силу ограниченности правых частей системы (1.11) $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon = O(1)$, $\varepsilon \to 0$, тем самым $W_\varepsilon(t) = O(1)$ на $[0, \overline{T}]$ для некоторого $\overline{T} > T_0$. Условие $\|v_\varepsilon(t)\| \leqslant 1$ равносильно

$$1 \geqslant \|v_{1,\varepsilon}(t)\|^2 + \|v_{2,\varepsilon}(t)\|^2 = (1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \|W_\varepsilon(t)\|^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \|W_\varepsilon(t)\|^2,$$

или

$$2 \geqslant \varepsilon(1 + \|W_\varepsilon(t)\|^2) \longrightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{1.12}$$

При достаточно малых ε неравенство (1.12) выполняется.

Таким образом, нашлось управление $v_\varepsilon \in \mathcal{U}$, переводящее систему из положения z_0 в начало координат за время, близкое к T_0. Тогда найдется оптимальное управление, исходная задача (1.1) разрешима, и для оптимального времени справедлива оценка

$$T_\varepsilon \leqslant T_0 + \theta(\varepsilon), \tag{1.13}$$

где $\theta(\varepsilon)$ определяется формулой (1.10).

Далее, оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ и оптимальное время T_ε удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -2\varepsilon^2 x_{1,0} = \int\limits_0^{T_\varepsilon} (-2\,\varepsilon\, t\, u_{1,\varepsilon}(t) + t^2 u_{2,\varepsilon}(t))\,dt, & \varepsilon x_{2,0} = \int\limits_0^{T_\varepsilon} t u_{2,\varepsilon}(t)\,dt, \\ -\varepsilon^2 y_{1,0} = \int\limits_0^{T_\varepsilon} (\varepsilon u_{1,\varepsilon}(t) - t u_{2,\varepsilon}(t))\,dt, & -\varepsilon y_{2,0} = \int\limits_0^{T_\varepsilon} u_{2,\varepsilon}(t)\,dt. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений этой системы получаем соотношение

$$x_{2,0} = \varepsilon y_{1,0} + \int\limits_0^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t) dt. \tag{1.14}$$

Тогда с учетом ограничения на оптимальное управление $\|u_\varepsilon\| \leqslant 1$ и оценки (1.13) справедлива цепочка неравенств

$$T_0 = \|x_{2,0}\| \leqslant \varepsilon\|y_{1,0}\| + \int\limits_0^{T_\varepsilon} \|u_{1,\varepsilon}(t)\| dt \leqslant \varepsilon\|y_{1,0}\| + T_\varepsilon \leqslant \varepsilon\|y_{1,0}\| + T_0 + \theta(\varepsilon).$$

Отсюда в силу леммы о двустороннем ограничении $T_\varepsilon \to T_0$ при $\varepsilon \to 0$. □

Лемма 1. *Найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что $u_{1,\varepsilon_n}(t)$ сходится к u_0 почти всюду на $[0, T_0]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (1.14) следует, что $\int_0^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t)dt \to x_{2,0}$ при $\varepsilon \to 0$. Но $\int_0^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t)dt = \int_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}(t)dt + \int_{T_0}^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t)dt$. Отсюда в силу теоремы 1 выполняется $\int_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}(t)dt \to x_{2,0} = \int_0^{T_0} u_0 dt$ при $\varepsilon \to 0$. Тем самым, $\int_0^{T_0} (u_0 - u_{1,\varepsilon}(t))dt \to 0$.

