ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.977

ЕКАТЕРИНБУРГСКОЕ НАСЛЕДИЕ АРЛЕНА МИХАЙЛОВИЧА ИЛЬИНА

**А. Р. Данилин, С. В. Захаров, О. О. Коврижных,
Е. Ф. Леликова, И. В. Першин, О. Ю. Хачай**

В настоящей статье рассмотрены основные задачи, сформулированные А.М. Ильиным и решенные его учениками, ныне работающими в Екатеринбурге. Эти задачи связаны с методом согласования асимптотических разложений для нахождения асимптотики решения уравнений, сингулярно зависящих от малого параметра. Помимо краевых задач для уравнений математической физики рассматриваются системы нелинейных уравнений, системы линейных уравнений, зависящих от двух малых параметров. Рассмотрены также задачи нахождения асимптотических разложений фундаментальных решений параболических уравнений и задачи оптимального управления, зависящие от малого параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр, метод согласования асимптотических разложений, оптимальное управление.

A. R. Danilin, S. V. Zakharov, O. O. Kovrizhnykh, E. F. Lelikova, I. V. Pershin, O. Yu. Khachai. The Yekaterinburg heritage of Arlen Mikhailovich Il'in.

The main problems formulated by A. M. Il'in and solved by his disciples working now in Yekaterinburg are considered. These problems are related to the method of matched asymptotic expansions used for finding asymptotic solutions of equations with a singular dependence on a small parameter. In addition to boundary value problems for equations of mathematical physics, we consider systems of nonlinear equations and systems of linear equations depending on two small parameters. We also consider problems of finding asymptotic expansions for fundamental solutions of parabolic equations and optimal control problems depending on a small parameter.

Keywords: singularly perturbed problems, asymptotic expansions, small parameter, method of matched asymptotic expansions, optimal control.

MSC: 93C70, 49N05, 34E05, 34E10, 34K26, 34K28, 35K15, 35K59, 35C20

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-42-66

В этом году исполнилось 85 лет со дня рождения выдающегося математика, лауреата Государственной премии РФ, академика РАН Арлена Михайловича Ильина (8.01.1932 – 23.06.2013). Его научное наследие велико, как многочисленны и его ученики (и ученики его учеников), работающие в различных городах РФ (в частности, в Екатеринбурге, в Уфе и в Челябинске).

Основная тематика научной школы А.М. Ильина — построение асимптотических разложений решений бисингулярных задач с малым параметром методом согласования асимптотических разложений [1].

Метод применяется в случае, когда коэффициенты $u_k(x)$ стандартного ряда возмущений $U(x,\varepsilon)$, называемого *внешним асимптотическим разложением* решения рассматриваемой задачи, по тем или иным причинам имеют особенности в точках некоторых "особых" подмножеств рассматриваемой области. Этими "особыми" подмножествами могут быть точки границы области, отрезки некоторых кривых, лежащих в области, части границы. При этом порядок особенностей растет вместе с номером приближения. Такие задачи называют *бисингулярными*

Очевидно, что в окрестности "особого" множества внешнее разложение $U(x,\varepsilon)$ уже не является формальным асимптотическим решением (ф.а.р.) задачи, и поэтому естественно в окрестности этих множеств строить другое, *внутреннее асимптотическое разложение* $V(\xi,\varepsilon)$ в новых переменных ξ, называемых *внутренними.* Внутренние переменные выбираются исходя из особенностей рассматриваемой задачи таким образом, чтобы ряд $V(\xi,\varepsilon)$ был ф.а.р. решения задачи при $\varepsilon \to 0$. Задачи для нахождения коэффициентов $v_i(\xi)$ значительно сложнее стандартных задач для нахождения коэффициентов $u_k(x)$ внешнего разложения. Это задачи для уравнений в неограниченных областях, решения которых, как правило, определяются неоднозначно. Правильный выбор этих решений возможен только в результате согласования внешнего и внутреннего разложений.

Пусть, например, особенности возникают в начале координат, и внутренняя переменная $\xi = \varepsilon^{-\alpha}x$, $\alpha > 0$. Поясним кратко идею построения равномерного асимптотического разложения с помощью согласованных рядов.

Пусть

$$U(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(\varepsilon)u_k(x), \quad V(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i(\varepsilon)v_i(\xi),$$

где $\{\mu_k(\varepsilon)\}$, $\{\nu_i(\varepsilon)\}$ — некоторые асимптотические последовательности при $\varepsilon \to 0$. Будем обозначать через $A_{n,x}U$ сумму тех членов $\mu_k(\varepsilon)u_k(x)$ ряда U, для которых справедливо условие $\varepsilon^n = O(\mu_k(\varepsilon))$. Аналогично, $A_{n,\xi}V$ — сумма тех членов $\nu_i(\varepsilon)v_i(\xi)$ ряда V, для которых справедливо условие $\varepsilon^n = O(\nu_i(\varepsilon))$.

Если ряды U и V представляют одну и ту же функцию $u(x,\varepsilon)$ при $|x| > \varepsilon^{\beta}$ и при $|x| = |\varepsilon^{\alpha}\xi| < \varepsilon^{\gamma}$ соответственно, а $\gamma < \beta$, то в общей части $\varepsilon^{\beta} < |x| < \varepsilon^{\gamma}$ оба ряда приближают одно и то же решение. Поэтому должно выполняться условие

$$A_{n,\xi}(A_{n,x}U) \overset{x=\varepsilon^{\alpha}\xi}{=} A_{n,x}(A_{n,\xi}V). \tag{1}$$

Здесь $A_{n,\xi}$ в (1) применяется к $A_{n,x}U$, переразложенной по переменной ξ, т. е. сначала коэффициенты $u_k(x)$ из $A_{n,x}U$ разлагаются в асимптотические ряды при $x \to 0$, а затем в получившихся рядах делается переход от переменной x к переменной ξ. Аналогично, $A_{n,x}$ в (1) применяется к $A_{n,\xi}V$, переразложенной по переменной x, т. е. сначала коэффициенты $v_i(\xi)$ из $A_{n,\xi}V$ разлагаются в асимптотические ряды при $\xi \to \infty$, а затем в получившихся рядах делается переход от переменной ξ к переменной x.

Определим составное асимптотическое разложение $u_n(x,\xi) = A_{n,x}U + A_{n,\xi}V - A_{n,\xi}(A_{n,x}U)$. Очевидно, что это сумма отрезков внешнего и внутреннего разложений минус их общая часть. Это составное разложение является равномерным асимптотическим разложением рассматриваемой задачи при $\varepsilon \to 0$.

Здесь приводится обзор основных задач, связанных с необходимостью согласования асимптотических разложений, инициированных А. М. Ильиным и исследованных его учениками, ныне работающими в Екатеринбурге — в Институте математики и механики УрО РАН и в Уральском федеральном университете. Эти задачи породили целые направления исследований, которые продолжают развиваться в работах екатеринбургских учеников А. М. Ильина.

В данном обзоре не представлены исследования по построению разностных схем для задач, содержащих малый параметр, с которыми можно познакомиться в работах К. В. Емельянова и Г. И. Шишкина.

Разделы 1, 2 написаны Е. Ф. Леликовой, разд. 3 — И. В. Першиным, разд. 4 — С. В. Захаровым, разд. 5 — О. Ю. Хачаем, разд. 6 — О. О. Коврижных, разд. 7 — А. Р. Данилиным и О. О. Коврижных, разд. 8 — А. Р. Данилиным.

1. Эллиптические уравнения с малым параметром при старших производных

Приведенное выше определение бисингулярности (в смысле неограниченности коэффициентов внешнего разложения) в значительной мере упрощено. В реальных задачах часто особенности возникают из-за разрывов коэффициентов внешнего разложения, из-за невозможности удовлетворить с помощью внешнего разложения тем или иным условиям исходной задачи. Это приводит к возникновению первого внутреннего разложения, и коэффициенты именно этого разложения имеют нарастающие особенности, в результате чего в свою очередь возникает еще одно (второе) внутреннее разложение, и процедура согласования применяется к этим двум разложениям, первое из которых является внешним по отношению ко второму.

Рассмотрим краевые задачи для уравнения $\varepsilon\mathcal{M}u+lu=f$ в ограниченной области Ω. Здесь $\mathcal{M}$ — эллиптический оператор, $\varepsilon>0$ — малый параметр, а l — дифференциальный оператор первого порядка.

Будем рассматривать плоские области Ω, оператор $\mathcal{M}$ второго порядка и первую краевую задачу. Пусть поле характеристик предельного уравнения $lu=f$ диффеоморфно полю параллельных прямых. Тогда после соответствующей замены независимых переменных оператор l совпадет с оператором $\partial/\partial y$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon\mathcal{M}u-\frac{\partial u}{\partial y} &= f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, &(2)\\ u(x,y) &= 0 \text{ на } \partial\Omega. &(3)\end{aligned}$$

Характеристики предельного уравнения — это прямые, параллельные оси y, а само предельное уравнение — это по существу обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-f(x,y)$$

вдоль каждого из отрезков, параллельных оси y и лежащих в $\overline{\Omega}$.

Если бы оператор $\mathcal{M}$ равнялся оператору $\partial^2/\partial y^2$, то задача (2), (3) на каждом таком отрезке совпадала бы с задачей для обыкновенного дифференциального уравнения. Переменная x являлась бы просто параметром. При этом граничное условие $u=0$ для предельной задачи сохранялось бы на нижних концах отрезков, а вблизи верхних концов отрезков появлялся бы стандартный экспоненциальный пограничный слой (Вишик М. И., Люстерник Л. А. *Успехи мат. наук.* 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122).

Оказывается, что и для эллиптического оператора $\mathcal{M}$ картина в целом будет такой же. Нетрудно построить внешнее разложение задачи (2), (3):

$$U(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x,y).$$

Его коэффициенты — это решения рекуррентных уравнений

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}=-f(x,y), \quad \frac{\partial u_k}{\partial y}=-\mathcal{M}u_{k-1},$$

принимающие нулевые значения на нижних границах отрезков, параллельных оси y, содержащихся в области Ω. Эти коэффициенты имеют следующие недостатки:

а) нарастающие особенности в точках касания характеристик предельного уравнения границы $\partial\Omega$ области извне области;

б) нарастающие особенности на характеристиках, касающихся границы $\partial\Omega$ области изнутри области и лежащих в области;

в) разрывы на характеристиках, проходящих через угловые точки границы и лежащих в области или проходящих через точки разрыва граничной функции;

г) невозможность удовлетворить граничным условиям исходной задачи с помощью стандартного пограничного слоя на части границы, совпадающей с характеристикой предельного оператора.

В работе [2] был рассмотрен следующий случай (случай г):

$$\mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)-a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \tag{4}$$

$$u(x,y)=0 \text{ при } (x,y)\in\partial\Omega, \tag{5}$$

где Ω — квадрат $\{\,(x,y)\colon 0<x<1, 0<y<1\,\}$, функции $a(x,y)$ и $f(x,y)$ бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$, $a(x,y)>0$, $0<\varepsilon<1$. Здесь для удобства дальнейших обозначений малый параметр ε заменен на ε^2. Особыми множествами здесь являются отрезки характеристик $x=0$ и $x=1$, совпадающие с границами квадрата.

