ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 532.51

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СЛОЖНОЙ КОНВЕКЦИИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПОЛЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗНОГО ЗНАКА

А. В. Горшков, Е. Ю. Просвиряков

В статье изучается слоистая конвекция вязкой несжимаемой жидкости. Течение несжимаемой среды описывается переопределенной системой уравнений Обербека — Буссинеска. Найдено точное решение переопределенной системы уравнений. Решение принадлежит классу Линя — Сидорова — Аристова. В нем скорости являются однородными относительно горизонтальных переменных, поля давления и температуры линейно зависят от координат x и y. Использование класса решений Линя — Сидорова — Аристова сохраняет нелинейность уравнений движения только в уравнении теплопроводности. Исследование краевой задачи проведено для конвекции Бенара — Марангони с учетом теплообмена на свободной границе. Теплообмен определяется законом Ньютона — Рихмана. Конвективное движение жидкости характеризуется существованием толщины слоя, при которой сила трения (касательные напряжения) равны нулю во внутренней точке слоя жидкости. Приведены соответствующие ограничения на параметры управления, которые определяют условия отсутствия скольжения слоев для теплового и концентрационного конвективного течения жидкости.

Ключевые слова: конвекция Бенара-Марангони, точное решение, граничные условия III рода, касательные напряжения.

A. V. Gorshkov, E. Yu. Prosviryakov. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs.

We study layered convection of a viscous incompressible fluid. The flow of an incompressible medium is described by the overdetermined system of the Oberbeck–Boussinesq equations. An exact solution of the overdetermined system of equations is found. The solution belongs to the Lin–Sidorov–Aristov class. In this class the velocities are homogeneous with respect to the horizontal variables. The pressure and temperature fields are linear functions of the coordinates x and y. The use of the Lin–Sidorov–Aristov class preserves the nonlinearity of the motion equations only in the heat equation. The boundary value problem is studied for the Bénard–Marangoni convection with heat transfer at the free boundary. The heat transfer is determined by the Newton–Richman law. The convective motion of a fluid is characterized by the existence of a layer thickness at which the friction force (the shear stress) vanishes at an interior point of the fluid layer. We give constraints on the control parameters that determine the no-slip conditions for the layers in the cases of thermal and solutal convective flows.

Keywords: Bénard–Marangoni convection, exact solution, boundary condition of the third kind, shear stress.

MSC: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41

Введение

К настоящему времени известно мало классов точных решений уравнений Навье — Стокса, описывающих жидкости с различными свойствами. Наиболее продуктивным классом точных решений оказались течения жидкости, профили скоростей которых линейно зависят от части координат. Первым, кто изучал скорости, линейные по горизонтальным координатам, для задач магнитной гидродинамики был Ц. Ц. Линь [1]. Далее в работах А. Ф. Сидорова были сформулированы несколько классов точных решений, которые справедливы для конвективных и диффузионных течений вязких сжимаемых и несжимаемых сред [2]. В классе Сидорова поля температуры были линейными по горизонтальным координатам [2; 3].

Дальнейшее обобщение было предпринято С. Н. Аристовым, который сформулировал задачи исследования конвективных течений, учитывая совместные квадратичные эффекты давления и температуры. В недавней статье [4] была показана возможность исследования термодиффузионных движений вязкой несжимаемой жидкости при учете перекрестных диссипативных эффектов Соре и Дюффора. Это обобщение особенно важно, поскольку в практических задачах нужно учитывать оба эффекта, а в подавляющем большинстве случаев исследователи пренебрегают одним из влияний на структуру течения [6].

При использовании классов точных решений системы определяющих уравнений достаточно часто являются переопределенными [1; 4; 5; 7]. В этом случае нахождение условия разрешимости позволяет построить новые точные решения, которые обладают порой весьма неожиданными свойствами, позволяющими описывать конвективные противотечения в жидкости [8; 9]. Тем не менее возможна противоположная ситуация, при которой класс решений помогает сразу разрешить исходную переопределенную систему Обербека — Буссинеска [4; 7–9].