Пусть $u_{1,\varepsilon}(t) = \alpha_\varepsilon(t)u_0 + u_{1,\varepsilon}^\perp(t)$, где $u_{1,\varepsilon}^\perp(t) \perp u_0$. Поскольку $\|u_\varepsilon\| \leqslant 1$, справедливо $\|u_{1,\varepsilon}\| \leqslant 1$, следовательно, $|\alpha_\varepsilon(t)| \leqslant 1$. Тогда

$$\Big\|\int\limits_0^{T_0} (u_0 - u_{1,\varepsilon}(t))dt\Big\|^2 = \Big\|\int\limits_0^{T_0} (1 - \alpha_\varepsilon(t))u_0 dt\Big\|^2 + \Big\|\int\limits_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}^\perp(t)dt\Big\|^2$$

$$= \Big(\int\limits_0^{T_0} (1 - \alpha_\varepsilon(t))dt\Big)^2 + \Big\|\int\limits_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}^\perp(t)dt\Big\|^2 \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда $\int_0^{T_0}(1-\alpha_\varepsilon(t))dt \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $1-\alpha_\varepsilon(t) \geqslant 0$ на $[0, T_0]$, функция $1-\alpha_\varepsilon(t)$ сходится к нулю в среднем на $[0, T_0]$ при $\varepsilon \to 0$. Значит (см. [12, с. 388]), можно выбрать такую последовательность $\varepsilon_n \to 0$, что $\alpha_{\varepsilon_n}(t)$ сходится к 1 почти всюду на $[0, T_0]$. Но

$$\alpha^2_{\varepsilon_n}(t) \leqslant \|u_{1,\varepsilon_n}(t)\|^2 = \alpha^2_{\varepsilon_n}(t) + \|u^\perp_{1,\varepsilon_n}(t)\|^2 \leqslant 1.$$

Тем самым, $u^\perp_{1,\varepsilon_n}(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ и $u_{1,\varepsilon_n}(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} u_0$ на $[0, T_0]$. $\square$

2. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

В силу принципа максимума Понтрягина [1; 11, гл. 2, теорема 18] который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, существует вектор $r_\varepsilon = (r^*_{1,\varepsilon}, r^*_{2,\varepsilon})^*$, $r_{1,\varepsilon}, r_{2,\varepsilon} \in \mathbb{R}^{2n}$, такой, что оптимальное управление в задаче (1.1) имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{B}^*_\varepsilon e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}^*_\varepsilon e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon\|}$$

при всех t таких, что $\mathcal{B}^*_\varepsilon e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon \neq 0$. Тогда в силу формулы Коши из (1.1) для r_ε получим векторное равенство

$$0 = z_0 + \int_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon \, \mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon\|} \, dt. \tag{2.1}$$

Тем самым, вектор r_ε является вектором, порождающим оптимальное управление, тогда и только тогда, когда r_ε удовлетворяет соотношению (2.1). Таким образом, исходная задача сводится к исследованию уравнения (2.1).

Отметим важное следствие формулы (2.1), справедливое для любой задачи оптимального быстродействия для линейной системы с ограничивающим множеством в виде шара.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{A}_\varepsilon z_0, r_\varepsilon \rangle = \|\mathcal{B}^*_\varepsilon e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon T_\varepsilon} r_\varepsilon\| - \|\mathcal{B}^*_\varepsilon r_\varepsilon\|. \tag{2.2}$$

Доказательство. Умножая уравнение (2.1) скалярно на $(-\mathcal{A}^*_\varepsilon r_\varepsilon)$, получим цепочку равенств, из которых непосредственно вытекает утверждение леммы

$$\langle z_0, \mathcal{A}^*_\varepsilon r_\varepsilon \rangle = \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\langle e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon \, \mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon, -\mathcal{A}^*_\varepsilon r_\varepsilon \rangle}{\|\mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon\|} \, dt = \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\langle \mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon, \mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t}(-\mathcal{A}^*_\varepsilon) \, r_\varepsilon \rangle}{\|\mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon\|} \, dt$$

$$= \int_0^{T_\varepsilon} d\|\mathcal{B}^*_\varepsilon e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon\| = \|\mathcal{B}^*_\varepsilon e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon T_\varepsilon} r_\varepsilon\| - \|\mathcal{B}^*_\varepsilon r_\varepsilon\|. \qquad \square$$

Отметим, что для исходной задачи выполняется $\mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} = \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* - \frac{t}{\varepsilon} I, -\frac{t}{\varepsilon^2} J^* + \frac{1}{\varepsilon} I\right)$. Тогда для r_ε запишем

$$\|\mathcal{B}^*_\varepsilon \, e^{-\mathcal{A}^*_\varepsilon t} r_\varepsilon\| = \left\| \frac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* r_{1,\varepsilon} - t\left(\frac{1}{\varepsilon} r_{1,\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} J^* r_{2,\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} r_{2,\varepsilon} \right\|.$$