Внешнее разложение задачи (4), (5) имеет вид

$$U(x,y,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}u_{2k}(x,y).$$

Функции $u_{2k}(x,y)$ — это решения рекуррентных соотношений

$$a(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y}=-f(x,y), \quad a(x,y)\frac{\partial u_{2k}}{\partial y}=\triangle u_{2k-2},$$

обращающиеся в нуль при $y=0$. Ряд $U(x,y,\varepsilon)$ не удовлетворяет граничному условию при $y=1$, но это легко исправить добавлением к этому ряду стандартного ряда (Вишик М. И., Люстерник Л. А., 1957) погранслоя $S(x,\tau,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}s_{2k}(x,\tau)$, где $\tau=(1-y)\varepsilon^{-2}$. Функции $s_{2k}(x,\tau)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+a(x,1)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)s_{2k}=g_{2k}(x,\tau),$$

граничным условиям $s_{2k}(x,0)=-u_{2k}(x,1)$ и экспоненциально стремятся к нулю при $\tau\to+\infty$.

Коэффициенты $u_{2k}(x,y)$, $s_{2k}(x,\tau)$ находятся однозначно, являются бесконечно дифференцируемыми функциями своих аргументов, а $s_{2k}(x,\tau)$ экспоненциально стремятся к нулю при $\tau\to+\infty$. Функции $A_{2n}U+A_{2n}S$ аппроксимируют уравнение (4), удовлетворяют граничным условиям на нижней и верхней сторонах квадрата Ω ($y=0$ и $y=1$), но не удовлетворяют граничным условиям на боковых сторонах квадрата, являющихся характеристиками предельного уравнения, т. е. при $x=0$ и $x=1$.

Рассмотрим левую границу $x-0$. В окрестности этой границы введем внутреннюю переменную (первую) $\zeta=\varepsilon^{-1}x$ и построим внутреннее разложение (первое)

$$V(\zeta,y,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}v_k(\zeta,y).$$

Функции $v_k(\zeta,y)$ определяются как решения параболических уравнений

$$L_1v_0=f(0,y), \quad L_1v_1=\zeta f_x(0,y), \quad L_1v_2=\frac{\zeta^2}{2}f_{xx}(0,y)-\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2},\ldots, \quad L_1v_k=F_k(\zeta,y)-\frac{\partial^2 v_{k-2}}{\partial y^2}$$

в области $\zeta>0$, $y>0$, удовлетворяющие граничным условиям $v_k(\zeta,0)=0$, $v_k(0,y)=0$. Здесь $L_1:=\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-a(0,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Функции $v_k(\zeta,y)$ при $k\geqslant 2$ имеют нарастающие (с увеличением номера k) особенности при $\zeta=0$, $y=0$ (или, что то же самое, при $x=0$, $y=0$), что делает внутреннее разложение $V(\zeta,y,\varepsilon)$ непригодным для аппроксимации решения $u(x,y)$ в этой точке. Кроме того, в классе неограниченных функций решения $v_k(\zeta, y)$ определяются неоднозначно, так как рассматриваемые задачи имеют собственные функции, не ограниченные в начале координат, — это производные фундаментального решения оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - a(0,0)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

В окрестности начала координат введем новые внутренние переменные $\xi = \varepsilon^{-2}x$, $\eta = \varepsilon^{-2}y$ и построим второе внутреннее разложение

$$W(\xi, \eta, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(\xi, \eta).$$

Для определения коэффициентов $w_{2k}(\xi, \eta)$ получим рекуррентную систему эллиптических уравнений в неограниченной области $\triangle w_{2k} - a(0,0)\dfrac{\partial w_{2k}}{\partial\eta} = G_k(\xi, \eta)$, ξ, $\eta > 0$, с граничным условием $w_{2k}(0, \eta) = w_{2k}(\xi, 0) = 0$. Функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ ограничены в начале координат, но поскольку задачи рассматриваются в бесконечной области, эти функции не ограничены при $\xi^2 + \eta^2 \to +\infty$, и, следовательно, они определяются неоднозначно.

В процессе согласования асимптотических разложений $V(\zeta, y, \varepsilon)$ и $W(\xi, \eta, \varepsilon)$ неоднозначность в определении этих обоих разложений устраняется.

Аналогичным образом рассматривается вторая сторона квадрата $x = 1$. В окрестности этой характеристики строится первое внутреннее разложение

$$V^*(\zeta^*, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^*(\zeta^*, y),$$

где $\zeta^* = (1-x)\varepsilon^{-1}$, и второе внутреннее разложение

$$W^*(\xi^*, \eta, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}^*(\xi^*, \eta),$$

где $\xi^* = (1-x)\varepsilon^{-2}$.

Невязку на границе $y = 1$, равную $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\zeta, 1)$, легко компенсировать с помощью ряда

$$\widetilde{S}(\zeta, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{s}_k(\zeta, \tau).$$

При этом функции $\widetilde{s}_k(\zeta, \tau)$ удовлетворяют оценке $|\widetilde{s}_k(\zeta, \tau)| < M\exp(-\delta(\zeta + \tau))$.

Само разложение $\widetilde{S}(\zeta, \tau, \varepsilon)$ вносит невязку на левую границу $x = 0$. Эта невязка в свою очередь убирается рядом $Z(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\xi, \tau)$, где функции $z_k(\xi, \tau)$ — экспоненциально убывающие решения рекуррентной системы уравнений вида

$$\Big(\triangle_{\xi\tau} + a(0,1)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big) z_k(\xi, \tau) = Q_k(\xi, \tau).$$

Аналогично строятся ряды

$$\widetilde{S}^*(\zeta^*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{s}_k^*(\zeta^*, \tau), \quad Z^*(\xi^*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k^*(\xi^*, \tau).$$

Теперь асимптотика решения построена полностью.

Теорема 1 [2]. *Пусть $u(x,y,\varepsilon)$ — решение задачи (4), (5), а*

$$Y_N(x,y,\varepsilon)=A_{2N,x,y}U+T_N+T_N^*+A_{2N,x,\tau}S+A_{2N,\zeta,\tau}\widetilde{S}+A_{2N,\zeta^*,\tau}\widetilde{S}^*+A_{2N,\xi,\tau}Z+A_{2N,\xi^*,\tau}Z^*,$$

где T_N — составное асимптотическое разложение из рядов V и W, а T_N^* — аналогичное составное асимптотическое разложение из рядов V^* и W^*.

Тогда существует постоянная $\gamma>0$ такая, что для любого натурального N справедлива оценка

$$|Y_N(x,y,\varepsilon-u(x,y,\varepsilon)|<M\varepsilon^{\gamma N}.$$

Елена Федоровна Леликова в 1976 г. построила полную асимптотику решения задачи (4), (5) в случае, когда на границе области $\partial\Omega$ есть точка, в которой характеристики касаются границы внешним образом (*Дифференц. уравнения.* 1976. Т. 12, № 10. С. 1852–1865).

Впоследствии Е. Ф. Леликовой были исследованы некоторые задачи, аналогичные задаче (4), (5), но в трехмерной области (*Дифференц. уравнения.* 1978. Т. 14, № 9; С. 1638–1648; 1980. Т. 16, № 2. С. 105–118), также она построила полную асимптотику решения задачи (4), (5) в случае, когда на границе области $\partial\Omega$ есть угловая точка (Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений: сб. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. С. 40–57).

В настоящее время исследования таких задач продолжаются. Поскольку А. М. Ильин уделял большое внимание задачам, в которых малый параметр в уравнении стоит не при всех старших производных, а только при части из них (что, например, характерно для моделей в анизотропных средах), то были исследованы краевые задачи такого типа в случае, когда граничная функция гладкая (в работах [3;4] — точки внешнего касания и угловые точки границы, [5] — точки внутреннего касания границы, [6] — точки перегиба границы).

2. Асимптотика фундаментального решения параболического уравнения при $t\to+\infty$

Метод согласования асимптотических разложений был применен также и для исследования асимптотического поведения при $t\to\infty$ фундаментального решения $G(x,s,t)$ задачи Коши для параболических уравнений вида

$$G_t-G_{xx}+a(x)G=0,\quad G(x,s,0)=\delta(x-s),\quad x,s\in\mathbb{R}^1,\quad t>0. \tag{6}$$

Предполагается, что функция $a(x)$ бесконечно дифференцируема и при $|x|\to\infty$ убывает. Более точно, разлагается в асимптотический ряд вида

$$a(x)=a_2^{\pm}x^{-2}+\sum_{k=3}^{\infty}a_k^{\pm}x^{-k}.$$

Кроме того, предполагается, что выполнено условие: уравнение $u''-a(x)u'-\lambda u=0$ не имеет нетривиального решения из $L_2(\mathbb{R}^1)$ при $\lambda>0$. Для этого, например, достаточно, чтобы $a(x)\leqslant 0$.

Из этого условия вытекает, что главный коэффициент $a_2^{\pm}$ не может быть большим по модулю отрицательным числом: $a_2^{\pm}\geqslant -1/4$ ($-1/4$ — постоянная Крезера).

Известно, что поведение фундаментального решения $G(x,s,t)$ при больших временах определяется поведением его преобразования Лапласа $g(x,s,\lambda)$ при $\lambda\to 0$. Задача для $g(x,s,\lambda)$ принимает вид

$$g_{xx}-a(x)g-\lambda g=-\delta(x-s),\quad x\in\mathbb{R},\quad g(x,s,\lambda)\to 0 \text{ при } |x|,\ |s|\to\infty.$$

Изучение поведения функции $g(x,s,\lambda)$ при $\lambda\to 0$ проводится методом согласования асимптотических разложений. Несмотря на кажущуюся простоту, задача эта является бисингулярной, поскольку область бесконечна, и в различных частях этой области разложения функции $g(x,s,\lambda)$ имеют различный вид.

Поведение фундаментального решения $G(x,s,t)$ при $t\to\infty$ зависит от скорости убывания коэффициента $a(x)$ при $|x|\to\infty$. Самый простой случай, так называемое *быстрое убывание* реализуется тогда, когда $a_2^{\pm}=0$, т. е. $|a(x)|=O(x^{-3})$ при $x\to\infty$. В этом случае фундаментальное решение $G(x,s,t)$ ведет себя как фундаментальное решение уравнения теплопроводности (Леликова Е. Ф. *Мат. сб.* 1987. Т. 132 (174), № 3. С. 322–344), т. е. $G(x,s,t)\sim \exp\big((x-s)^2/(4t)\big)/\sqrt{2\pi t}$.

Наиболее интересным является случай, когда $a_2^{\pm}\neq 0$ (Леликова Е. Ф. *Мат. сб.* 1989. Т. 180, № 8. С. 1119–1131; 1995. Т. 186, № 4. С. 125–142). Этот случай назван *критическим.* Скорость убывания фундаментального решения $G(x,s,t)$ в этом случае зависит от поведения решений стационарного уравнения

$$u''-a(x)u=0. \tag{7}$$

Будем называть его уравнением первого типа, если оно имеет такие линейно независимые решения $U_1(x)$, $U_2(x)$, что $|U_1(x)|=O(U_2(x))$ при $x\to-\infty$, $|U_2(x)|=O(U_1(x))$ при $x\to+\infty$, и уравнением второго типа, если оно имеет такие линейно независимые решения $U_1(x)$, $U_2(x)$, что $|U_1(x)|=O(U_2(x))$ при $x\to\pm\infty$.

