ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^n$ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

А. А. Шабуров

Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества линейной стационарной управляемой системой в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности. В работе в общем случае выводится уравнение, которому удовлетворяет начальный вектор сопряженной системы. Затем это уравнение уточняется на задачу оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для линейной системы с быстрыми и медленными переменными. Показывается, что решение соответствующего уравнения при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению уравнения, соответствующего предельной задаче. Затем полученные результаты применяются к исследованию задачи, описывающей движение материальной точки в $\mathbb{R}^n$ на фиксированном промежутке времени. Строится асимптотика начального вектора сопряженного состояния, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр.

A. A. Shaburov. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem in the space $\mathbb{R}^n$ with an integral convex performance index.

We consider an optimal control problem with an integral convex performance index for a linear stationary control system in the class of piecewise continuous controls with a smooth constraint on the control. In the general case, the Pontryagin maximum principle is a necessary and sufficient optimality condition in this problem. We derive an equation for the initial vector of the adjoint system in the general case. Then this equation is adapted to the optimal control problem with an integral convex performance index for a linear system with fast and slow variables. We show that the solution of this equation tends to the solution of the equation corresponding to the limit problem as the small parameter tends to zero. The obtained results are applied to study a problem describing the motion of a material point in $\mathbb{R}^n$ on a fixed time interval. We construct the asymptotics of the initial vector of the adjoint state; this vector defines the form of the optimal control. It is shown that the asymptotics is of power type.

Keywords: optimal control, singularly perturbed problems, asymptotic expansions, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310

Статья посвящена исследованию асимптотики начального вектора сопряженного состояния и оптимального значения функционала качества в задаче оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, гл. 3] и гладкими геометрическими ограничениями на управление.

В данной работе получено основное уравнение для нахождения асимптотики начального вектора сопряженного состояния рассматриваемой задачи и оптимального управления. Общие соотношения применены к нахождению полной асимптотики решения задачи оптимального управления точкой малой массы в n-мерном пространстве под действием силы, ограниченной по величине.

В [5; 6] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [7–9].

1. Общая постановка задачи и условия оптимальности

В классе кусочно-непрерывных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального управления линейной стационарной системой с интегральным выпуклым функционалом качества

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, \quad z(0) = z^0, \quad \|u(t)\| \leqslant 1, \quad t \in [0;T], \\ J(u) = \varphi(z(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\, dt \to \min, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $z \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}}$, $u \in \mathbb{R}^r$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^r$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^{\widetilde{n}}$ выпуклая функция.

Отметим, что в рассматриваемом интегральном выпуклом критерии качества J первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T, а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Предположение 1. *Будем предполагать, что пара* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *вполне управляема, т. е.*

$$\operatorname{rank}\big(\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \ldots, \mathcal{A}^{\widetilde{n}-1}\mathcal{B}\big) = \widetilde{n}.$$

При сформулированных условиях в задаче (1.1) принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности. При этом задача принципа максимума Понтрягина имеет единственное решение [3, п. 3.5, теорема 14]: существует единственное решение z, η системы уравнений (1.1) и

$$\dot{\eta} = -\mathcal{A}^*\eta, \quad \eta(T) = -\nabla\varphi(z(T)), \tag{1.2}$$

а оптимальное управление u^o определяется из принципа максимума

$$-\|u^o(t)\|^2 + \langle \mathcal{B}^*\eta(t), u^o(t)\rangle = \max_{\|u\|\leqslant 1} \big(-\|u\|^2 + \langle \mathcal{B}^*\eta(t), u\rangle \big). \tag{1.3}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^r$, а $*$ — знак транспонирования матриц.