В статье [7] было вычислено первое точное решение уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, описывающих конвективное слоистое течение, которое может быть индуцировано термокапиллярными силами и наличием теплообмена на границах бесконечного слоя. Было показано [7], что при действии двух факторов на возникновение конвекции в жидкости наблюдаются противотечения и усиление скоростей, а также при определенной толщине отсутствует трение на недеформируемой нижней границе. Интересной оказывается задача вычисления толщины слоя жидкости, при которой отсутствует сила трения между стратифицированными областями или в произвольном сечении слоя жидкости. В статьях [8–10] приводится только весьма частный случай исследования точного решения. Таким образом, отсутствует методика вычисления толщины слоя жидкости, при которой касательные напряжения в слоистом потоке жидкости могут быть сжимающими и растягивающими.

В настоящей статье будет приведено решение вышеуказанной задачи при помощи исследования спектральных свойств полиномиального поля скоростей.

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарная термокапиллярная слоистая конвекция (конвекция Бенара — Марангони) вязкой несжимаемой жидкости, которая движется в бесконечно протяженном слое толщины h. Система уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска [11] для слоистых течений является переопределенной, поскольку вертикальная скорость V_z равна нулю [8; 9; 12]. Для разрешимости системы уравнений Обербека — Буссинеска используется точное решение [2; 4; 7–9]:

$$V_x = U(z), \quad V_y = V(z), \quad T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z), \quad P = P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z). \tag{1.1}$$

Здесь $V_x = U$, $V_y = V$ — компоненты вектора скорости жидкости; T_0 и P_0 — фоновая температура и давление соответственно; T_1, T_2 и P_1, P_2 — горизонтальные (продольные) компоненты градиента температуры и давления соответственно.

Подстановка гидродинамических полей (1.1) позволяет свести нелинейную систему уравнений Обербека — Буссинеска в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [8; 9; 12]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2T_1}{dz^2} = 0, && \frac{d^2T_2}{dz^2} = 0,\\
&\frac{dP_1}{dz} = g\beta T_1, && \frac{dP_2}{dz} = g\beta T_2,\\
&\frac{d^2T_0}{dz^2} = \frac{1}{\chi}\left(UT_1 + VT_2\right), && \frac{dP_0}{dz} = g\beta T_0,\\
&\nu\frac{d^2U}{dz^2} = P_1, && \nu\frac{d^2V}{dz^2} = P_2.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь g — ускорение свободного падения; β — коэффициент объемного расширения; ν — кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости; χ— коэффициент температуропроводности.

Краевые условия, необходимые для вычисления частного решения системы (1.2), записываются следующим образом:

$$\begin{gathered} U(0)=0, \quad V(0)=0, \\ \eta \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=h}=-\sigma T_1(h), \\ \eta \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=h}=-\sigma T_2(h), \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z=0} &= \vartheta_1\left(A_1-T_1(0)\right), \quad \left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{z=0}=\vartheta_2\left(B_1-T_2(0)\right), \\ \left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z=h} &= \vartheta_1\left(A_2-T_1(h)\right), \quad \left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{z=h}=\vartheta_2\left(B_2-T_2(h)\right), \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$T_0(0)=0, \quad T_0(h)=0, \quad P_1(h)=0, \quad P_2(h)=0, \quad P_0(h)=S, \tag{1.5}$$

где $\vartheta_1=\alpha_1 h/\lambda_1$, $\vartheta_2=\alpha_2 h/\lambda_2$ — числа Нуссельта; α_1, α_2 — коэффициенты теплоотдачи; λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности для нижней (индекс 1) и верхней (индекс 2) граничных поверхностей соответственно; A_1, A_2 и B_1, B_2 — продольные компоненты градиенты температуры окружающей среды на нижней и верхней границах соответственно; σ — температурный коэффициент поверхностного натяжения; η — коэффициент динамической вязкости жидкости.