Со стационарным уравнением (7) тесно связано уравнение Эйлера $v''-\dfrac{a_2^{\pm}}{x^2}v=0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $\mathcal{A}^{\pm}(\alpha):=\alpha(\alpha-1)-a_2^{\pm}=0$. При $a_2^{\pm}\geq -1/4$ его корни действительны, при $a_2^{\pm}>-1/4$ — различны, а при $a_2^{\pm}=-1/4$ существует двукратный корень $\alpha_2^{\pm}=1/2$. Обозначим эти корни через $\alpha_1^{\pm}$, $\alpha_2^{\pm}$ и будем считать, что $\alpha_1^{\pm}\leq\alpha_2^{\pm}$. Обозначим также $\alpha_{21}^{-}=(\alpha_2^{-}-\alpha_1^{-})/2$, $\alpha_{21}^{+}=(\alpha_2^{+}-\alpha_1^{+})/2$, $\alpha^*=\min\{\alpha_{21}^{-},\alpha_{21}^{+}\}$.

Асимптотические представления фундаментального решения $G(x,s,t)$ при $t\to\infty$ во всех рассматриваемых случаях построены и обоснованы с точностью до любой степени t^{-1} равномерно по $x,s\in\mathbb{R}^1$. Здесь мы ограничимся приведением только главных членов асимптотики в наиболее интересной области изменения x,s:

$$\mathcal{D}_\beta=\{(x,s)\colon |x|+|s|<Ct^{1/2-\beta}\},\quad \beta\in(0,1/2),\quad C>0.$$

Пусть стационарное уравнение (7) относится к уравнениям первого типа и корни характеристического уравнения Эйлера $\mathcal{A}(\alpha)=0$ различны ($a_2^{\pm}>-1/4$). Тогда главный член асимптотического представления $G(x,s,t)$ в области $\mathcal{D}_\beta$ имеет вид

$$G(x,s,t)\simeq t^{-1-\alpha^*}\psi(x,s) \text{ при } \alpha^*\neq m,\quad G(x,s,t)\simeq t^{-1-\alpha^*}\ln t\,\psi(x,s) \text{ при } \alpha^*=m,$$

где m — целое положительное число.

Пусть стационарное уравнение (7) относится к уравнениям первого типа и характеристическое уравнение Эйлера $\mathcal{A}(\alpha)=0$ имеет кратный корень ($a_2^{\pm}=-1/4$). Тогда главный член асимптотического представления $G(x,s,t)$ в области $\mathcal{D}_\beta$ имеет вид $G(x,s,t)\simeq V'(t)\psi(x,s)$, где через $V(t)$ обозначен интеграл Рамануджана $V(t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\xi t}\,d\xi}{\xi(\pi^2+\ln^2\xi)}$. Можно проверить, что $V(t)=O\big(\ln^{-1}t\big)$ при $t\to\infty$ и, следовательно, $G(x,s,t)=O\big(t^{-1}\ln^{-2}t\big)$.

В заключение этого раздела отметим, что в 1988 г. Е. Ф. Леликовой была построена асимптотика фундаментального решения $G(x,s,t)$ в случае, когда $a(x)$ не стремится к нулю при $x\to-\infty$ (Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений: сб. ст. / БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1988. С. 46–65), а в 1998 г. — асимптотика фундаментального решения уравнения высокого порядка (*Фундамент. и прикл. математика.* 1998. Т. 4, вып. 3. С. 1009–1027).

3. Моделирование тепловых процессов сварки

Задача о нагреве полубесконечного тела источником тепла малых размеров используется для анализа процессов электрошлаковой сварки, газопламенной закалки, плазменной обработки и др. Для определения полей температур, скоростей охлаждения, градиентов температур часто возникает необходимость провести исследования в области, непосредственно прилегающей к источнику нагрева. Важно учесть распределение плотности теплового потока по площади нагрева, которое может иметь весьма сложный характер. Практически не встречаются примеры исследования решения при произвольном распределении плотности теплового потока. Естественным образом точечный источник тепла моделируется δ-функцией или δ-образными последовательностями.

Одной из первых задач, поставленных А. М. Ильиным в этой тематике, была задача о нахождении асимптотического разложения функции Грина для второй краевой задачи. Эта асимптотика играет важную роль при расчетах тепловых задач в случае, когда линейный размер источника тепла на границе много меньше размеров нагреваемого тела.

Эта асимптотика была построена Игорем Викторовичем Першиным в 2001 г. (см. [7]). В этой работе при $t > 0$ рассматривалась задача

$$\frac{\partial G}{\partial t} = A(y)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + B(y)\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + C(y)\frac{\partial G}{\partial y}, \quad -\frac{\partial G(0,y,\eta,t)}{\partial x} = \delta(y-\eta,t), \quad G(x,y,\eta,0) = 0 \qquad (8)$$

в области $0 \le x < \infty,\ -\infty < y < \infty$, где $A, B, C \in C^\infty,\ A > 0, B > 0$.

Была доказана следующая теорема.

Теорема 2 [7]. *В окрестности особой точки функция Грина задачи* (8) *имеет асимптотику вида*

$$G(x,y,\eta,t) = \frac{1}{t}\exp\Big(\sum_{i=-1}^{\infty} t^i w_i^*(x,y,\eta)\Big),$$

где $w_i^*(x,y,\eta)$ *— полиномы по переменным* x, $(y-\eta)$ *с коэффициентами, зависящими от* η *как от параметра.*

В работе [8] рассматривалась задача о нагреве полубесконечного тела подвижным источником тепла большой мощности, заданным на полосе малой ширины. В ней предполагалось выполнение следующих условий: распространение тепла в теле происходит только с помощью теплопроводности, отсутствуют фазовые и структурные превращения, теплофизические коэффициенты не зависят от температуры.

В рассматриваемой задаче полосовой источник действует на границе $x = 0$ и движется вдоль оси $y = 0$ с постоянной скоростью. В этом случае тепловое поле полубесконечного тела не зависит от координаты z (является симметричным вдоль оси oz). Поэтому исходная задача сводится к двумерной задаче определения теплового поля в полуплоскости, по границе которой движется источник малой ширины, при этом ширина источника стремится к нулю, а его мощность — к бесконечности.

Математическая модель в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \widetilde{t}} = a\Big(\dfrac{\partial^2 T}{\partial \widetilde{x}^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial \widetilde{y}^2}\Big), \quad 0 \le x \le \infty,\ -\infty \le y \le \infty,\ -\infty \le z \le \infty,\ t > 0, \\ \Big(-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial \widetilde{x}} + \alpha_k T\Big)\Big|_{x=0} = \delta(\widetilde{y} - \widetilde{v}t), \quad T(\widetilde{x},\widetilde{y},0) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности ($a \ll 1$), λ — коэффициент теплопроводности, α_k — коэффициент конвективной теплопередачи, v — скорость движения источника тепла, δ — дельта-функция Дирака, T — искомая температура, t — время, знак $\sim$ обозначает неподвижную систему координат.

Перейдя в подвижную систему координат, связанную с источником тепла, и сделав соответствующую замену переменных $T = ue^{-\frac{v}{2}y-\frac{v^2}{4\beta}t}$, $v = \widetilde{v}\beta$, где $\beta = 1/a$ и $\alpha = \alpha_k/\lambda$, получим систему (9) в каноническом виде, для которого справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 [8]. *Существует единственное решение задачи при* $t > 0$, *которое имеет вид*

$$\pi u(x,y,t) = \sqrt{\frac{\beta}{t}}e^{-\frac{y^2\beta}{4t}}D\Big(x,\frac{t}{\beta}\Big) + e^{st}\int\limits_0^{t/\beta} D(x,\tau)\Big[\frac{\beta s}{\sqrt{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\Big(\frac{2\tau - y^2}{4\tau}\Big)\Big]e^{-\frac{y^2\beta}{4\tau}-s\tau}d\tau,$$

$$\text{где } D(x,t) = \frac{1}{\alpha\beta}\Big[Erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{t}}\Big) - e^{\alpha^2t+\alpha x}Erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \alpha t\Big)\Big].$$

Здесь Erfc(x) *— дополнение функции ошибок,* $s = v^2/4\beta$.

Поведение главного члена разложения этого решения — функции $D_0(x,t)$ — описывает

Теорема 4 [8]. *Функция* $D_0(x,t)$ *имеет асимптотическое представление*

- *в области* $x \le t$: $D_0(x,t) = \dfrac{M\sqrt{t}}{\beta} + O(t)$, $0 < M \le 1$, *причем при* $x \ll t$ $M = 1$;
- *в области* $x \gg t$: $D_0(x,t) = \dfrac{2\sqrt{t}}{\beta}e^{-\frac{x^2}{4t}} + O(t)$.

Из нее для $u(x,y,t)$ выводим следующее асимптотическое представление.

Теорема 5 [8]. *Функция* $u_0(x,y,t)$ *имеет асимптотическое представление*

- *в области* $x \le t$: $\pi u_0(x,y,t) \cong M\Big[\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}e^{-\beta\frac{y^2}{4t}} - \dfrac{\beta}{2}Ei\Big(-\dfrac{\beta y^2}{4t}\Big)\Big]$, $0 < M \le 1$, *причем при* $x \ll t$ $M = 1$;
- *в области* $x \gg t$: $\pi u_0(x,y,t) \cong \dfrac{2}{\beta}e^{-\frac{\beta(x^2+y2)}{4t}}$.

Вернувшись в неподвижную систему координат, для решения исходной задачи вблизи источника тепла получим $T_0(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{t}) \cong e^{-\frac{\widetilde{v}}{2a}\widetilde{y}^2-\frac{\widetilde{v}}{4a}\widetilde{t}}\Big(-\ln\Big(\dfrac{(\widetilde{y}-\widetilde{vt})^2}{4a\widetilde{t}}\Big)\Big)$.

Исследование подобных задач продолжается и в настоящее время (см, например, статью И. В. Першина в данном номере журнала).

4. Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения

Исследование асимптотического поведения решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром ε при старшей производной

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t \geqslant t_0, \tag{10}$$

$$u(x,t_0) = q(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

имеет большую историю.

Частный случай уравнения (10), известный как уравнение Бюргерса $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$ и рассмотренный еще Г. Бейтменом (*Monthly Weather Rev.* 1915. Vol. 43. P. 163–170) при исследовании движения жидкости и Дж. Бюргерсом (Проблемы механики: сб. ст. М.: ИЛ, 1955. С. 422–445) в теории турбулентности, используется при изучении эволюции широкого класса физических систем и вероятностных процессов, например, нелинейной диффузии, акустических волн в жидкости и газе (Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* М.: Мир, 1977; Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии.*

М.: Наука, 1990). Параметр ε имеет смысл вязкости среды. Кроме того, уравнение (10) используется при моделировании движения автомобильного потока, в задаче о паводковых волнах и в некоторых других, когда скорость движения нетривиальным образом зависит от плотности [1].