Вычислив максимум в (1.3), находим

$$u^o(t) = \frac{\mathcal{B}^*\eta(t)}{S(\|\mathcal{B}^*\eta(t)\|)}, \qquad \text{где} \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Отметим, что из определения функции $S(\cdot)$ следует справедливость неравенства

$$\forall\, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^r \qquad \Big\| \frac{w_1}{S(\|w_1\|)} - \frac{w_2}{S(\|w_2\|)} \Big\| \leqslant \|w_1 - w_2\|. \tag{1.5}$$

Положим $\lambda := \eta(T)$. Тогда

$$\eta(t) = e^{-\mathcal{A}^*(t-T)}\lambda, \quad z(t) = e^{\mathcal{A}t}z^0 + \int\limits_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathcal{B}u^o(s)ds.$$

В конечный момент времени $t = T$ имеем

$$z(T) = e^{\mathcal{A}T}z^0 + \int\limits_0^T \frac{e^{\mathcal{A}(T-s)}\mathcal{B}\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(T-s)}\lambda}{S(\|\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(T-s)}\lambda\|)}ds.$$

Сделав замену переменной $\tau := T - s$, получим

$$z(T) = e^{\mathcal{A}T}z^0 + \int\limits_0^T \frac{e^{\mathcal{A}(\tau)}\mathcal{B}\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(\tau)}\lambda}{S(\|\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(\tau)}\lambda\|)}d\tau.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть выполнено предположение* 1, $z(t)$, $u(t)$ *есть решение системы из* (1.1), *а* $\eta(t)$ *— решение системы* (1.2). *Тогда* $z(t)$, $\eta(t)$, $u(t)$ *есть решение задачи принципа максимума* (1.1)–(1.3) *тогда и только тогда, когда* $\eta(T)=\lambda$, $u(t)$ *определяется формулой* (1.4), *а вектор* λ *есть единственное решение уравнения*

$$-\lambda=\nabla\varphi\biggl(e^{\mathcal{A}T}z^0+\int\limits_0^T e^{\mathcal{A}\tau}\mathcal{B}\frac{\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*\tau}\lambda}{S(\|\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*\tau}\lambda\|)}d\tau\biggr). \tag{1.6}$$

При этом $u(t)$ *— единственное оптимальное управление в задаче* (1.1).

Вектор λ, удовлетворяющий уравнению (1.6), назовем *вектором, определяющим оптимальное управление* в задаче (1.1).

Утверждение 2. *Пусть* $u^o(t)$ *— оптимальное управление в задаче* (1.1). *Тогда* $u^o(t)$ *непрерывно на* $[0;T]$ *и бесконечно дифференцируемо в точках* $\widetilde{t}$ *таких, что* $\|\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(T-\widetilde{t})}\lambda\|\neq 2$. *Здесь* λ *— вектор, определяющий оптимальное управление в задаче* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из (1.4) и аналитичности матричной экспоненты $e^{\mathcal{A}^*t}$. □

2. Задача оптимального управления с быстрыми и медленными переменными

Рассмотрим частный случай задачи (1.1), когда управляемая система содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных:

$$\begin{cases}\dot{x}_\varepsilon=A_{11}x_\varepsilon+A_{12}y_\varepsilon+B_1u, & t\in[0,T],\quad \|u\|\leqslant 1,\\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon=A_{21}x_\varepsilon+A_{22}y_\varepsilon+B_2u, & x_\varepsilon(0)=x^0,\quad y_\varepsilon(0)=y^0,\\ J(u):=\sigma(x_\varepsilon(T))+\int\limits_0^T\|u(t)\|^2\,dt\to\min, & \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $u\in\mathbb{R}^r$; $A_{ij},B_i,i,j=1,2,$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, ε — малый положительный параметр, а $\sigma(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ выпуклая функция.

Предположение 2. *Все собственные значения матрицы* A_{22} *имеют отрицательные вещественные части.*

При каждом фиксированном $\varepsilon>0$ задача (2.1) совпадает с задачей (1.1):

$$z_\varepsilon(t)=\begin{pmatrix}x_\varepsilon(t)\\ y_\varepsilon(t)\end{pmatrix},\quad z^0_\varepsilon=\begin{pmatrix}x^0\\ y^0\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}_\varepsilon=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22}\end{pmatrix},\quad \mathcal{B}_\varepsilon=\begin{pmatrix}B_1\\ \varepsilon^{-1}B_2\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{n}=n+m,\quad \varphi(z_\varepsilon)=\sigma(x_\varepsilon).$$

Вырожденной задачей для (2.1) называется задача

$$\begin{cases}\dot{x}_0=A_0x_0+B_0u, & t\in[0,T], & \|u\|\leqslant 1,\\ A_0:=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, & B_0:=B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2, & x_0(0)=x^0,\\ J(u):=\sigma(x_0(T))+\int\limits_0^T\|u(t)\|^2\,dt\to\min. & & \end{cases} \tag{2.2}$$

Предположение 3. *Пары* (A_0, B_0) *и* (A_{22}, B_2) *вполне управляемы.*

При выполнении предположений 2 и 3 существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, B_\varepsilon)$ вполне управляема при всех ε: $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ [5, Theorem 1].