2. Построение точного решения

Точное решение, описывающее горизонтальные компоненты T_1 и T_2 градиента температуры, вычисляем, в отличие от [12], в виде линейных функций от относительной переменной $\zeta=z/h$:

$$T_1=a_1\zeta+b_1, \quad T_2=a_2\zeta+b_2.$$

В результате вычислений получим коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\left(A_2-A_1\right)\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}, \quad b_1=\frac{A_1\vartheta_1+A_2\vartheta_2+A_1\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}, \\ a_2 &= \frac{\left(B_2-B_1\right)\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}, \quad b_2=\frac{B_1\vartheta_1+B_2\vartheta_2+B_1\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

В этом случае решения T_1 и T_2 удовлетворяют краевым условиям (1.4).

Таким образом, выражения для T_1 и T_2 в силу (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\left(A_2-A_1\right)\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\zeta+\frac{A_1\vartheta_1+A_2\vartheta_2+A_1\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}, \\ T_2 &= \frac{\left(B_2-B_1\right)\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\zeta+\frac{B_1\vartheta_1+B_2\vartheta_2+B_1\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Последовательно интегрируя уравнения системы (1.2), с учетом функций (2.2) и граничных условий (1.3)–(1.5) получим, что скорости конвективного течения имеют вид

$$\begin{gathered} U(\zeta)=\frac{g\beta}{\nu}h^3\left\{\frac{\left(A_2-A_1\right)\vartheta_1\vartheta_2}{24\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2\right)}\zeta^4+\frac{A_1\vartheta_1+A_2\vartheta_2+A_1\vartheta_1\vartheta_2}{6\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2\right)}\zeta^3\right. \\ -\frac{2\left(A_1\vartheta_1+A_2\vartheta_2\right)+\left(A_1+A_2\right)\vartheta_1\vartheta_2}{4\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2\right)}\zeta^2 \\ \left.+\frac{2\left(A_2-A_1\right)\vartheta_1\vartheta_2+3\left(A_1\vartheta_1+A_2\vartheta_2+A_1\vartheta_1\vartheta_2\right)}{6\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2\right)}\zeta\right\}-\frac{\sigma h}{\eta}\frac{A_1\vartheta_1+A_2\vartheta_2+A_1\vartheta_1\vartheta_2}{\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2\right)}\zeta, \end{gathered}$$

$$V(\zeta) = \frac{g\beta}{\nu} h^3 \left\{ \frac{(B_2 - B_1)\,\vartheta_1\vartheta_2}{24\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2)} \zeta^4 + \frac{B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2 + B_1\vartheta_1\vartheta_2}{6\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2)} \zeta^3 \right.$$
$$- \frac{2\,(B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2) + (B_1 + B_2)\,\vartheta_1\vartheta_2}{4\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2)} \zeta^2$$
$$\left. + \frac{2\,(B_2 - B_1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 3\,(B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2 + B_1\vartheta_1\vartheta_2)}{6\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2)} \zeta \right\} - \frac{\sigma h}{\eta} \frac{B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2 + B_1\vartheta_1\vartheta_2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2)} \zeta.$$

3. Определение толщины слоя с нулевым трением

Обозначим через δ относительную глубину, на которой может возникнуть слой жидкости без трения. Параметр δ может принимать значения в диапазоне

$$0 \le \delta \le 1, \tag{3.1}$$

причем значение $\delta = 0$ соответствует твердой поверхности, а $\delta = 1$ — свободной поверхности слоя жидкости. Вычислим касательные напряжения в слое $\zeta = \delta$:

$$\tau_{zx} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial \zeta} = \eta \frac{dU}{d\zeta} = \frac{g\beta\rho}{6} h^6 \left\{ \frac{(A_2 - A_1)\,\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{A_1\vartheta_1 + A_2\vartheta_2 + A_1\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^2 \right.$$
$$\left. - 3 \frac{(A_2 + A_1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 2\,(A_1\vartheta_1 + A_2\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta + \frac{(2A_2 + A_1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 3\,(A_1\vartheta_1 + A_2\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \right\}$$
$$- \sigma \frac{A_1\vartheta_1 + A_2\vartheta_2 + A_2\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2}, \tag{3.2}$$

$$\tau_{zy} = \eta \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} = \eta \frac{dV}{d\zeta} = \frac{g\beta\rho}{6} h^6 \left\{ \frac{(B_2 - B_1)\,\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2 + B_1\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^2 \right.$$
$$\left. - 3 \frac{(B_2 + B_1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 2\,(B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta + \frac{(2B_2 + B_1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 3\,(B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \right\}$$
$$- \sigma A_1 \frac{B_1\vartheta_1 + B_2\vartheta_2 + B_2\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2}. \tag{3.3}$$

Пусть далее компоненты векторов градиентов температуры связаны соотношениями

$$A_2 = \gamma_x A_1, \quad B_2 = \gamma_y B_1,$$

где γ_x и γ_y — некоторые постоянные, отличные от нуля.

Подставим в (3.2), (3.3) связь градиентов, получим

$$\tau_{zx} = \frac{g\beta\rho}{6} h^2 A_1 \left\{ \frac{(\gamma_x - 1)\,\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{\vartheta_1 + \gamma_x\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^2 \right.$$
$$\left. - 3 \frac{(\gamma_x + 1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 2\,(\vartheta_1 + \gamma_x\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta + \frac{(2\gamma_x + 1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 3\,(\vartheta_1 + \gamma_x\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \right\}$$
$$- \sigma A_1 \frac{\vartheta_1 + \gamma_x\vartheta_2 + \gamma_x\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2}, \tag{3.4}$$

$$\tau_{zy} = \frac{g\beta\rho}{6} h^6 B_1 \left\{ \frac{(\gamma_y - 1)\,\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{\vartheta_1 + \gamma_y\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta^2 \right.$$
$$\left. - 3 \frac{(\gamma_y + 1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 2\,(\vartheta_1 + \gamma_y\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \delta + \frac{(2\gamma_y + 1)\,\vartheta_1\vartheta_2 + 3\,(\vartheta_1 + \gamma_y\vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2} \right\}$$
$$- \sigma B_1 \frac{\vartheta_1 + \gamma_y\vartheta_2 + \gamma_y\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь полиномиальные уравнения $\tau_{zx} = 0$ и $\tau_{zy} = 0$. Очевидно, левую часть уравнения $\tau_{zx} = 0$, следующего из (3.4), можно разделить на A_1. Для уравнения $\tau_{zy} = 0$, следующего из (3.5), справедлива операция деления на параметр B_1. Уравнения (3.4) и (3.5) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{g\beta\rho}{6}h^2\left\{\frac{(\gamma_x-1)\,\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta^3+3\frac{\vartheta_1+\gamma_x\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta^2\right.\\ &\left.-\,3\frac{(\gamma_1+1)\,\vartheta_1\vartheta_2+2\,(\vartheta_1+\gamma_x\vartheta_2)}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta+\frac{(2\gamma_x+)\,\vartheta_1\vartheta_2+3\,(\vartheta_1+\gamma_x\vartheta_2)}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\right\}\\ &-\,\sigma\frac{\vartheta_1+\gamma_x\vartheta_2+\gamma_x\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}=0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{g\beta\rho}{6}h^6\left\{\frac{(\gamma_y-1)\,\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta^3+3\frac{\vartheta_1+\gamma_y\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta^2\right.\\ &\left.-\,3\frac{(\gamma_y+1)\,\vartheta_1\vartheta_2+2\,(\vartheta_1+\gamma_y\vartheta_2)}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta+\frac{(2\gamma_y+1)\,\vartheta_1\vartheta_2+3\,(\vartheta_1+\gamma_y\vartheta_2)}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\right\}\\ &-\,\sigma\frac{\vartheta_1+\gamma_y\vartheta_2+\gamma_y\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}=0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Вычитая из левой части (3.6) левую часть (3.7), получим уравнение