С различных точек зрения задачу Коши (10), (11) изучали многие математики. Интерес к ней объясняется как наличием физической интерпретации, так и тем, что ее решения позволяют получить вязкостные обобщенные решения предельного уравнения (Олейник О. А. *Успехи мат. наук.* 1959. Т. 14, №2. С. 159–164). В предположении, что $\varepsilon > 0$, функция φ бесконечно дифференцируема, ее вторая производная строго положительна, начальная функция q ограничена и кусочно-гладкая, строго доказано (Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967), что существует единственное ограниченное бесконечно дифференцируемое по x и t решение $u(x,t,\varepsilon)$.

Особый интерес представляет поведение решения $u(x,t,\varepsilon)$ вблизи особых точек решения предельной задачи с $\varepsilon = 0$, поскольку сингулярные события во многом определяют поведение системы в целом на конечных и больших временах и их изучение важно для понимания процессов формирования ударных волн в физических средах с малой ненулевой вязкостью. Например, сдвиг фазы ударной волны, которая начинается в точке градиентной катастрофы и продолжается до бесконечности, определяется поведением коэффициентов асимптотического решения именно в окрестности особой точки [1].

Поведение решения в целом оказывается в некотором смысле подобным поведению вблизи особой точки. Точная математическая формулировка этого тезиса представляет собой метод ренорм-группы (Теодорович Э. В. *Прикл. математика и механика.* 2004. Т. 68, вып. 2. С. 335–367), с помощью которого можно построить равномерное асимптотическое приближение решения [9].

С точки зрения приложений важно также описание поведения решений вблизи ударных волн; подробнее о физической стороне этого вопроса см., например, монографию Дж. Уизема (*Линейные и нелинейные волны.* М.: Мир, 1977) и прекрасный обзор В. Е. Фортова (*Успехи физ. наук.* 2007. Т. 177, № 4. С. 347–368), где прикладному аспекту уделено особое внимание.

Хотя существует классификация особенностей решений (Арнольд В. И. *Особенности каустик и волновых фронтов.* М.: Фазис, 1996), поведение $u(x,t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ является, вообще говоря, довольно сложным — возникает необходимость строить не один, а несколько асимптотических рядов в разных областях независимых переменных. Таким образом, мы имеем дело с сингулярно возмущенной задачей.

В работах А. М. Ильина и Т. Н. Нестеровой (Ильин А. М., Нестерова Т. Н. *Докл. АН СССР.* 1978. Т. 240, № 1. С. 11–13; Нестерова Т. Н. Дифференциальные уравнения с малым параметром: сб. ст. / УНЦ АН СССР Свердловск, 1980. С. 66–86) задача (10), (11) рассмотрена в случае, когда предельное решение на конечном отрезке времени имеет две гладкие линии разрыва $x = s_1(t)$ и $x = s_2(t)$, сливающиеся в момент $t = t^*$ в одну $x = s_3(t)$.

В работе А. М. Ильина (*Изв. АН СССР. Сер. математ.*. 1989. Т. 53, вып. 2. С. 258–275) была исследована бисингулярная задача, когда в полосе $\{(x,t)\colon t_0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}\}$ предельное решение является функцией, гладкой всюду, кроме одной гладкой линии разрыва $\{(x,t)\colon x = s(t),\ t \geqslant t^* > t_0\}$. Подробное изложение результатов можно также найти в монографии [1], где асимптотика решения при $\varepsilon \to 0$ построена и обоснована с произвольной степенью точности.

Задача о *переходе слабого разрыва в сильный* была рассмотрена в работах Арлена Михайловича Ильина и Сергея Викторовича Захарова [10; 11], в которых задача (10), (11) исследована в случае, когда начальная функция $u(x,0,\varepsilon)$ является гладкой всюду кроме одной точки, в которой она непрерывна, а разрыв имеет первая производная. Тогда в некоторой полосе $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ предельное решение $u(x,t,0)$ будет непрерывным, но при этом оно будет иметь разрыв производной u_x, т. е. слабый разрыв.

В предположении, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 1, \quad q(x) = -(x + ax^2)\,\Theta(-x)\,(1 + q_0(x)),$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, $a > 0$, $q_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $q_0(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля, было исследовано поведение решения $u(x,t,\varepsilon)$ вблизи точки перехода слабого разрыва в сильный.

В окрестности начала координат ($x = 0$, $t = 0$) вводятся растянутые переменные $\xi = \varepsilon^{-2/3}x$, $\tau = \varepsilon^{-1/3}t$. Асимптотика решения задачи построена в виде ряда

$$W = \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon\, w_{p,s}(\xi,\tau).$$

Коэффициенты $w_{p,s}(\xi,\tau)$ — это решения рекуррентной системы уравнений

$$\frac{\partial w_{2,0}}{\partial \tau} + w_{2,0}\frac{\partial w_{2,0}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{2,0}}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \frac{\partial w_{3,0}}{\partial \tau} + \frac{\partial\,(w_{2,0}w_{3,0})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{3,0}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{p,s}}{\partial \tau} + \frac{\partial\,(w_{2,0}w_{p,s})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{p,s}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial E_{p,s}}{\partial \xi},$$

где

$$E_{p,s} = -\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{p-1}\sum_{l=0}^{s} w_{m,l}w_{p+2-m,s-l} - \sum_{q=3}^{[p/2]-s+1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} \sum_{\substack{p_1+\dots+p_q=p+2\\ s_1+\dots+s_q=s}} \prod_{j=1}^{q} w_{p_j,s_j}$$

(считается, что при $s = [p/2] - 1$ сумма по q равна нулю), с условиями

$$w_{p,s} = \sum_{l=s}^{[p/2]-1} \frac{l!}{s!(l-s)!3^s} \ln^{l-s}|\tau| \sum_{k=\max\{1,2l\}}^{\infty} |\tau|^{(p-3k)/2} R_{k,l,p-2l-2}(\theta), \qquad \theta = \frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}},$$

при $\tau \to -\infty$ в области $X^0 = \{(\xi,\tau)\colon |\xi| < |\tau|^{1-\gamma},\ \tau < 0\}$ $(0 < \gamma < 1/2)$.

Функции $R_{k,l,p-2l-2}(\theta)$ находятся из условия согласования ряда W с разложением в пограничном слое в окрестности линии слабого разрыва. Главный член асимптотики имеет вид $\varepsilon^{1/3}w_{2,0}(\xi,\tau)$, где

$$w_{2,0}(\xi,\tau) = -\frac{2}{\Phi(\xi,\tau)}\frac{\partial \Phi(\xi,\tau)}{\partial \xi}, \quad \Phi(\xi,\tau) = \int_0^\infty \exp\Big(-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\Big)ds, \quad b = a - \varphi'''(0)/2 > 0.$$

Еще один тип особой точки решения возникает в случае задачи с двумя малыми параметрами (Захаров С. В. *Докл. РАН.* 2008. Т. 422, № 6. С. 733–734), когда начальное условие имеет вид

$$u(x,0,\varepsilon,\rho) = \nu(x\rho^{-1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

где функция ν бесконечно дифференцируема и ограничена, а ρ — второй малый параметр. В работе [9] доказано, что в этом случае при выполнении условий

$$\nu(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n^{\pm}}{\sigma^n}, \quad \sigma \to \pm\infty \quad (\nu_0^- > \nu_0^+)$$

для решения задачи (10), (11) при $\varepsilon \to 0$ и $\mu = \rho/\varepsilon \to 0$ в полосе $\{(x,t)\colon x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ справедлива асимптотическая формула

$$u(x,t,\varepsilon,\rho) = h_0\Big(\frac{x}{\rho},\frac{\varepsilon t}{\rho^2}\Big) - R_{0,0,0}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\Big) + \Gamma\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}\Big) + O\left(\mu^{1/2}\ln\mu\right), \quad \text{где}$$

$$h_0(\sigma,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}\int_{-\infty}^{\infty} \nu(s)\exp\Big[-\frac{(\sigma-s)^2}{4\omega}\Big]ds, \quad R_{0,0,0}(z) = \frac{\nu_0^-}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}\exp(-y^2)\,dy + \frac{\nu_0^+}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp(-y^2)\,dy,$$

$z = \sigma/(2\sqrt{\omega})$, функция Γ — решение задачи Коши во внутренних переменных ($\eta = x/\varepsilon$, $\theta = t/\varepsilon$)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi(\Gamma)}{\partial\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial\eta^2} = 0, \qquad \Gamma(\eta, 0) = \begin{cases} \nu_0^-, & \eta < 0, \\ \nu_0^+, & \eta > 0. \end{cases}$$

Кроме того, методом ренормализации получена асимптотическая формула [9]

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = \frac{1}{\nu_0^+ - \nu_0^-} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{x - \rho s}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\Big)\nu'(s)\, ds + O\big(\mu^{1/4}\big).$$

Исследование асимптотических свойств решений задачи Коши (10), (11) продолжается. Доказано свойство универсальности найденного А. М. Ильиным решения, выражающегося через функцию Пирси, уравнения Бюргерса (Dubrovin B., Elaeva M. *Russ. J. Math. Phys.* 2012. Vol. 19, iss. 4. P. 449–460). Некоторые модификации задач о градиентной катастрофе и о переходе слабого разрыва в сильный с вырождением начальной функции рассматривались в работе [12], где также установлена их связь с теорией особенностей В. И. Арнольда и его школы. В данном выпуске журнала опубликованы новые результаты С. В. Захарова, относящиеся к задаче с большим начальным градиентом: получены формальные асимптотические решения в виде рядов по степеням двух малых параметров.

5. Асимптотика решений сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с дополнительными асимптотическими слоями

В монографии [1, гл. II, § 3] Арлен Михайлович начал исследование нелинейных ОДУ с малым параметром и бисингулярных задач для них, асимптотики решений которых не укладывались в привычную схему из двух асимптотических слоев. Проблема большего числа слоев обусловлена тем, что в таких нелинейных задачах внешнее и внутреннее разложения решения оказываются не согласуемыми, что приводит к необходимости ввести третий масштаб переменных и отвечающее ему промежуточное разложение (а в некоторых случаях уже и трех слоев оказывается недостаточно) для того, чтобы в конце концов построить составное асимптотическое разложение, обеспечивающее равномерное приближение решения задачи с точностью до произвольной степени малого параметра.

Рассмотрим начальную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{dU}{dt} = f(t, U, V), & \dfrac{dV}{dt} = g(t, U, V), \\ U(0, \varepsilon) = A > 0, \quad V(0, \varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

для решения которой требуется построить равномерное по $t \in [0, T]$ асимптотическое разложение при $\varepsilon \to 0$. Предположим дополнительно, что выполнены следующие условия.

1. Функции $f(t, U, V)$ и $g(t, U, V)$ бесконечно дифференцируемы на множестве

$$D = \{t, U, V \colon 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant U \leqslant B, |V| \leqslant B\}, \quad 0 < A < B.$$

2. На множестве D при $t > 0, U > 0$ справедливо неравенство $\dfrac{\partial f}{\partial U}(t, U, V) < 0$.