Соотношение (2.2) примет вид

$$\langle y^0, r_{1,\varepsilon} \rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle J y^0, r_{2,\varepsilon} \rangle + \frac{1}{\varepsilon}\|r_{2,\varepsilon}\| = \left\| \frac{T^2_\varepsilon}{2\varepsilon^2} J^* r_{1,\varepsilon} - \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}\left(r_{1,\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} J^* r_{2,\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \, r_{2,\varepsilon} \right\|.$$

Введем новые неизвестные векторы по формулам $l_\varepsilon = \varepsilon^{-1} r_{2,\varepsilon}$, $p_\varepsilon = r_{1,\varepsilon} + \varepsilon^{-1} J^* r_{2,\varepsilon}$. Тогда $J^* r_{1,\varepsilon} = J^* p_\varepsilon$.

Запишем основную систему уравнений (2.1)

$$\begin{cases} -x^0 = \int\limits_0^{T_\varepsilon} \Big(\dfrac{t^2}{2\varepsilon^2} J - \dfrac{t}{\varepsilon} I\Big) u_\varepsilon(t)\, dt, \qquad -\varepsilon y^0 = \int\limits_0^{T_\varepsilon} (I - \dfrac{t}{\varepsilon} J) u_\varepsilon(t)\, dt, \end{cases}$$

где в новых обозначениях

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\dfrac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* p_\varepsilon - \dfrac{t}{\varepsilon} p_\varepsilon + l_\varepsilon}{\Big\| \dfrac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* p_\varepsilon - \dfrac{t}{\varepsilon} p_\varepsilon + l_\varepsilon \Big\|} \tag{2.3}$$

или “покоординатно”

$$\begin{aligned} u_{1,\varepsilon}(t) &= \frac{-\dfrac{t}{\varepsilon} p_{1,\varepsilon} + l_{1,\varepsilon}}{\sqrt{\Big\| -\dfrac{t}{\varepsilon} p_{1,\varepsilon} + l_{1,\varepsilon} \Big\|^2 + \Big\| \dfrac{t^2}{2\varepsilon^2} p_{1,\varepsilon} - \dfrac{t}{\varepsilon} p_{2,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon} \Big\|^2}}, \\ u_{2,\varepsilon}(t) &= \frac{\dfrac{t^2}{2\varepsilon^2} p_{1,\varepsilon} - \dfrac{t}{\varepsilon} p_{2,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon}}{\sqrt{\Big\| -\dfrac{t}{\varepsilon} p_{1,\varepsilon} + l_{1,\varepsilon} \Big\|^2 + \Big\| \dfrac{t^2}{2\varepsilon^2} p_{1,\varepsilon} - \dfrac{t}{\varepsilon} p_{2,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon} \Big\|^2}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Равенство (2.2) преобразуется к виду

$$\langle y^0, p_\varepsilon - J^* l_\varepsilon \rangle + \langle J y^0, l_\varepsilon \rangle + \|l_\varepsilon\| = \Big\| \frac{T_\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} J^* p_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} p_\varepsilon + l_\varepsilon \Big\|. \tag{2.5}$$

Поскольку выражение (2.3) положительно однородно относительно вектора $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, p_\varepsilon^*)^*$, то будем считать, что норма этого вектора равна единице. Из соотношения (2.5) и теоремы 1 следует, что вектор $\Big(\dfrac{T_\varepsilon}{2\varepsilon^2} J^* - \dfrac{1}{\varepsilon} I\Big) p_\varepsilon$ ограничен. Тем самым, $p_{1,\varepsilon} = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$p_{1,\varepsilon} = \varepsilon \widetilde{p}_{1,\varepsilon}, \quad \widetilde{p}_{1,\varepsilon} = O(1) \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0. \tag{2.6}$$