$$\begin{aligned} &(\gamma_x-\gamma_y)\left\{\frac{g\beta\rho}{6}h^2\Big[\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta^3+3\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta^2\right.\\ &\left.-\,3\frac{\vartheta_1\vartheta_2+2\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\delta+\frac{2\vartheta_1\vartheta_2+3\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\Big]-\sigma\frac{\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}\right\}=0. \end{aligned}$$

Если коэффициенты γ_x и γ_y равны $\gamma_x = \gamma_y = \gamma$ (векторы градиента температуры коллинеарны), то левые части уравнений (3.6), (3.7) тождественно совпадают. В этом случае решения уравнений (3.6), (3.7) определяют одинаковые значения параметров течения жидкости, при которых возникает слой с нулевыми касательными напряжениями

$$\begin{aligned} &h^2\big\{\,(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2\delta^3+3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2)\,\delta^2-3\,[(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2+2\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)]\,\delta\\ &+\,[(2\gamma+1)\,\vartheta_1\vartheta_2+3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)]\,\big\}-\frac{6\sigma}{g\beta\rho}\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\gamma\vartheta_1\vartheta_2)=0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Разрешим уравнение (3.8) относительно h^2:

$$\begin{aligned} h^2=&\frac{6\sigma}{g\beta\rho}\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\gamma\vartheta_1\vartheta_2)\,\big\{\,(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2\delta^3+3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2)\,\delta^2\\ &-\,3\,[(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2+2\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)]\,\delta+[(2\gamma+1)\,\vartheta_1\vartheta_2+3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)]\,\big\}^{-1} \end{aligned}$$

и найдем область существования решений (3.8) на множестве параметров γ и δ. Многочлен, стоящий в знаменателе, примет вид $(1-\delta)^2\,[3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)+\delta\,(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2]$. Тогда толщину h можно представить в виде

$$h=\frac{1}{1-\delta}\sqrt{\frac{6}{g\beta\rho}}\sqrt{\frac{\sigma\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\gamma\vartheta_1\vartheta_2)}{3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)+\delta\,(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2}}\,. \tag{3.9}$$

Следовательно, толщина слоя, при которой касательные напряжения обращаются в нуль на относительной глубине δ, существует, если подкоренное выражение

$$\frac{\sigma\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\gamma\vartheta_1\vartheta_2)}{3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)+\delta\,(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2}>0\,.$$

Рассмотрим далее случай $\sigma > 0$. Данное неравенство соответствует классической жидкости. В этом случае возможны следующие варианты значений параметров.

1) При $\gamma > 1$ — числитель и знаменатель подкоренного выражения (3.9) положительны при всех допустимых значениях входящих в него параметров. Следовательно, при любой заданной относительной глубине δ найдется толщина слоя, при которой возникает слой жидкости с нулевыми касательными напряжениями.

2) При $\gamma < 1$ возможны два случая:

а)

$$\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2 + \gamma\vartheta_1\vartheta_2 > 0 \tag{3.10}$$

и, соответственно,

$$3\left(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2\right) + \vartheta_1\vartheta_2\left(1 + 2\gamma\right) + \delta\left(\gamma - 1\right)\vartheta_1\vartheta_2 > 0. \tag{3.11}$$

Из условия (3.10) следует $\dfrac{-\vartheta_1}{\vartheta_2\left(1 + \vartheta_1\right)} < \gamma < 1$.

Разрешим (3.11) относительно δ с учетом условия $\gamma < 1$: $\delta < \dfrac{3\left(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2\right) + \vartheta_1\vartheta_2\left(1 + 2\gamma\right)}{(1-\gamma)\vartheta_1\vartheta_2}$.