3. Пусть в начале координат переменных (t, U, V) справедливы соотношения

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial U} = 0, \ldots \frac{\partial^{\varkappa-1} f}{\partial U^{\varkappa-1}} = 0,$$

где $\varkappa \geq 2$, целое число; $\dfrac{\partial^{\varkappa} f}{\partial U^{\varkappa}} < 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\partial^{\varkappa} f}{\partial U^{\varkappa}}(0,0,0) = -\varkappa!,$$

поскольку привести задачу к такому виду с сохранением всех остальных условий несложно с помощью линейной однородной замены переменных t и U.

4. $g(0,0,0) = 0$.

В таком виде при дополнительном ограничении $\varkappa = 2$ эта задача была впервые кратко опубликована в работе Арлена Михайловича Ильина и Олега Юрьевича Хачая [13] и затем, снабженная подробными доказательствами и примерами, была напечатана в статье [14]; после этого, в краткой заметке О. Ю. Хачая (*Дифференц. уравнения.* 2011. Vol. 47, no. 4. P. 605–608) было произведено ее исследование для случая $\varkappa \geq 3$.

Отметим, что задача (12) была достаточно хорошо изучена (подробная библиография имеется в монографии А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова “Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений” 1990 г.) задолго до публикации статьи [14] в том случае, когда существует устойчивое решение предельной системы уравнения $U_0(t), V_0(t)$ такое, что

$$f(t, U_0(t), V_0(t)) \equiv 0, \quad V_0'(t) = g(t, U_0(t), V_0(t)), \quad V(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial U}(t, U_0(t), V_0(t)) < 0.$$

Нарушение последнего условия хотя бы в одной точке (в данном случае в начальной точке $t = 0$) значительно усложняет процесс нахождения асимптотического разложения.

Кроме того, в монографии [1, гл. II, § 3] для случая $\varkappa = 2$, а в статьях О. Ю. Хачая (*Деп. в ВИНИТИ.* 2005. Т. 16, №174-В2005. С. 1–46; *Дифференц. уравнения.* 2008. Vol. 44, № 2. С. 270–272) для произвольного значения $\varkappa \geq 3$ была исследована асимптотика решения задачи Коши для одного уравнения, получаемой из задачи (12) удалением второго дифференциального уравнения и всех зависимостей, связанных с функцией V. Существенное отличие задачи Коши для системы второго порядка (12) состоит в следующем. Для нее уже не удается, как это было сделано для одного уравнения, построить правильное внешнее разложение в виде асимптотического ряда по кажущейся естественной калибровочной системе, состоящей только из степеней малого параметра. Коэффициенты построенного по степенной калибровочной системе разложения не определяются однозначно — каждый из коэффициентов содержит одну неопределенную постоянную.

Такая ситуация не является неожиданной и встречается во многих подобных задачах, когда неизвестные коэффициенты могут быть определены из согласования с другим асимптотическим разложением, которое должно быть построено при малых значениях t. Но особенно интересно, что ни при каких значениях этих произвольных постоянных построенные только по степеням ε формальные асимптотические разложения (ф.а.р.) не задают правильное асимптотическое разложение решения задачи (12), которое, оказывается, имеет степенно-логарифмический вид.

Отметим также, что Арлена Михайловича интересовало, при каких условиях на систему ОДУ происходит увеличение количества асимптотических слоев, необходимого для получения такого составного разложения. С этой целью в статье [15] была рассмотрена задача

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d}{dt} U_1 = -{U_1}^2 + {U_2}^3 + t, \quad \varepsilon \dfrac{d}{dt} U_2 = -{U_2}^2 + {U_1}^3 + t^2, \\ U_1(0) = \alpha, U_2(0) = \beta, \ 0 \leqslant t \leqslant t_0, \end{cases}$$

асимптотическое разложение которой потребовало введения второго промежуточного слоя.

Кроме того, в работах О. Ю. Хачая 2013–2014 гг. (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2013. Т. 19, № 1. С. 300–315; *Дифференц. уравнения.* 2014. Vol. 50, № 5. С. 611–625) был рассмотрен широкий класс сингулярных начальных задач с одним малым параметром.

Для систем произвольного числа дифференциальных уравнений, в которых различные степени малого параметра являются коэффициентами при производных неизвестных функций, в статье 2013 г. были подробно произведены процедуры метода согласования асимптотических разложений [1] при переходе от одного асимптотического слоя к последующему в случае степенно-логарифмических ф.а.р решения задачи в этих слоях. В работе 2014 г. была доказана равномерная оценка разности между составным разложением, построенным на основе таких ф.а.р, и точным решением указанной задачи Коши на некотором конечном промежутке.

Остановимся подробнее на результатах, связанных с задачей (12) при $\varkappa = 2$, опубликованных в статье [14]. Были выделены внутренний и промежуточный асимптотические слои, отвечающие соответственно заменам переменных

- $\tau = \varepsilon^{-1}t$, $U(\varepsilon\tau, \varepsilon) \equiv W(\tau, \varepsilon)$, $V(\varepsilon\tau, \varepsilon) \equiv Z(\tau, \varepsilon)$;
- $\eta = \varepsilon^{-2/3}t$, $u(\eta, \varepsilon) \equiv U(t, \varepsilon)$, $v(\eta, \varepsilon) \equiv V(t, \varepsilon)$.

Для искомых функций внутреннего масштаба $W(\tau, \varepsilon)$ и $Z(\tau, \varepsilon)$ будем искать ф.а.р. в виде

$$\widetilde{W}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\tau), \quad \widetilde{Z}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau).$$

После подстановки рядов $\widetilde{W}$ и $\widetilde{Z}$ в соотношения (12) для коэффициентов этих рядов возникает следующая рекуррентная система задач Коши:

$$\frac{dw_0}{d\tau} = f(0, w_0(\tau), 0), \ \ w_0(0) = A, \quad \frac{dz_1}{d\tau} = g(0, w_0(\tau), 0), \ \ z_1(0) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{dw_k}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial U}(0, w_0(\tau), 0)w_k + r_k(\tau), \ \ w_k(0) = 0, \quad \frac{dz_{k+1}}{d\tau} = s_k(\tau), \ \ z_{k+1}(0) = 0, \tag{14}$$

где $r_k(\tau)$ и $s_{k-1}(\tau)$ — это известные функции τ и функции $w_i(\tau)$ и $z_i(\tau)$ с индексами $i < k$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6 [14]. *Решения задач Коши* (13), (14) *существуют и единственны, принадлежат* $C^\infty[0, \infty)$ *и обладают асимптотическими разложениями следующего вида при* $\tau \to \infty$:

$$\begin{gathered} w_0(\tau) = t^{-1/(\varkappa-1)}\omega(\tau), \quad z_1(\tau) = \omega(\tau) + b_1 \ln\tau, \\ w_k(\tau) = \tau^{(3k-1)/(\varkappa-1)}\omega(\tau), \quad z_{k+1}(\tau) = \tau^{3k}\omega(\tau), \quad k \geq 1, \end{gathered} \tag{15}$$

где символом $\omega(\tau)$ *обозначены формальные ряды вида* $\omega(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} \sum\limits_{l=0}^{k} c_{k,l}(\ln\tau)^l$. *Все разложения* (15) *допускают почленное дифференцирование.*

Переходим к построению промежуточного разложения. Если ряды $\widetilde{W}$ и $\widetilde{Z}$ переписать в новой переменной η и сгруппировать члены получившихся рядов по степеням ε и $\ln\varepsilon$, то получатся формальные ряды

$$\begin{gathered} \widetilde{u}(\eta, \varepsilon) = \varepsilon u_1(\eta) + \sum_{m=2}^{\infty} \varepsilon^{m/3} \sum_{n=0}^{m-1} (\ln\varepsilon)^n v_{m,n}(\eta), \\ \widetilde{v}(\eta, \varepsilon) = \varepsilon(v_{3,0}(\eta) + v_{3,1}(\eta)\ln\varepsilon) + \sum_{m=4}^{\infty} \varepsilon^{m/3} \sum_{n=0}^{m-3} (\ln\varepsilon)^n v_{m,n}(\eta), \end{gathered} \tag{16}$$

в качестве коэффициентов $u_{m,n}(\eta)$ и $v_{m,n}(\eta)$ которых выступают задающие условия согласования внутреннего и промежуточного разложений формальные ряды

$$\overline{u}_{m,n}(\eta) = \eta^{-m} \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi(\eta)\ln^{j}(\eta); \tag{17}$$

$$\overline{v}_{3,1}(\eta) \equiv -1/3\gamma, \quad \overline{v}_{3,0}(\eta) = \gamma\ln\eta + \varphi(\eta); \quad \overline{v}_{m,n}(\eta) = \eta^{-m+3} \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi(\eta)\ln^{j}(\eta), \quad m \geq 4, \tag{18}$$

где использовано обозначение $\varphi(\eta)$ для формальных рядов вида

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \eta^{3i}, \text{ а также } \gamma = \partial g/\partial U(0,0,0).$$

После подстановки рядов (16) в соотношения (12) для коэффициентов этих рядов возникает следующая рекуррентная система уравнений:

$$u'_{1,0}(\eta) - \eta + (u_{1,0}(\eta))^2 = 0, \quad v'_{3,0}(\eta) - \frac{\partial g}{\partial U} u_{1,0}(\eta) = 0; \tag{19}$$

$$u'_{m,n} + 2u_{1,0}u_{m,n} - G_{m,n}(\eta) = 0, \quad v'_{m+2,n} - H_{m+2,n}(\eta) = 0, \tag{20}$$

в которой функции $G_{m+\varkappa,n}(\eta)$ выражаются через переменную η и функции $u_{i,j}(\eta)$ и $v_{i+2,j}(\eta)$ с индексами $i < m$, функция $H_{m+\varkappa,n}(\eta)$ зависит от переменной η, от функции $u_{m,n}(\eta)$, а также от $u_{i,j}(\eta)$ и $v_{i+\varkappa,j}(\eta)$ с индексами $i < m$.

Верна

Теорема 7 [14]. *Существуют функции* $u_{m,n}(\eta)$ *и* $v_{m+2,n}(\eta)$ *— решения системы уравнений* (19), (20), *принадлежащие* $C^{\infty}(0,\infty)$, *для которых соответственно ряды* (17) *и* (18) *являются асимптотическими представлениями при* $\eta \to 0$. *Ряды* (16), $\widetilde{W}$ *и* $\widetilde{Z}$ *согласованы:*

$$A_{(K+1)/3,\eta}A_{M,\tau}\widetilde{W}(\tau,\varepsilon) = A_{M,\tau}A_{(K+1)/3,\eta}\widetilde{u}(\eta,\varepsilon),$$
$$A_{(K+3)/3,\eta}A_{M+1,\tau}\widetilde{Z}(\tau,\varepsilon) = A_{M+1,\tau}A_{(K+3)/3,\eta}\widetilde{v}(\eta,\varepsilon).$$

Также для этих функций справедливы асимптотические разложения при $\eta \to \infty$

$$\begin{aligned} u_{m,n}(\eta) &= \eta^{(m-n)/2} \sum_{k=0}^{m-n-1} \eta^{-k/2}\ln^{k}(\eta)\varphi(\eta^{-1/2}), \\ v_{m,n}(\eta) &= \eta^{(m-n)/2} \sum_{k=0}^{m-n-3} \eta^{-k/2}\ln^{k}(\eta)\varphi(\eta^{-1/2}) + C(\ln\eta)^{m-n-2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь вновь использовано обозначение $\varphi(\eta)$ *для формальных рядов вида* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i\eta^{3i}$.