Лемма 3. *При условии нормировки вектора L_ε $\|l_\varepsilon\|^2 + \|p_\varepsilon\|^2 = 1$ справедливы соотношения*

$$l_{1,\varepsilon} \to u_0, \quad l_{2,\varepsilon} = o(1), \quad p_{1,\varepsilon} = o(\varepsilon^2), \quad p_{2,\varepsilon} = o(\varepsilon) \ \textit{ при } \ \varepsilon \to 0. \tag{2.7}$$

Доказательство. В силу условия леммы множество векторов L_ε ограничено и, следовательно, имеет предельные точки. Пусть $(l_0^*, p_0^*)^*$ — одна из них, т. е. некоторая последовательность $(l_{\varepsilon_n}^*, p_{\varepsilon_n}^*)^* \to (l_0^*, p_0^*)^*$ при $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. В силу леммы 1 существует подпоследовательность $\varepsilon_{n_k} \to 0$ такая, что $u_{1,\varepsilon_{n_k}}(t)$ сходится почти всюду на $[0, T_0]$ к u_0 при $\varepsilon_{n_k} \to 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $u_{1,\varepsilon_n}(t)$ и есть та самая подпоследовательность. При этом моменты времени $0 < t_1, t_2$, $t_1 \neq t_2$ таковы, что $u_{1,\varepsilon_n}(t_j) \to u_0$, $j = 1, 2$. Не ограничивая общности, считаем, что для всех n выполняется $\Big\| -\dfrac{t_j}{\varepsilon_n} p_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \Big\| \neq 0$, $j = 1, 2$.

С учетом (2.6) из (2.4) получим

$$u_{1,\varepsilon_n}(t_j) = \frac{\dfrac{(-t_j \widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n})}{\| -t_j \widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \|}}{\sqrt{1 + \dfrac{\Big\| \dfrac{t_j^2}{2\varepsilon_n} \widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} - \dfrac{t_j}{\varepsilon_n} p_{2,\varepsilon_n} + l_{2,\varepsilon_n} \Big\|^2}{\| -t_j \widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \|^2}}} \longrightarrow u_0, \quad \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad j = 1, 2. \tag{2.8}$$

Так как $\|u_0\| = 1$, то

$$\Big\|\frac{t_j^2}{2\varepsilon_n}\widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} - \frac{t_j}{\varepsilon_n}p_{2,\varepsilon_n} + l_{2,\varepsilon_n}\Big\| = o_j(1)\| - t_j\widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n}\|, \quad \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad j = 1, 2, \tag{2.9}$$

тем самым,

$$\Big\|\frac{t_j^2}{2}\widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} - t_j p_{2,\varepsilon_n} + \varepsilon_n l_{2,\varepsilon_n}\Big\| = \varepsilon_n o_j(1)\| - t_j\widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n}\| = o_j(\varepsilon_n).$$

Далее,

$$\left\{\frac{1}{2}t_j^2\,\widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} - t_j p_{2,\varepsilon_n} = o_j(\varepsilon_n), \quad j = 1, 2\right.$$

есть система линейных уравнений относительно $\widetilde{p}_{1,\varepsilon_n}$ и p_{2,ε_n} с определителем, отличным от нуля при $t_1 \neq t_2$. Тем самым, справедливы асимптотические равенства

$$\widetilde{p}_{1,\varepsilon_n} = o(\varepsilon_n), \quad p_{1,\varepsilon_n} = o(\varepsilon_n^2), \quad p_{2,\varepsilon_n} = o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.10}$$

а из равенства (2.9) следует

$$l_{2,\varepsilon_n} = o(1). \tag{2.11}$$

Далее, из соотношений (2.8) получаем $l_{1,\varepsilon_n} \longrightarrow u_0$.