Тогда, с учетом выполнения двойного неравенства (3.1), получим

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{3\left(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2\right) + \vartheta_1\vartheta_2\left(1 + 2\gamma\right)}{(1-\gamma)\vartheta_1\vartheta_2}\right\}.$$

Дробь в фигурных скобках всегда будет больше единицы при выполнении условия (3.10) для $0 < \delta \leq 1$.

б)

$$\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2 + \gamma\vartheta_1\vartheta_2 < 0 \tag{3.12}$$

и

$$3\left(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2\right) + \vartheta_1\vartheta_2\left(1 + 2\gamma\right) + \delta\left(\gamma - 1\right)\vartheta_1\vartheta_2 < 0. \tag{3.13}$$

Неравенство (3.13) разрешим относительно δ: $\delta > \dfrac{3\left(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2\right) + \vartheta_1\vartheta_2\left(1 + 2\gamma\right)}{\left(1-\gamma\right)\vartheta_1\vartheta_2}$ С учетом ограничений на δ (3.1) получим

$$\max\left\{0, \frac{3\left(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2\right) + \vartheta_1\vartheta_2\left(1 + 2\gamma\right)}{\left(1-\gamma\right)\vartheta_1\vartheta_2}\right\} < \delta \leq 1. \tag{3.14}$$

Для того чтобы область значений δ не была пустой, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{3\left(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2\right) + \vartheta_1\vartheta_2\left(1 + 2\gamma\right)}{\left(1-\gamma\right)\vartheta_1\vartheta_2} < 1.$$

Очевидно, что это неравенство равносильно неравенству (3.12).

Следовательно, при выполнении $\gamma < -\vartheta_1\left(3 + \vartheta_2\right) / \left(\vartheta_2\left(1 + 2\vartheta_1\right)\right)$ дробь в фигурных скобках (3.14) меньше нуля при любом допустимом значении δ.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Если векторы градиента температуры на границах слоя вязкой несжимаемой жидкости коллинеарны* $\left(A_2, B_2\right) = \gamma\left(A_1, B_1\right)$, *а отношение модулей векторов градиентов удовлетворяет неравенствам* $-\vartheta_1 / \left(\vartheta_2\left(1 + \vartheta_1\right)\right) < \gamma$ *или* $\gamma < -\vartheta_1\left(3 + \vartheta_2\right) / \left(\vartheta_2\left(3 + 2\vartheta_1\right)\right)$, *то при любом допустимом значении* $\delta \in [0; 1]$ *найдется соответствующая толщина слоя* h, *при которой на глубине* δ *возникает слой с нулевыми значениями касательных напряжений. Если*

$$-\frac{\vartheta_1\left(3 + \vartheta_2\right)}{\vartheta_2\left(1 + 2\vartheta_1\right)} < \gamma < -\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2\left(1 + \vartheta_1\right)},$$

то слой с нулевыми касательными напряжениями возникает на относительной глубине, удовлетворяющей неравенству

$$\frac{3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)}{(1-\gamma)\,\vartheta_1\vartheta_2}\le\delta\le 1.$$

Если векторы градиентов температуры неколлинеарны, то уравнения $\tau_{zx}=0$ *и* $\tau_{zy}=0$ *не имеют общего решения. Следовательно, слой жидкости с нулевыми касательными напряжениями возникнуть не может.*

Необходимо отметить, что при идеальном тепловом контакте на обеих границах условия $\tau_{zx}=0$ и $\tau_{zy}=0$ при $\delta=0$ превращаются в квадратные уравнения с равными по абсолютной величине корнями

$$\pm\sqrt{\frac{6\sigma\gamma}{g\beta\rho\,(1+2\gamma)}}.$$

Корни принимают действительные значения при $\gamma<-1/2$ или $\gamma>1$.