После перехода в рядах (16) с использованием асимптотики (21) от переменной η при $\eta \to \infty$ к переменной t при $t \to 0$ получим правильные формулы для внешнего разложения

$$\widetilde{U}(t,\varepsilon) = U_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i}\sum_{j=0}^{i} U_{i,j}(t)\ln^{j}\varepsilon, \quad \widetilde{V}(t,\varepsilon) = V_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i}\sum_{j=0}^{i} V_{i,j}(t)\ln^{j}\varepsilon, \tag{22}$$

в качестве коэффициентов $U_{i,j}(t)$ и $V_{i,j}(t)$ которых выступают задающие условия согласования промежуточного и внешнего разложений формальные ряды

$$\overline{U}_{i,j}(t) = \sum_{k=1-i}^{\infty} t^{k/2}P_{i-j}(\ln t), \quad \overline{V}_{i,j}(t) = \sum_{k=3-i}^{\infty} t^{k/2}P_{i-j}(\ln t), \tag{23}$$

где $P_{i-j}(\ln t)$ — многочлены степени не выше $i-j$ от $\ln t$.

Подставляя ряды (22) в уравнения системы (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему

$$\begin{cases} 0 = f(t, U_0(t), V_0(t)), \quad \dfrac{dV_0}{dt} = g(t, U_0(t), V_0(t)), \\ \dfrac{dU_{i-3,j}}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))U_{i,j} + \dfrac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))V_{i,j} + F^U_{i,j}(t), \\ \dfrac{dV_{i,j}}{dt} = \dfrac{\partial g}{\partial U}(P_0(t))U_{i,j} + \dfrac{\partial g}{\partial V}(P_0(t))V_{i,j} + F^V_{i,j}(t), \end{cases} \tag{24}$$

где $i \geq 0$ и $0 \leq j \leq i$; функции $F^U_{i,j}(t)$ и $F^V_{i,j}(t)$ зависят от U_{i_1,j_1} и V_{i_2,j_2} с индексами i_1 и i_2, меньшими, чем i; функции $U_{i,j}$ при $i \leq -1$, а также при $j \geq i+1$ введены для единообразия записи и определены тождественно равными нулю.

Верно следующее утверждение.

Теорема 8 [14]. *Существуют решения уравнений* (24), *которые принадлежат* $C^\infty(0, t_0]$ *для некоторого* $t_0 > 0$ *и имеют асимптотические разложения* (23) *при* $t \to 0$. *Ряды* (16) *и* (22) *согласованы*: $A_{M,t}A_{N+1/3,\eta}\widetilde{u}(\eta,\varepsilon) = A_{N+1/3,\eta}A_{M,t}\widetilde{U}(t,\varepsilon)$, $A_{M,t}A_{N+1,\eta}\widetilde{v}(\eta,\varepsilon) = A_{N+1,\eta}A_{M,t}\widetilde{V}(t,\varepsilon)$.

Введем в рассмотрение составное асимптотическое разложение решения $u(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ исходной задачи (12)

$$X_N(t,\varepsilon) = A_{N,t}\widetilde{U}(t,\varepsilon) + A_{N,\tau}\widetilde{W}(\tau,\varepsilon) + A_{N,\eta}\widetilde{U}(\eta,\varepsilon) - A_{N,t}A_{N,\eta}\widetilde{U}(\eta,\varepsilon) - A_{N,\eta}A_{N,\tau}\widetilde{W}(\tau,\varepsilon),$$

$$Y_N(t,\varepsilon) = A_{N,t}\widetilde{V}(t,\varepsilon) + A_{N,\tau}\widetilde{Z}(\tau,\varepsilon) + A_{N,\eta}\widetilde{V}(\eta,\varepsilon) - A_{N,t}A_{N,\eta}\widetilde{V}(\eta,\varepsilon) - A_{N,\eta}A_{N,\tau}\widetilde{Z}(\tau,\varepsilon).$$

Справедлива

Теорема 9 [14]. *При достаточно малых значениях параметра* ε *решение* $u(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ *задачи* (12) *существует на отрезке* $[0,t_0]$, *где число* $t_0 > 0$ *определено в* теореме 8. *Справедлива равномерная по* $t \in [0,t_0]$ *оценка при* $\varepsilon \to 0$ $|u(t,\varepsilon) - X_N(t,\varepsilon)| + |v(t,\varepsilon) - Y_N(t,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{\gamma N})$, *где* $\gamma > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$ *— произвольное достаточно большое число.*

6. Задачи с двумя независимыми малыми параметрами

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сингулярным образом зависящие от нескольких малых параметров, исследовались в сравнительно небольшом числе работ. Пионерскими в этом направлении являются работы А. Н. Тихонова и И. С. Градштейна, в которых, в частности, изучался предельный переход при стремлении к нулю параметров. Вопросы построения и обоснования асимптотики решения систем уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости, рассматривались в работах А. Б. Васильевой.

Алгоритм асимптотического расщепления систем линейных дифференциальных уравнений, зависящих от двух малых параметров, на подсистемы меньшей размерности изложен в работах Н. А. Сотниченко, С. Ф. Фещенко. Вопрос о построении общего решения подобных систем при некоторых условиях на матрицу при производных и матрицу системы изучался в работах В. П. Яковца, М. А. Стрельникова.

Исследованию предельного перехода в некоторых сингулярно возмущенных задачах с малыми параметрами, зависящими от переменной дифференцирования, посвящены работы Н. А. Косиченко. В работах Р. П. Кузьминой исследуется задача Коши для почти регулярной системы, системы с целыми степенями малого параметра при производных, а также для системы с двойной сингулярностью. Эти задачи соответствуют различным способам вхождения малого параметра в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этих типов задач приводится построение рядов, которые являются асимптотическими разложениями решений или сходятся к решению на соответствующих промежутках времени.

В работах Р. Е. О'Мэлли строились асимптотические разложения решений начальных и краевых задач. При этом предполагалась зависимость между малыми параметрами. Асимптотика решения линейного уравнения второго порядка, сингулярно зависящего от двух малых параметров, не связанных между собой, рассматривалась для краевой задачи Г. И. Шишкиным.

Тем не менее остается ряд невыясненных вопросов, касающихся прежде всего построения и обоснования асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с несколькими малыми параметрами в случае, когда не предполагается никакой зависимости между параметрами при стремлении их к нулю.

В 2003 г. Арлен Михайлович поставил цель получить асимптотику решения следующей сингулярно возмущенной начальной задачи, равномерно пригодную при любых соотношениях между малыми параметрами:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=a(t)x+b(t)y+f(t),\quad \mu\frac{dy}{dt}=c(t)x+d(t)y+g(t), \tag{25}$$

$$x|_{t=0}=x^0,\quad y|_{t=0}=y^0, \tag{26}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$, $g(t)$ — бесконечно дифференцируемые вещественные функции на $[0,T]$, удовлетворяющие условиям

$$a(t)<0,\quad d(t)<0,\quad D(t)=a(t)d(t)-b(t)c(t)>0,\quad t\in[0,T], \tag{27}$$

$\varepsilon>0$, $\mu>0$ — малые параметры.

Асимптотическое разложение решения задачи (25), (26) строится в предположении, что ε, μ независимо стремятся к нулю. Под асимптотическим разложением понимается ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t,\varepsilon,\mu), \tag{28}$$

N-я частичная сумма которого является асимптотическим приближением к решению рассматриваемой задачи с точностью $O(\varepsilon^{N+1}+\mu^{N+1})$ равномерно по $t\in[0,T]$. При этом члены асимптотики должны определяться из более простых задач по сравнению с исходной задачей.

Обозначим $z(t,\varepsilon,\mu)=(x(t,\varepsilon,\mu),y(t,\varepsilon,\mu))^T$, $z^0=(x^0,y^0)^T$. Асимптотическое разложение решения будем искать в виде

$$z(t,\varepsilon,\mu)=Z(t,\varepsilon,\mu)+\Psi(\tau,\varepsilon,\mu), \tag{29}$$

где $\Psi(\tau,\varepsilon,\mu)$ — так называемое внутреннее разложение, зависящее кроме параметров от новой растянутой переменной $\tau=t/(\varepsilon\mu)$, $Z(t,\varepsilon,\mu)$ — внешнее разложение, приближающее решение задачи равномерно на множестве $t_0\leqslant t\leqslant T$, где $t_0>0$ как угодно близко к 0, но фиксировано при $\varepsilon\to 0$, $\mu\to 0$.

Сами разложения имеют структуру двойных рядов по степеням малых параметров. Так, $Z(t,\varepsilon,\mu)$ ищем в виде

$$Z(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon^m\mu^n z_{m,n}(t). \tag{30}$$

Подставляя разложение (30) в систему (25) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^m\mu^n$, последовательно определим коэффициенты ряда (30) из систем линейных алгебраических уравнений с матрицей $A(t)$ коэффициентов исходной системы (25). В частности, главный член внешнего разложения $z_{0,0}(t)=(x_{0,0}(t),y_{0,0}(t))^T$ является решением вырожденной системы, соответствующей исходной системе (25) (при $\varepsilon=\mu=0$).

Внутреннее разложение представим в виде

$$\Psi(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon^m\mu^n\Psi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu). \tag{31}$$

Для функций $\Psi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu)$ удалось получить рекуррентные формулы, позволяющие находить их с использованием лишь только алгебраических операций. Подставляя полученные формулы в ряды (31), мы можем выделить агрегаты, зависящие только от параметров и коэффициентов системы, получить таким образом структуру рядов для задачи с двумя малыми параметрами. При этом частичная сумма построенного ряда (29) удовлетворяет начальным условиям задачи.

Арлен Михайлович Ильин и Ольга Олеговна Коврижных в 2004–2005 гг. получили оценки членов внутреннего разложения, которые являются ключевыми для обоснования построенной асимптотики.

Теорема 10 [16]. *Для функций* $\Psi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu)$, $m=0,1,\dots$, $n=0,1,\dots$, *справедливы оценки*

$$\|\Psi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant\frac{C}{\rho(\varepsilon,\mu)^{i_*}}\exp(-\sigma\rho(\varepsilon,\mu)\tau),\quad \tau\geqslant 0,$$

где $\rho(\varepsilon,\mu)=\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon+\mu}$, $i_*=\min(m,n)$; $C>0$ *и* $\sigma>0$ *не зависят от* ε, μ, τ, *а* σ *достаточно мало.*

В частности, в силу последнего утверждения, определений τ и $\rho(\varepsilon,\mu)$ выполняется соотношение

$$\|\Psi_{0,0}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant C\exp\Big(-\sigma\frac{t}{\varepsilon+\mu}\Big),\quad t\geqslant 0,$$

т. е. главный член внутреннего разложения при любом фиксированном $t\in(0,T]$ и $\varepsilon\to 0$, $\mu\to 0$ экспоненциально стремится к нулю.