Отметим, что поскольку $\nabla\varphi(z_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \nabla\sigma(x_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$, то вектор λ_ε, определяющий оптимальное управление в задаче (2.1), имеет вид $\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, $l_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

Вектор l_ε тоже будем называть *вектором, определяющий оптимальное управление в задаче* (2.1).

Пусть

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} := \begin{pmatrix} \mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t) & \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t) \\ \mathcal{W}_\varepsilon^{21}(t) & \mathcal{W}_\varepsilon^{22}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

тогда в силу (2.3) уравнение (1.6) переходит в уравнение

$$-l_\varepsilon = \nabla\sigma\Bigg(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(T)x^0 + \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(T)y^0$$

$$+ \int\limits_0^T \big(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t)B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t)B_2\big)\frac{\big(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*\big)l_\varepsilon}{S\big(\big\|\big(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*\big)l_\varepsilon\big\|\big)}dt\Bigg). \tag{2.4}$$

Отметим, что оптимальное управление $u_\varepsilon^o(t)$ в задаче (2.1) выражается через вектор l_ε следующим образом:

$$u_\varepsilon^o(T-t) = \frac{\big(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*\big)l_\varepsilon}{S\big(\big\|\big(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*\big)l_\varepsilon\big\|\big)}. \tag{2.5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 2 *и* 3. *Тогда* $l_\varepsilon \to l_0$ *при* $\varepsilon \to +0$, *где* l_ε — *единственное решение уравнения* (2.4), *а* l_0 — *единственное решение уравнения*

$$-l_0 = \nabla\sigma\Bigg(e^{A_0T}x^0 + \int\limits_0^T e^{A_0t}B_0\frac{B_0^*e^{A_0^*t}l_0}{S\big(\big\|B_0^*e^{A_0^*t}l_0\big\|\big)}dt\Bigg). \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что множество достижимости управляемой системы из (2.1) к моменту времени T равномерно ограничено при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ (см., например, [6, теорема 3.1]). Тем самым в силу (2.4) векторы $\{l_\varepsilon\}$ тоже ограничены при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что все частичные пределы $\{l_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to +0$ равны l_0.

В силу теории А. Б. Васильевой (см., например, [10, гл. 3]) существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t) = e^{A_0t} + O(\varepsilon), \qquad \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t) = -\varepsilon e^{A_0t}A_{12}A_{22}^{-1} + O(\varepsilon e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon^2), \\ &\mathcal{W}_\varepsilon^{21}(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}e^{A_0t} + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon), \qquad \mathcal{W}_\varepsilon^{22}(t) = O(e^{-\gamma t/\varepsilon}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

При этом асимптотические оценки равномерны по $t \in [0;T]$.

Тем самым в силу (2.2) — определения матриц A_0 и B_0 — и формул (2.7) выражение, стоящее под $\nabla\sigma$ в формуле (2.4), имеет вид

$$e^{A_0T}x^0 + O(\varepsilon) + \int\limits_0^T \big(e^{A_0t}B_0 + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon)\big)\frac{\big(B_0^*e^{A_0^*t} + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon)\big)l_\varepsilon}{S\big(\big\|\big(B_0^*e^{A_0^*t} + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon)\big)l_\varepsilon\big\|\big)}dt. \tag{2.8}$$

Разбивая интеграл из (2.8) на два слагаемых $\int_0^T = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^T$, учитывая равномерную ограниченность подынтегрального выражения и то, что $O(e^{-\gamma/\sqrt{\varepsilon}}) = O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $\alpha > 0$, из (2.4) и (2.8) получим

$$-l_\varepsilon = \nabla\sigma\bigg(e^{A_0 T}x^0 + O(\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}) + \int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{T} e^{A_0 t}B_0 \frac{\big(B_0^* e^{A_0^* t} + O(\varepsilon)\big)l_\varepsilon}{S\big(\big\|\big(B_0^* e^{A_0^* t} + O(\varepsilon)\big)l_\varepsilon\big\|\big)}dt\bigg). \tag{2.9}$$