Для неклассической жидкости $\sigma<0$ на основе выражения (3.9) получим следующие неравенства:

1) При $\gamma\ge 1$ числитель и знаменатель дроби положительны. Следовательно, при таком соотношении векторов граничного градиента температуры возникновение слоя с нулевыми касательными напряжениями невозможно.

2) При $\gamma<1$, как и в предыдущем варианте, возможны два случая.

а)

$$\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\gamma\vartheta_1\vartheta_1<0 \tag{3.15}$$

и

$$3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)+\delta\,(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2>0. \tag{3.16}$$

Из неравенства (3.15) следует $\gamma<-\dfrac{\vartheta_1}{\vartheta_2\,(1+\vartheta_1)}$, а из (3.16): $\delta<\dfrac{3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)}{(1-\gamma)\,\vartheta_1\vartheta_2}$. Тогда с учетом выполнения двойного неравенства (3.1) получим

$$0<\delta<\min\Big\{\frac{3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)}{(1-\gamma)\,\vartheta_1\vartheta_2},1\Big\}.$$

Дробь из фигурной скобки удовлетворяет неравенству $\dfrac{3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)}{(1-\gamma)\,\vartheta_1\vartheta_2}<1$. Для того чтобы область значений δ была непустой, необходимо выполнение неравенства

$$3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)>0.$$

Разрешив полученное неравенство относительно γ, найдем $\gamma>-\vartheta_1(3+\vartheta_2)/(\vartheta_2(3+2\vartheta_1))$. Таким образом, при γ, удовлетворяющем неравенствам $-\dfrac{3\vartheta_1+\vartheta_1\vartheta_2}{3\vartheta_2+2\vartheta_1\vartheta_2}<\gamma<-\dfrac{\vartheta_1}{\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2}$, область значений δ непуста и при толщине слоя, определяемой равенством (3.9), на глубине δ возникает слой с нулевыми касательными напряжениями.

б)

$$\vartheta_1+\gamma\vartheta_2+\gamma\vartheta_1\vartheta_2>0 \tag{3.17}$$

и

$$3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)+\delta\,(\gamma-1)\,\vartheta_1\vartheta_2<0. \tag{3.18}$$

Из (3.17) следует, что параметр γ удовлетворяет неравенству $-\vartheta_1/(\vartheta_2(1+\vartheta_1))<\gamma<1$. Из неравенства (3.18) с учетом допустимых значений (3.1) для относительной глубины δ получим двойное неравенство $\dfrac{3\,(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\,(1+2\gamma)}{(1-\gamma)\,\vartheta_1\vartheta_2}<\delta<1.$

Для дроби в правой части выполняется неравенство

$$\frac{3(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2(1+2\gamma)}{(1-\gamma)\vartheta_1\vartheta_2}>1,$$

которое несовместно с условием (3.17). Следовательно, не существует толщины слоя жидкости, при котором возникает слой с нулевыми касательными напряжениями. Можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Если векторы граничного градиента температуры коллинеарны, а отношение модулей удовлетворяет неравенствам* $\gamma<-(\vartheta_1(3+\vartheta_2)/(\vartheta_2(3+2\vartheta_1))$ *или* $\gamma>-\vartheta_1/(\vartheta_2(1+\vartheta_1))$*, то не существует толщины слоя, при котором в жидкости возникает слой с нулевыми касательными напряжениями. При* γ*, удовлетворяющем неравенству*

$$-\frac{3\vartheta_1+\vartheta_1\vartheta_2}{3\vartheta_2+2\vartheta_1\vartheta_2}<\gamma<-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2},$$

на относительной глубине δ*, удовлетворяющей неравенствам*

$$\frac{3(\vartheta_1+\gamma\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2(1+2\gamma)}{(1-\gamma)\vartheta_1\vartheta_2}<\delta\le 1,$$

при толщине слоя жидкости h*, определяемого равенством* (3.9)*, возникает слой, в котором касательные напряжения обращаются в нуль.*

В настоящей работе рассмотрены стационарные слоистые течения конвекции вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемые градиентом температуры. Получены решения для краевых условий третьего рода на границах потока жидкости — теплообмен по закону Ньютона — Рихмана. Показано, что при некоторых условиях найдется толщина слоя жидкости, при которой касательные напряжения на твердой поверхности в направлении и одновременно обращаются в ноль. Отметим, что рассмотрение теплового движения классических и аномальных жидкостей позволяет также описывать сложную концентрационную конвекцию вязкой несжимаемой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lin C.C.** Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395. doi: 10.1007/BF00298016.
2. **Сидоров А.Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды / УНЦ АН СССР: сб. науч. тр. НЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 101–117.
3. О разработках аналитических и численных методов решения задач механики сплошной среды / А.И. Короткий [и др.] // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 203–215.
4. **Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.** Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теорет. основы химич. технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 294–301.
5. **Пухначев В.В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
6. **Рыжков И.И.** Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2013. 200 с.
7. **Сидоров А.Ф.** О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикл. механика и технич. физика. 1989. № 2. С. 34–40.
8. **Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Спевак Л.Ф.** Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. механика сплошных сред. 2015. Т. 8, № 4. С. 445–456. doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
9. **Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Спевак Л.Ф.** Нестационарная конвекция Бенара — Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // Теорет. основы химич. технологии. 2016. Т. 50, № 2. С. 137–146.

10. **Аристов С. Н., Шварц К. Г.** Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
11. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 2006. 736 с.
12. **Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y.** Complex Stationary Convection with Third-Kind Boundary Conditions at the Boundaries of a Fluid Layer [e-resource] // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2016. Iss. 2. P. 34–47. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-2/2016-2_81.html (accessed: 12.09.2016).

Поступила 9.10.2016

Горшков Александр Васильевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург
доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: alex55gor@mail.ru

Просвиряков Евгений Юрьевич
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург
доцент
Казанский исследовательский технический
университет им. А. Н. Туполева — КАИ, г. Казань
e-mail: evgen_pros@uran.ru

REFERENCES

1. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.
2. Sidorov A. F. On a class of solutions of the equations of gas dynamics and natural convection. *Numerical and analytical methods for solving problems of continuum mechanics* / ed. A.F. Sidorov, Yu.N. Kondyurin, Sverdlovsk, Ural. Nauchn. Tsentr Akad. Nauk SSSR, 1981, pp. 101–117.
3. Korotkii A.I. et [al.]. On the development of analytical and numerical solution methods for problems of continuum mechanics. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 203–215.
4. Aristov S. N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. doi: 10.1134/S0040579516030027 .
5. Pukhnachev V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Usp. Mekh.*, 2006, vol. 3, no. 6, pp. 3–76.
6. Ryzhkov I.I. *Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustojchivost'* [Thermal diffusion in mixtures: equations, symmetries, solutions and their stability]. Novosibirsk, Publishing house of SB RAS, 2013, 200 p.
7. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. doi: 10.1007/BF00852164 .
8. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445–456. doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38 (in Russian).
9. *A*ristov S. N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Unsteady-state Bénard-Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 2, pp. 132–141. doi: 10.1134/S0040579516020019 .
10. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex flow in thin liquid layers]. Kirov: Vyatka State Univ. Publ., 2011, 207 p.
11. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. PergamonPress, Oxford, 1987. 539 p. Translate from *Gidrodinamika*, 3rd ed., Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.

12. *Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y.* Complex stationary convection with third-kind boundary conditions at the boundaries of a fluid layer. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, iss. 2, pp. 34–47. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-2/2016-2_81.html .

The paper was received by the Editorial Office on October 9, 2016.

Aleksandr Vasil'evich Gorshkov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620049 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alex55gor@mail.ru .

Evgenii Yur'evich Prosviryakov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620049 Russia; Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev — KAI, Kazan, Tatarstan 420111, Russia,
e-mail: evgen_pros@uran.ru .