Теорема 11 [17]. *При выполнении условий* (27) *найдутся постоянные* $\varepsilon_0>0$, $\mu_0>0$ *и* $C>0$ *такие, что при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ *решение* $z(t,\varepsilon,\mu)$ *задачи* (25), (26) *удовлетворяет неравенству* $\|z(t,\varepsilon,\mu)-z_N(t,\varepsilon,\mu)\|\leqslant C(\varepsilon^{N+1}+\mu^{N+1})$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$, *где* $z_N(t,\varepsilon,\mu)$ *определяется формулой*

$$z_N(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{m,n=0}^{N}\varepsilon^m\mu^n(z_{m,n}(t)+\Psi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu)).$$

Отметим, что члены ряда (28) выражаются через $z_{m,n}(t)$ и $\Psi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu)$ следующим образом:

$$\varphi_0(t,\varepsilon,\mu)=z_{0,0}(t)+\Psi_{0,0}(\tau,\varepsilon,\mu),$$

$$\varphi_k(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{i=0}^{k-1}\Big\{\varepsilon^k\mu^i\left(z_{k,i}(t)+\Psi_{k,i}(\tau,\varepsilon,\mu)\right)+\varepsilon^i\mu^k\big(z_{i,k}(t)$$

$$+\Psi_{i,k}(\tau,\varepsilon,\mu)\big)\Big\}+\varepsilon^k\mu^k\left(z_{k,k}(t)+\Psi_{k,k}(\tau,\varepsilon,\mu)\right),\quad k=1,2,\dots\,.$$

Далее О. О. Коврижных и А. Р. Данилиным была рассмотрена начальная задача для сингулярно возмущенной системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных (*Дифференц. уравнения.* 2008. Т. 44, № 6. С. 738–747):

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=f(t,x,y),\qquad \mu\frac{dy}{dt}=g(t,x,y),\quad x|_{t=0}=x^0,\qquad y|_{t=0}=y^0. \tag{32}$$

При некоторых естественных условиях на правые части системы (32) построено формальное асимптотическое разложение решения этой задачи, получены оценки членов асимптотики. Найден класс нелинейных систем, для которых формальное асимптотическое решение является истинным асимптотическим разложением решения рассматриваемой начальной задачи.

7. Задачи оптимального управления линейными стационарными системами, зависящими от малого параметра

В начале 1990-х годов наряду с продолжением исследований бисингулярных краевых задач для уравнений в частных производных Арлен Михайлович Ильин инициировал исследование ряда новых бисингулярных задач — задач теории оптимального управления, содержащих в своем описании малые параметры. Характерной особенностью таких задач является необходимость изучения систем уравнений, что в случае уравнений в частных производных является мало изученной областью. Отметим, что даже при рассмотрении задач оптимального управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, возникают неожиданные результаты.

К этому времени задачи оптимального управления, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений и зависящие от малого параметра, рассматривались в основном в форме систем с быстрыми и медленными переменными и с множеством ограничений на значения управления в виде многогранника. При этом были получены условия стремления значений функционалов качества к значениям аналогичных функционалов для предельных задач. Вид ограничивающего множества в ряде стандартных задач приводит к оптимальным управлениям, принимающим значения только в вершинах ограничивающих многоугольников, и тем самым вообще говоря, разрывным. Если же ограничивающее множество имеет гладкую границу, например, шар в евклидовом пространстве, то оптимальное управление непрерывно.

Первые исследования были связаны с задачей быстродействия (в классе кусочно-непрерывных управлений u) вида

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = Ax_\varepsilon + Bu_\varepsilon, \qquad x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n,\ u_\varepsilon \in \mathbb{R}^m, \quad \|u_\varepsilon(t\| \leqslant 1, \\ x_\varepsilon(0) = x_0 + \varepsilon y, \quad x_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = 0, \quad \vartheta_\varepsilon \longrightarrow \min, \end{cases} \tag{33}$$

где A и B — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\operatorname{rank}(B) = m \in [2, n-1]$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^m$.

В силу принципа максимума Понтрягина оптимальное управление в этой задаче имеет вид

$$u(t) = \frac{B^* \exp(-A^* t) l_\varepsilon}{||B^* \exp(-A^* t) l_\varepsilon||}$$

и тем самым полностью определяется вектором l_ε. При этом, если выполнено условие вполне управляемости системы из (33), то знаменатель в формуле оптимального управления может обращаться в нуль лишь в изолированных точках.

Подставляя управление указанного вида в (33), получим основное уравнение для нахождения l_ε:

$$\overline{x}_0 + \varepsilon \overline{y} = \int\limits_{t_0}^{\vartheta_\varepsilon} \frac{C(t) l_\varepsilon}{\langle C(t) l_\varepsilon, l_\varepsilon \rangle^{1/2}} dt, \tag{34}$$

где $\overline{x}_0 := -\exp(-At_0)x_0$, $\overline{y} := -\exp(-At_0)y$, $C(t) := \exp(-At)BB^* exp(-A^* t)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Таким образом, основная задача нахождения асимптотического разложения времени быстродействия ϑ_ε, состояний системы $x_\varepsilon(t)$ и оптимального управления $u_\varepsilon(t)$ сводится к нахождению асимптотического разложения вектора l_ε — решения уравнения (34).

Арлен Михайлович Ильин и Алексей Руфимович Данилин в работе (*Изв. РАН. Техническая кибернетика.* 1994. № 3. С. 96–103) рассмотрели частный случай задачи (33), соответствующий управлению материальной точкой на плоскости с помощью силы, ограниченной по величине. При этом x_0 соответствовало начальному положению и начальной скорости, вектора которых параллельны друг другу, а y_0 был вектором перпендикулярным. В этом случае при $\varepsilon = 0$ оптимальное управление имеет одну точку разрыва, а при $\varepsilon > 0$ оптимальное управление есть гладкая функция.

Позже был рассмотрен общий случай, когда при $\varepsilon = 0$ оптимальное управление имеет единственную точку разрыва, а при $\varepsilon > 0$ оптимальное управление есть гладкая функция (Данилин А. Р., Ильин А. М. *Фундамент. и прикл. математика.* 1998. Т. 4. № 3. С. 905–926).

Основная проблема, возникающая в рассмотренных случаях, заключается в том, что необходимо интеграл из (34) разложить в асимптотический ряд по двум малым величинам: ε и $r_\varepsilon = l_\varepsilon - l_0$, где вектор l_0 определяет оптимальное управление в задаче (33) с $\varepsilon = 0$. Для преодоления этой трудности приходится, как и в бисингулярных задачах для дифференциальных уравнений, рассматривать внешнее (вне малой окрестности нуля знаменателя в интеграле из (34)) разложение и внутреннее (в малой окрестности нуля знаменателя). При этом для нахождения асимптотического разложения интеграла был использован метод вспомогательного параметра (см., например, [18, § 30.II; 19]. В итоге был получен следующий результат.

Теорема 12 [19]. *Время быстродействия* ϑ_ε *и компоненты вектора* r_ε *раскладываются в асимптотические ряды вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k\Big(\varepsilon, W(\varepsilon), \ln\frac{1}{W(\varepsilon)}\Big),$$

где R_k *— рациональные вектор-функции своих аргументов и* $R_k\Big(\varepsilon, W(\varepsilon), \ln\dfrac{1}{W(\varepsilon)}\Big) = O(\varepsilon^k)$.

Если $m = 2$, то $W(\varepsilon)$ выражается через решение уравнения $\varepsilon = s\ln(1/s)$, не зависящее от $\overline{y}$. При этом R_k — рациональные вектор-функции от ε и $W(\varepsilon)$.

Отметим, что в этом случае не существует асимптотического разложения времени быстродействия ϑ_ε даже по рациональным функциям от ε и $\ln\varepsilon$.

В статьях (Данилин А. Р. *Дифференц. уравнения.* 2006. Т. 42, № 11. С. 1473–1480; Данилин А. Р., Парышева Ю. В. *Докл. АН.* 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154) были исследованы задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными и терминальным критерием качества, который зависит только от медленных переменных, а в работах (Данилин А. Р., Коврижных О. О. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2012. Т. 18, № 2. С. 67–79; 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75) и в [20] — задачи отпимального быстродействия с быстрыми и медленными переменными и, вообще говоря, с дополнительным малым параметром в начальных условиях.

Отметим, что хотя сложная асимптотика времени быстродействия изначально была получена для ситуации необщего положения, в дальнейшем нашлись задачи быстродействия с начальными условиями общего положения, но с тем же характером асимптотического разложения [20] (это была одна из последних работ, представленных А. М. Ильным в журнал “Доклады академии наук”).

В настоящее время исследования в этой области продолжаются (см., например, работы А. Р. Данилина, О. О. Коврижных и А. А. Шабурова в данном номере журнала).

8. Задачи оптимального управления, описываемые сингулярно возмущенными уравнениями эллиптического типа

Бисингулярные задачи оптимального управления изучены в существенно меньшей степени, чем краевые задачи. Это связано с рядом причин. Одна из них обусловлена тем, что условия оптимальности общих задач управления решениями различных задач для уравнений в частных производных имеют вид системы уравнений в частных производных, для которых недостаточно исследованы вопросы разрешимости и гладкости решений. Наиболее регулярными в этом смысле являются задачи, описываемые граничными задачами для уравнений эллиптического типа и квадратичным функционалом качества. В этом случае оптимальное управление и соответствующее ему решение являются решениями граничной задачи для системы сопряженных уравнений.

Другая причина как раз проистекает из необходимости исследования решений систем уравнений в частных производных и возникающих здесь технических трудностей.

Проведенное А. М. Ильиным исследование асимптотики решения первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа в области с малой полостью (см., например, [1, гл. III, § 1]), естественным образом породило следующую задачу оптимального управления:

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}y_\varepsilon(x) & = & f(x) - u_\varepsilon(x), & x \in \Omega_\varepsilon,\ y_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) & := & \displaystyle\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (y_\varepsilon^2(x) + \nu\, u_\varepsilon^2(x))\, dx \longrightarrow \inf, & u_\varepsilon \in U_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{35}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей (класса C^∞) $\partial\Omega$, содержащая начало координат O; $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \varepsilon\,\omega$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; ω — аналогичная область такая, что $O \in \omega$ и $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ связно; $\nu > 0$, $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ — соболевское пространство функций, равных нулю на границе $\partial\Omega_\varepsilon$,

$$\mathcal{L}y_\varepsilon := \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Bigl(a_{ij}(x)\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial x_j}\Bigr) - a_0(x)\, y_\varepsilon, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

$$f,\ a_{ij},\ a_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad a_0(x) \geq \eta_1 > 0 \ \text{ при } \ x \in \Omega,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \eta_2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \ \text{ при всех } \ \xi_i \ \ (\eta_2 > 0),$$

$$U_\varepsilon := \Bigl\{u_\varepsilon(\cdot) \in L_2(\Omega_\varepsilon) \colon \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2(x)\, dx \leq R^2\Bigr\}.$$

Из результатов монографии (Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* М.: Мир, 1972) следует, что данная задача эквивалентна задаче Дирихле для системы двух уравнений, зависящей от скалярного параметра λ_ε

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}y_\varepsilon + u_\varepsilon^{opt} = f, \ \ \mathcal{L}u_\varepsilon^{opt} - \lambda_\varepsilon\, y_\varepsilon = 0, \ \ y_\varepsilon,\, u_\varepsilon^{opt} \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ \bigl(\nu^{-1} - \lambda_\varepsilon\bigr)\bigl(R - ||u_\varepsilon^{opt}||_\varepsilon\bigr) = 0, \ \ ||u_\varepsilon^{opt}||_\varepsilon \leq R, \ \ 0 < \lambda_\varepsilon \leq \nu^{-1}. \end{array}\right. \tag{36}$$

Здесь $||\cdot||_\varepsilon$ — норма в пространстве $L_2(\Omega_\varepsilon)$.