Пусть $\bar{l}$ — частичный предел векторов $\{l_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to +0$, т. е. $l_{\varepsilon_k} \to \bar{l}$ для некоторой $\{\varepsilon_k\}$ такой, что $\varepsilon_k \to +0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (2.9), получим, что $\bar{l}$ есть решение уравнения (2.6). В силу единственности такого решения $\bar{l} = l_0$. $\square$

Основная задача, которая ставится для (2.1), есть нахождение полного асимптотического разложения по степеням малого параметра ε оптимального управления, оптимального значения функционала качества и оптимального процесса. Формулы (2.5) и (1.5) показывают, что если удастся получить полное асимптотическое разложение вектора l_ε, определяющего оптимальное управление в задаче (2.1), то из него получатся и асимптотические разложения указанных величин.

3. Построение полного асимптотического разложения вектора l_ε для одной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными

Рассмотрим частный случай задачи (2.1):

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, \quad t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = -y_\varepsilon + u, \quad x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) := \dfrac{1}{2}\|x_\varepsilon(T)\|^2 + \displaystyle\int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, \end{cases} \tag{3.1}$$

где x_ε, y_ε, $u \in \mathbb{R}^n$.

Задача (3.1) моделирует движение материальной точки малой массы $\varepsilon > 0$ с коэффициентом сопротивления среды, равным 1, в пространстве $\mathbb{R}^n$, под действием ограниченной управляющей силы $u(t)$.

Здесь $A_{11} = 0$, $A_{12} = I$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = -I$, $B_1 = 0$, $B_2 = I$, а 0 и I — нулевая и единичные матрицы размерности $n \times n$ соответственно. Для вырожденной задачи $A_0 = 0$, $B_0 = I$, и тем самым предположения 2 и 3 выполнены.

Вычислив $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ и $\nabla\Big(\dfrac{1}{2}\|x_\varepsilon(T)\|^2\Big)$, получим

$$\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t) = I, \quad \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t) = \varepsilon(1-e^{-t/\varepsilon})I, \quad \mathcal{W}_\varepsilon^{21}(t) = 0, \quad \mathcal{W}_\varepsilon^{22}(t) = e^{-t/\varepsilon}I, \quad \nabla\Big(\frac{1}{2}\|x_\varepsilon(T)\|^2\Big) = x_\varepsilon(T).$$

Поэтому уравнения (2.4) и (2.6) для l_ε и l_0 принимают вид

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \int\limits_0^T \frac{(1-e^{-t/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{S\big(\big\|(1-e^{-t/\varepsilon})l_\varepsilon\big\|\big)}dt, \quad -l_0 = x^0 + T\frac{l_0}{S(\|l_0\|)}. \tag{3.2}$$

Если вектор-функция $f_\varepsilon(t)$ такова, что $f_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $\alpha > 0$ равномерно по $t \in [0;T]$, то вместо $f_\varepsilon(t)$ будем писать $\mathbb{O}$. В частности, $e^{-\gamma T/\varepsilon} = \mathbb{O}$.

Из (3.2) получим

$$\begin{aligned} &1.\ \ \|x^0\| < T+2 \Longrightarrow l_0 = -\frac{2}{2+T}\,x^0 \qquad \text{и} \qquad \|l_0\| < 2. \\ &2.\ \ \|x^0\| > T+2 \Longrightarrow l_0 = -\frac{\|x^0\|-T}{\|x^0\|}\,x^0 \quad \text{и} \qquad \|l_0\| > 2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

1. Рассмотрим сначала случай $\|x^0\| < T+2$.

В силу (3.3) и теоремы 1 при всех достаточно малых ε будет справедливо неравенство $\|l_\varepsilon\| < 2$. Учитывая, что $(1-e^{-t/\varepsilon}) \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$, из (3.2) для l_ε получим уравнение

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon y^0 + \mathbb{O} + \frac{1}{2}\int_0^T (1-e^{-t/\varepsilon})^2\,dt\,l_\varepsilon. \tag{3.4}$$

Вычисляя интеграл $\int_0^T (1-e^{-t/\varepsilon})^2\,dt \ = T - 3/(2\varepsilon) + \mathbb{O}$, из (3.4) находим

$$l_\varepsilon = -\frac{4(x^0+\varepsilon y^0+\mathbb{O})}{4+2T-3\varepsilon}.$$

Из этого представления следует, что l_ε разлагается в асимптотический ряд по степеням ε.

Утверждение 3. *Пусть* $\|x^0\| < T+2$. *Тогда вектор* l_ε, *определяющий оптимальное управление в задаче* (3.1), *при* $\varepsilon \to 0$ *раскладывается в степенной асимптотический ряд*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \ \textit{где, в частности,}\ \ l_1 = -\frac{3l_0+4y^0}{4+2T}.$$

2. Теперь рассмотрим случай $\|x^0\| > T+2$.

В силу (3.3) и теоремы 1 при всех достаточно малых ε будет справедливо неравенство $\|l_\varepsilon\| < 2$. Так как при фиксированном ε функция $(1-e^{-t/\varepsilon})\|l_\varepsilon\|$ монотонно возрастает от 0 при $t=0$ до $(1-e^{-t/\varepsilon})\|l_\varepsilon\|$ при $t=T$ (что при достаточно малых ε дает неравенство $(1-e^{-t/\varepsilon})\|l_\varepsilon\| > 2$), то существует единственное $t_{1,\varepsilon} \in (0;T)$ такое, что $(1-e^{-t_{1,\varepsilon}/\varepsilon})\|l_\varepsilon\| = 2$, или

$$(1-e^{-t_{1,\varepsilon}/\varepsilon})\|l_\varepsilon\| = 2, \qquad t_{1,\varepsilon} = -\varepsilon\ln\Big(1-\frac{2}{\|l_\varepsilon\|}\Big). \tag{3.5}$$

Поэтому уравнение (3.2) принимает вид

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1-e^{-T/\varepsilon})y^0 + \frac{1}{2}\int_0^{t_{1,\varepsilon}} \big(1-e^{-t/\varepsilon}\big)^2\,dt\,l_\varepsilon + \int_{t_{1,\varepsilon}}^T \big(1-e^{-t/\varepsilon}\big)\,dt\frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \tag{3.6}$$

Вычисляя интегралы в (3.6) и перенося $(-l_\varepsilon)$ в правую часть, получим

$$\begin{aligned} 0 = F(\varepsilon, l_\varepsilon) :=\, & l_\varepsilon + x^0 + \varepsilon(1-e^{-T/\varepsilon})y^0 - \varepsilon\left(\frac{1}{\|l_\varepsilon\|} + \frac{1}{\|l_\varepsilon\|^2} + \frac{1}{2}\ln\Big(1-\frac{2}{\|l_\varepsilon\|}\Big)\right)l_\varepsilon \\ & + \Big(T + \varepsilon\ln\Big(1-\frac{2}{\|l_\varepsilon\|}\Big) + \varepsilon e^{-T/\varepsilon} - \varepsilon + \varepsilon\frac{2}{\|l_\varepsilon\|}\Big)\frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Теорема 2. *Пусть* $\|x^0\| > T+2$. *Тогда вектор* l_ε, *определяющий оптимальное управление в задаче* (3.1), *при* $\varepsilon \to 0$ *раскладывается в степенной асимптотический ряд*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение $0 = F(\varepsilon, l)$, где $F(\cdot,\cdot)$ определена в (3.7). Доопределим $e^{-T/\varepsilon}$ в точке $\varepsilon = 0$ нулем. Тогда получим, что $0 = F(0, l_0)$ и $F(\cdot,\cdot)$ бесконечно дифференцируема по ε и l в некоторой окрестности точки $(0; l_0)$. Поскольку

$$\mathcal{F}\rho := \frac{\partial F(\varepsilon, l)}{\partial l}\Big|_{\varepsilon=0, l=l_0}\rho = \rho + \frac{\|l_0\|^2\rho - \langle l_0, \rho\rangle l_0}{\|l_0\|^3}T,$$

то оператор $\mathcal{F}$ непрерывно обратим и

$$\mathcal{F}^{-1}g = \Big(g + \frac{T\langle l_0, g\rangle l_0}{\|l_0\|^3}\Big)\frac{\|l_0\|}{T + \|l_0\|}. \tag{3.8}$$

Тем самым, применима теорема о неявно заданной функции, из которой следует, что l_ε (как функция от ε) бесконечно дифференцируема по ε при всех малых ε, и поэтому l_ε разлагается в степенной асимптотический ряд. Коэффициенты этого ряда находятся по стандартной процедуре: подставив ряд в уравнение (3.7), разложив величины, зависящие от ε, в асимптотические ряды по степеням ε и приравняв слагаемые одинакового порядка малости по ε, получим уравнения вида $\mathcal{F}l_k = g_k$ с известными правыми частями. После этого по формуле (3.8) найдем l_k.

В частности, для l_1 получим уравнение

$$\mathcal{F}l_1 = g_1 := -x^0 - y^0 + \Big(\frac{1}{\|l_0\|} + \frac{1}{\|l_0\|^2} + \frac{1}{2}\ln\Big(1 - \frac{2}{\|l_0\|}\Big)\Big)l_0 - \Big(\ln\Big(1 - \frac{2}{\|l_0\|}\Big) - 1 + \frac{2}{\|l_0\|}\Big)\frac{l_0}{\|l_0\|}.$$

Откуда в силу (3.8) получим $l_1 = \Big(g_1 + \dfrac{T\langle l_0, g_1\rangle l_0}{\|l_0\|^3}\Big)\dfrac{\|l_0\|}{T + \|l_0\|}$. □

З а м е ч а н и я. 1. И в первом, и во втором из рассматриваемых случаев из (3.2), (3.5) и асимптотического разложения l_ε стандартно получаются асимптотические разложения и функционала качества, и оптимального управления, и оптимального состояния системы. При этом асимптотические разложения оптимального управления и состояния системы будут иметь экспоненциально убывающие пограничные слои в окрестности точки $t = 0$. Более того, если $t \geqslant \varepsilon^\beta$ и $\beta \in (0; 1)$, то оптимальное управление $u^o(t)$ есть константа плюс асимптотический ноль.

2. Из формулы (3.7) следует, что l_ε лежит в подпространстве П, порожденном векторами x^0 и y^0. Поэтому при всех $t \in [0; T]$ и $u^o_\varepsilon(t)$, и $x_\varepsilon(t)$, и $y_\varepsilon(t)$ лежат в этом же подпространстве П. Тем самым, задача (3.1) эквивалентна соответствующей двумерной задаче.

Автор выражает благодарность А. Р. Данилину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
6. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
7. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
8. **Данилин А.Р., Парышева Ю.В.** Асимптотика оптимального значения значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154.

9. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614. doi: 10.7868/S086956521325004X .
10. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Шабуров Александр Александрович
аспирант
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: alexandershaburov@mail.ru

Поступила 27.02.2017

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Krassovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of Control of Movement. Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p. ISBN: 0898748070 . Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
4. Vassilyeva A.B., Dmitriev M.G. *Mathematical analysis. The results of science and technology.* Moscow, VINITI, 1982, vol. 20, pp. 3–77 (in Russian).
5. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/CDC.1974.270427 .
6. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analisis of optimal control systems.* Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, Springer-Verlag, 1983, 156 p. ISBN-10: 0387124632 . Translated under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 157 p.
7. Kalinin A.I., Semenov K.V. Asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with multidimensional control. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 3, pp. 407–418.
8. Danilin A.R., Parysheva Yu.V. Asymptotics of the optimal cost functional in a linear optimal control problem. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 478–481. doi: 10.1134/S1064562409040073 .
9. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi: 10.1134/S1064562413040364 .
10. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* [Asymptotic expansion of solutions for singularly perturbed equations]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 272 p.

The paper was received by the Editorial Office on February 27, 2017.

Aleksandr Aleksandrovich Shaburov, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alexandershaburov@mail.ru .