Тем самым, $l_0 = (u_0^*, 0)^*$, $p_0 = 0$ — единственная предельная точка множества векторов L_ε, что означает $(l_\varepsilon^*, p_\varepsilon^*)^* \to (l_0^*, p_0^*)^*$ при $\varepsilon \to 0$ и с учетом (2.10), (2.11) справедливость асимптотических равенств в утверждении леммы. □

Нормируем вектор L_ε:

$$\|l_{1,\varepsilon}\| = 1. \tag{2.12}$$

В силу леммы 3 и того, что $\|u_0\| = 1$, и для нормировки (2.12) справедливо соотношение (2.7). Введем новые неизвестные величины по формулам (их зависимость от ε для сокращения записи опустим)

$$T_\varepsilon = T_0 + \vartheta, \quad l_{1,\varepsilon} = u_0 + \lambda_1, \quad l_{2,\varepsilon} = \lambda_2, \quad p_{1,\varepsilon} = \varepsilon^2\rho_1, \quad p_{2,\varepsilon} = \varepsilon\rho_2, \tag{2.13}$$

где $\omega = (\vartheta, \lambda^*, \rho^*)^* = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$ в силу (2.6). При этом

$$\|\lambda_1\|^2 + 2\langle\lambda_1, u_0\rangle = 0, \tag{2.14}$$

так как $\|u_0\| = 1$.

В силу (2.12)–(2.14) имеем

$$\Big\|\frac{t^2}{2\varepsilon^2}J^*p_\varepsilon - \frac{t}{\varepsilon}p_\varepsilon + l_\varepsilon\Big\|^{-1} = \Big(\|l_{1,\varepsilon} - \varepsilon t\rho_1\|^2 + \Big\|\frac{t^2}{2}\rho_1 - t\rho_2 + \lambda\Big\|^2\Big)^{-1/2} = 1 + F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho),$$

где непрерывная по t, ε, λ, ρ функция $F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho) = O(\varepsilon\|\omega\| + \|\omega\|^2)$, $\varepsilon \to 0$, $t \in [0, \overline{T}]$, $\overline{T} > T_0$.

Тогда

$$u_{1,\varepsilon}(t) = (l_{1,\varepsilon} - \varepsilon t\rho_1)(1 + F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho)) = u_0 + \lambda_1 + G_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho),$$
$$u_{2,\varepsilon}(t) = \Big(\frac{t^2}{2}\rho_1 - t\rho_2 + \lambda_2\Big)(1 + F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho)) = \frac{t^2}{2}\rho_1 - t\rho_2 + \lambda_2 + H_3(t, \varepsilon, \lambda, \rho).$$

Здесь и далее бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов $F_k, G_k, H_k = O((\varepsilon + \|\omega\|)^k)$ при $\varepsilon \to 0$, $t \in [0, \overline{T}]$, $\overline{T} > T_0$. Указанные функции бесконечно дифференцируемы, поскольку раскладываются в равномерно сходящиеся (при $\varepsilon \leqslant 1$, $\|\omega\| \leqslant K(\overline{T})$, где $K(\overline{T})$ — некоторая известная константа) степенные ряды от бесконечно дифференцируемых функций.

Компоненты вектора ω_ε удовлетворяют следующей системе уравнений: уравнение (2.14) дополнено системой

$$\begin{cases} x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0} &= \int\limits_0^{T_0+\vartheta} (l_{1,\varepsilon} + G_2(t,\varepsilon,\lambda,\rho))dt, \\ -\varepsilon^2 x_{1,0} &= \int\limits_0^{T_0+\vartheta} \Big(-\varepsilon\, t\, (l_{1,\varepsilon} + G_2(t,\varepsilon,\lambda,\rho)) + \dfrac{t^4}{4}\rho_1 \\ & \qquad - \dfrac{t^3}{2}\rho_2 + \dfrac{t^2}{2}\lambda + \dfrac{t^2}{2} H_3(t,\varepsilon,\lambda,\rho) \Big)\, dt, \\ \varepsilon x_{2,0} &= \int\limits_0^{T_0+\vartheta} \Big(\dfrac{t^3}{2}\rho_1 - t^2\rho_2 + t\lambda + tH_3(t,\varepsilon,\lambda,\rho) \Big)\, dt, \\ -\varepsilon y_{2,0} &= \int\limits_0^{T_0+\vartheta} \Big(\dfrac{t^2}{2}\rho_1 - t\rho_2 + \lambda + H_3(t,\varepsilon,\lambda,\rho) \Big)\, dt. \end{cases} \tag{2.15}$$