Предельной для (36) является задача

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}y_0 + u_0 = f, \ \ \mathcal{L}u_0 - \lambda_0\, y_0 = 0, \ \ y_0, u_0 \in H_0^1(\Omega), \\ \bigl(\nu^{-1} - \lambda_0\bigr)\,(R - ||u_0||) = 0, \ \ ||u_0|| \leq R, \ \ 0 < \lambda_0 \leq \nu^{-1}, \end{array}\right. \tag{37}$$

где $||\cdot||$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$. При этом при $\varepsilon \longrightarrow 0$ имеют место соотношения $\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0$ и $y_\varepsilon \longrightarrow y_0$, $u_\varepsilon^{opt} \longrightarrow u_0$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Если ограничения на управление по существу, т. е. $\lambda_0 < 1/\nu$, то $||u_\varepsilon||_\varepsilon = R$ при всех достаточно малых ε.

Формальное асимптотическое разложение решения указанной задачи Дирихле действительно является равномерным асимптотическим разложением: если для некоторого $\alpha > 0$ функции $y(x), u(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ и $\lambda(\varepsilon)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}y + u - f = o(\varepsilon^\alpha), & \mathcal{L}u - \lambda(\varepsilon)y = o(\varepsilon^\alpha), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ y(x) = o(\varepsilon^\alpha), \quad u(x) = o(\varepsilon^\alpha), & ||u||_\varepsilon - R^2 = o(\varepsilon^\alpha), & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{array}$$

при $\varepsilon \longrightarrow 0$ в смысле метрики пространств $C^2(\Omega_\varepsilon)$, $C^2(\partial\Omega_\varepsilon)$ соответственно, а $\lambda(\varepsilon) - \lambda_0 = o(1)$, $y(x) - y_0(x) = o(1)$, $u(x) - u_0(x) = o(1)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ в смысле метрики $L_2(\Omega_\varepsilon)$, то $\lambda(\varepsilon) - \lambda_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha)$, $y(x) - y_\varepsilon(x) = o(\varepsilon^\alpha)$, $u_\varepsilon^{opt}(x) = o(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ в метрике пространства $C(\overline{\Omega}_\varepsilon)$.

В отличие от [1] асимптотика коэффициентов разложения имеет логарифмические составляющие, что приводит и к смене асимптотической последовательности — вместе со степенями малого параметра здесь появляются и логарифмические члены: внешнее разложение ищется в виде

$$\mathcal{Y}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{k-2}y_{k,l}(x)\ln^l\varepsilon,\quad \mathcal{U}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{k-2}u_{k,l}(x)\ln^l\varepsilon,\quad \lambda(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{k-2}\lambda_{k,l}\ln^l\varepsilon,$$

а внутреннее разложение для функций $z(\xi):=y(\varepsilon\xi)$ и $v(\xi):=u(\varepsilon\xi)$, где ξ $(x=\varepsilon\xi)$ — внутренняя переменная, — в виде

$$\mathcal{Z}(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\sum_{m=0}^{i-2}z_{i,m}(\xi)\ln^m\varepsilon,\quad \mathcal{V}(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\sum_{m=0}^{i-2}v_{i,m}(\xi)\ln^m\varepsilon.$$

Функции $y_{0,0}(x)$, $u_{0,0}(x)$ и число $\lambda_{0,0}$ — это решение предельной задачи (37): $y_0(x), u_0(x)$ и λ_0. При этом в силу сделанных предположений $y_0(x)$, $u_0(x)\in C^\infty(\Omega)$.

Стандартным образом получаются задачи для определения коэффициентов всех рядов. Алгоритм нахождения этих коэффициентов следующий: сначала по предыдущим коэффициентам определяется $\lambda_{k,l}$, а затем соответствующие коэффициенты внешнего и внутреннего разложений функций u_ε и y_ε. Коэффициенты $\lambda_{k,l}$ определяются из условия, аппроксимирующего норму управления u (при этом опять используется метод вспомогательного параметра для нахождения асимптотики интеграла, задающего норму), остальные же коэффициенты определяются с помощью метода согласования асимптотических разложений.

А. Р. Данилин в работах (*Мат. сб.* 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12; 2003. Т. 194, № 1. С. 31–60) рассмотрел задачу, аналогичную задаче (35) с оператором $\mathcal{L}_\varepsilon=\varepsilon^2\triangle+\dfrac{\partial}{\partial y}-a_0$, зависящим от малого параметра $\varepsilon>0$, и с областью Γ — квадратом без полости (как в задаче (4), (5)).

В дальнейшем рассматривались разные задачи управления с оператором, зависящим от малого параметра, в том числе и задачи управления потоком через границу [21;22]. В настоящее время исследования в этой области продолжаются (см., например, работу А.Р. Данилина в предыдущем номере этого журнала).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. **Ильин А.М., Леликова Е.Ф.** Метод сращивания асимптотических разложений для уравнений $\varepsilon\Delta u-a(x,y)u_y=f(x,y)$ в прямоугольнике // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 4. С. 568–583.
3. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 107–119.
4. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 10. С 93–108.
5. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных. // Тр. Моск. мат. об-ва. 2010. Т. 71. С. 162–199. ISBN: 978-5-397-01447-2 .
6. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 2. С 136–139.
7. **Першин И.В.** Построение асимптотики функции Грина в окрестности особой точки // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, №6. С. 842–843.
8. **Першин И.В.** Асимптотика решения уравнения теплопроводности с особенностью на границе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Vol. 18, №1. С. 268–272.
9. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 699–706.

10. **Захаров С.В., Ильин А.М.** От слабого разрыва к градиентной катастрофе // Мат. сб. 2001. Т. 192, №10. С. 3–18.

11. **Захаров С.В.** Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 6. С. 47–62.

12. **Захаров С.В.** Особенности A и B типов в асимптотическом анализе решений параболического уравнения // Функц. анализ. и его приложения. 2015. Т. 49, вып. 4. С. 82–85.

13. **Ильин А. М., Хачай О. Ю.** Сингулярная начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 4. С. 455–458.

14. **Ильин А.М., Леонычев Ю.А., Хачай О.Ю.** Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 1. С. 81–102. doi: 10.4213/sm7538 .

15. **Ильин А.М., Хачай О.Ю.** Структура пограничных слоев в сингулярных задачах // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 256–258.

16. **Ильин А.М., Коврижных О.О.** Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Докл. АН. 2004. Т. 396, № 1. С. 23–24.

17. **Коврижных О.О.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной системы линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1322–1331.

18. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

19. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, №12. С. 2166–2177.

20. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. АН. 2013. Т. 451. №6. С. 612–614.

21. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления // Докл. АН. 2011. Т. 440, №4. С. 1–4

22. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. №2. С. 87–100.

Поступила 1.02.2017

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: svz@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

Леликова Елена Федоровна
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
профессор
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: lef@imm.uran.ru

Першин Игорь Викторович
математик 1-й кат.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: piv@imm.uran.ru

Хачай Олег Юрьевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: khachay@yandex.ru

REFERENCES

1. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence, American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published *Soglasovanie asimptoticheskih razlozhenij reshenij kraevyh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
2. Il'in A.M., Lelikova E.F. A method of joining asymptotic expansions for the equation $\varepsilon\Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ in a rectangle. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 25, no. 4, pp. 533–548. doi: 10.1070/SM1975v025n04ABEH002461 .
3. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with small parameter at a higher derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2003, suppl. 1, pp. S129–S143.
4. Lelikova E.F. The asymptotics of the solution of an equation with a small parameter in a domain with angular points. *Sbornik Math.*, 2010, vol. 201, no. 10, pp. 1495–1510. doi: 10.1070/SM2010v201n10ABEH004119 .
5. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with a small parameter multiplying one of the highest order derivatives. *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 71, 2010, pp. 141–174 . ISSN: 1547-738X .
6. Lelikova E.F. On the asymptotic behavior of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a boundary inflection point. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 756–759.
7. Pershin I.V. Construction of the asymptotics of the Green function in a neighborhood of a singular point. *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 6, pp. 883–885. doi: 10.1023/A:1019211224598 .
8. Pershin I.V. Asymptotics of a solution to the heat equation with a singularity at the boundary. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 268–272 (in Russian).
9. Zakharov S.V. The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a large initial gradient and low viscosity. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 665–672. doi: 10.1134/S0965542510040081 .
10. Il'in A.M., Zakharov S.V. From weak discontinuity to gradient catastrophe. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1417–1433. doi: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000599 .
11. Zakharov S.V. Asymptotic solution of a Cauchy problem in a neighbourhood of a gradient catastrophe. *Sbornik Math.*, 2006, vol. 197, no. 6, pp. 835–851. doi: 10.1070/SM2006v197n06ABEH003780 .
12. Zakharov S.V. Singularities of A and B types in asymptotic analysis of solutions of a parabolic equation. *Funct. Anal. Appl.*, 2015, vol. 49, no. 4, pp. 307–310. doi: 10.1007/s10688-015-0120-1 .
13. Il'in A.M., Khachay O.Y. Singular initial value problem for a system of ordinary differential equations with a small parameter. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 729–732. doi: 10.1134/S1064562408050232 .
14. Il'in A.M., Leonychev Y.A., Khachay O.Y. The asymptotic behaviour of the solution to a system of differential equations with a small parameter and singular initial point. *Sbornik Math.*, 2010, vol. 201, no. 1, pp. 79–101. doi: 10.1070/SM2010v201n01ABEH004066 .
15. Il'in A.M., Khachai O.Y. Structure of boundary layers in singular problems. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 1, pp. 497–499. doi: 10.1134/S1064562412040187 .
16. Il'in A.M., Kovrizhnykh O.O. The asymptotic behavior of solutions to systems of linear equations with two small parameters. *Dokl. Math.*, 2004, vol. 69, no. 3, pp. 336–337.
17. Kovrizhnykh O.O. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed system of linear equations. *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1392–1402. doi: 10.1007/s10625-005-0291-2 .
18. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3/hbk.
19. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. doi: 10.1134/S0965542506120062 .

20. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi: 10.1134/S1064562413040364 .
21. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotic expansion of solutions to optimal boundary control problems. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 665–668. doi: 10.1134/S106456241106024X .
22. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on February 1, 2017.

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Sergei Viktorovich Zakharov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematis and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: svz@imm.uran.ru.

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru .

Elena Fedorovna Lelikova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: lef@imm.uran.ru .

Igor' Viktorovich Pershin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: piv@imm.uran.ru .

Oleg Yur'evich Khachay, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: khachay@yandex.ru .