3. Получение и обоснование асимптотики оптимального времени T_ε и оптимального управления $u_\varepsilon(t)$

Система (2.14), (2.15) имеет вид $P(\varepsilon,\omega) = 0$, где $P(\varepsilon,\omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов в некоторой окрестности нуля переменных (ε,ω), причем $P(0,0) = 0$, а

$$P'_\omega(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & u_0^* & 0 \\ u_0 & T_0 I & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad L = \begin{pmatrix} \frac{T_0^3}{6} I & \dfrac{T_0^5}{20} I & -\dfrac{T_0^4}{8} I \\ \dfrac{T_0^2}{2} I & \dfrac{T_0^4}{8} I & -\dfrac{T_0^3}{3} I \\ T_0 I & \dfrac{T_0^3}{6} I & -\dfrac{T_0^2}{2} I \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \det L \neq 0.$$

Тогда линейный оператор $P'_\omega(0,0)$ непрерывно обратим, и применима теорема о неявном отображении, из которой следует, что в некоторой окрестности начала координат система (2.14), (2.15) единственным образом определяет $\omega = f(\varepsilon)$, где $f(\varepsilon)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Тем самым, $f(\varepsilon)$ раскладывается в степенной асимптотический ряд $\sum_k^1 f_k \varepsilon^k$, и справедлив следующий основной результат.

Теорема 2. *При выполнении предположения* (1.6) *время быстродействия* T_ε, *оптимальное управление и компоненты вектора состояния раскладываются в асимптотические ряды по степеням* $\{\varepsilon^k\}$, *слагаемые которых однозначно определяются рядами для* (2.13).

Формула (2.3) *при подстановке в нее частичной суммы* $\hat{\omega}_N$ *без слагаемых порядка* $O(\varepsilon^{N+1})$ *дает так называемое субоптимальное управление* $(N+1)$*-го порядка* [13; 14]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
4. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.

5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
7. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
8. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып 14.)
9. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
10. **Erdelyi A., Wyman M.** The asymptotic evaluation of certain integrals // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.
11. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
12. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
13. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
14. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной линейной задаче быстродействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75.

Данилин Алексей Руфимович
Поступила 17.10.2016
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
доцент УрФУ
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York, London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of control of movement. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ, 1968, 476 p.
3. Vassilyeva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems. *J. Math. Sci.*, 1986, vol. 34, iss. 3, pp. 1579–1629. doi: 10.1007/BF01262406.
4. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113.
5. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analisis of optimal control systems*, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612. Translated under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 156 p.

6. Gichev T.R., Donchev A.L. Convergence of the solution of the linear singularly perturbed problem of time-optimal response. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 43, iss. 3, pp. 502–511. doi: 10.1016/0021-8928(79)90098-4 .
7. Danilin A.R., Il'in A.M. On the structure of the solution of a perturbed optimal-time control problem. *Fundament. Prikl. Matematika*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 905–926 (in Russian).
8. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the dependence of the time-optimal control problem for a linear system of two small parameters. *Vestnik Chelyabinskogo Universiteta*, Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika 14, 2011, no. 27, pp. 46–60 (in Russian).
9. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi:10.1134/S1064562413040364 .
10. Erdelyi A., Wyman M. The asymptotic evaluation of certain integrals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1963, vol. 14, pp. 217–260.
11. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* New York, London, Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). Eastford: Martino Fine Books, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . Original Russian text published in *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1976, 544 p.
13. Kalinin A.I., Semenov K.V. Asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with multidimensional control. *Comput. Mathematics and Math. Physics*, 2004, vol. 44, no. 3. p. 407–418.
14. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Asymptotics of the optimal time in a singular perturbed linear time-optimal problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, Suppl. 1, pp. 53–65. doi: 10.1134/S0081543810070059 .

The paper was received by the Editorial Office on October 17, 2016.

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru .