ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 519.6

ИТЕРАЦИИ СТАБИЛЬНОСТИ И ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ЧИСЛО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ[1]

А. Г. Ченцов

Рассматривается вариант метода программных итераций для решения дифференциальной игры сближения-уклонения, именуемый итерациями стабильности. Установлена связь итерационной процедуры с решением задачи уклонения при ограничении на число переключений: итерации стабильности определяют множество успешной разрешимости упомянутой задачи. Доказано, что осуществление уклонения возможно тогда и только тогда, когда осуществимо строгое уклонение (уклонение по отношению к окрестностям множеств, определяющих игру сближения-уклонения). Указано представление стратегий, гарантирующих уклонение с ограничением на число переключений. Данные стратегии определяются в виде триплетов, элементами которых являются всякий раз многозначная позиционная стратегия формирования управлений, стратегия коррекции, реализуемая содержательно в виде отображения, сопоставляющего позиции игры неупреждающий мультифункционал на пространстве траекторий и определяющего конкретный выбор моментов переключения, а также натуральное число, удовлетворяющее ограничению на число переключений и задающее количество переключений формируемого управления. Использование неупреждающих мультифункционалов в качестве инструмента формирования управлений игрока-уклониста существенно. Работа лежит в русле исследований свердловской школы Н. Н. Красовского по теории управления и теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: неупреждающий мультифункционал, оператор стабильности, стратегия коррекции.

A. G. Chentsov. Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings.

For an approach–evasion differential game, we consider a variant of the method of program iterations called stability iterations. A connection is established between the iterative procedure and the solution of an evasion problem with a constraint on the number of switchings: the stability iterations define the successful solvability set of the problem. It is proved that the evasion is possible if and only if the strict evasion is possible (i.e., the evasion with respect to neighborhoods of sets defining the approach–evasion game). We specify a representation of the strategies that guarantee the evasion with a constraint on the number of switchings. These strategies are defined as triplets whose elements are a multidimensional positional control strategy, a correction strategy realized as a mapping that takes a game position to a nonanticipating multifunctional on the trajectory space and defines the choice of the switching times, and a positive integer that satisfies the constraints on the number of switchings and specifies the number of switchings of the control. It is important that we use nonanticipating multifunctionals as a tool for generating the controls of the evading player. The paper is in line with the research carried out by N. N. Krasovskii's school on control theory and the theory of differential games.

Keywords: nonanticipating multifunctional, stability operator, correction strategy.

MSC: 49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302

Введение

Исследуются задачи теории дифференциальных игр (ДИ); см. [1–3]. Рассматривается один из вариантов метода программных итераций (МПИ) [4–7], связываемый далее с итерациями стабильности. Данный вариант (см. [8; 9, гл. V]) реализует в виде предела последовательности итераций множество позиционного поглощения (МПП) в смысле альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [2; 10], но (одновременно) доставляет [11; 12] на каждом этапе итерационной процедуры множество успешной разрешимости задачи уклонения с дополнительными ограничениями на число переключений формируемого управления. Основные результаты настоящей работы анонсированы в [11]. Постановке игровой задачи с упомянутым ограничением

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-01-00505, 16-01-00649).

отвечают (на идейном уровне) некоторые инженерные задачи управления в условиях помех (управление "по функционалу"), где смена режима функционирования системы осуществляется по мере наступления того или иного события (например, достижения заданной высоты). Представляется поэтому, что более подробное в сравнении с [11;12] изложение математических конструкций может быть полезным специалистам в области систем управления.

1. Содержательное обсуждение задачи

Рассматривается n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ и (невырожденный) отрезок $T \triangleq [t_o, \vartheta_o]$, где $t_o \in \mathbb{R}$, $\vartheta_o \in \mathbb{R}$ и $t_o < \vartheta_o$ (здесь и ниже $\triangleq$ — равенство по определению, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). В $\mathbb{R}^n$ (это фазовое пространство) функционирует система

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \qquad u \in P, \qquad v \in Q, \tag{1.1}$$

где f — непрерывная n-вектор-функция на $T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$, P и Q — конечномерные непустые компакты, $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$. Полагаем, что в (1.1) $u \in P$ и $v \in Q$ суть управляющие параметры игроков I и II, преследующих противоположные цели. Полагаем также для простоты, что при каждом заданном $t_* \in T$ игроки могут формировать только кусочно-постоянные (к.-п.), непрерывные справа (н. спр.) и непрерывные слева (н. сл.) в точке ϑ_o функции $u(\cdot) = u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_o}$, $v(\cdot) = v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_o}$ на $[t_*, \vartheta_o]$ со значениями в P и Q соответственно. Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности решений, подобным [13]. Рассмотрим вариант [11, § 2] формирования вектор-функции $v(\cdot)$, полагая заданным число $s \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$. Пусть объектом выбора игрока II является триплет (V, γ, k). Здесь V — отображение, сопоставляющее каждой позиции $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ непустое подмножество (п/м) Q. Полагаем далее (см. [11; 12]), что γ есть система отображений γ_t, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta_o$, где t_* определяется начальной позицией $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. При $t \in [t_*, \vartheta_o]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma_t(x)$ есть многозначный неупреждающий [11, с. 7, 8] функционал на множестве $C_n([t, \vartheta_o])$ всех непрерывных n-вектор-функций на $[t, \vartheta_o]$, принимающий значения в $[t, \vartheta_o]$. Наконец, $k \in \mathbb{N}$ таково, что $k \leqslant s$.

Общая логика управления, связанная с поэтапным построением $v(\cdot)$ в виде склейки k векторов из Q, состоит в следующем. В начальный момент $\tau_1 = t_*$ выбирается $v_1 \in V(t_*, x_*)$ и "включается" правило $g_1 = \gamma_{t_*}(x_*)$ слежения за будущей траекторией. Константа v_1 вместе с помеховым (по смыслу) управлением $u(\cdot)$ порождает траекторию $x_1(\cdot)$, стартующую из $(t_*, x_*) = (\tau_1, x(\tau_1))$. По мере ее развития правило g_1 формирует момент $\tau_2 \in g_1(x_1(\cdot))$, зависящий только от начального "отрезка" $(x_1(t),\ t_* \leqslant t \leqslant \tau_2)$ траектории $x_1(\cdot)$. В момент τ_2 выбирается $v_2 \in V(\tau_2, x_1(\tau_2))$ и новое правило $g_2 = \gamma_{\tau_2}(x_1(\tau_2))$ слежения за будущей траекторией. В результате воздействия v_2 и управления $u(\cdot)$ из позиции $(\tau_2, x_1(\tau_2))$ развивается траектория $x_2(\cdot)$, определяющая момент $\tau_3 \in g_2(x_2(\cdot))$ (сейчас имеем в виду случай $k > 3$), когда выбирается $v_3 \in V(\tau_3, x_2(\tau_3))$ и правило $g_3 = \gamma_{\tau_3}(x_2(\tau_3))$. Дальнейшее построение аналогично; оно продолжается вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1, k}$. В итоге реализуется "совокупная" траектория $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, склеенная из фрагментов "частичных" траекторий $x_1(\cdot), \ldots, x_k(\cdot)$. Поскольку выбор $u(\cdot)$ может быть произвольным (это любая к.-п., н. спр. и н. сл. в точке ϑ_o функция со значениями в P), то стратегии — триплету (V, γ, k) — сопоставляется на самом деле целый пучок $\mathcal{X}(t_*, x_*, V, \gamma, k)$, являющийся непустым п/м $C_n([t_*, \vartheta_o])$. Полагаем, что (V, γ, k) разрешает ту или иную задачу, если требуемое решение достигается на всех траекториях из упомянутого пучка.

Допустим сейчас, что заданы два п/м $T \times \mathbb{R}^n$, а именно, M и N. Определим цель выбора триплета (V, γ, k) для заданной позиции $(t_*, x_*) \in N$ посредством требования: $\forall\, x(\cdot) \in \mathcal{X}(t_*, x_*, V, \gamma, k)$ $\forall\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\big((\vartheta, x(\vartheta)) \in M\big) \Longrightarrow \big(\exists\, t \in [t_*, \vartheta[\colon (t, x(t)) \notin N\big). \tag{1.2}$$

Осуществление (1.2) называем (M,N)-*уклонением* (траектории $x(\cdot)$). Если допустимый триплет (V,γ,k) со свойством гарантированной реализации (1.2) существует, то позицию (t_*,x_*) назовем успешной для игрока II. Целью нашего исследования является: 1) нахождение множества $\mathcal{N}$ всех таких успешных (для игрока II) позиций, а также для всякой позиции $(t_*,x_*)\in\mathcal{N}$, 2) построение триплета $(V,\gamma,k),\ k\leqslant s$, гарантирующего (1.2). Решение данной задачи анонсировано в [11] и связывается (в [11]) с вышеупомянутым вариантом МПИ (итерациями стабильности), предложенным для решения ДИ сближения-уклонения, отвечающего альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина.

2. Обозначения и определения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество). *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Каждому объекту z сопоставляем синглетон $\{z\}$, содержащий z в качестве своего элемента. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X. Для непустого семейства $\mathcal{X}$ и множества Y

$$\mathcal{X}|_Y\overset{\triangle}{=}\{X\cap Y\colon X\in\mathcal{X}\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \tag{2.1}$$

(след $\mathcal{X}$ на множество Y). В терминах (2.1) определяются, в частности, подпространства (п/п) топологических пространств (ТП) и измеримых пространств (ИП). Если A и B — непустые множества, то, следуя [14, с. 77], через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B (при $\mathbf{f}\in B^A$ и $a\in A$ в виде $\mathbf{f}(a)\in B$ имеем значение $\mathbf{f}$ в точке a); при $g\in B^A$ и $C\in\mathcal{P}'(A)$ отображение $(g|\,C)\overset{\triangle}{=}(g(x))_{x\in C}\in B^C$ есть обычное сужение g на множество C.

Традиционные обозначения $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ соответствует разд. 1; $\mathbb{N}_o\overset{\triangle}{=}\{0\}\cup\mathbb{N}=\{0;1;2;\ldots\}$ и $\overline{r_1,r_2}\overset{\triangle}{=}\{k\in\mathbb{N}_o\mid(r_1\leqslant k)\,\&\,(k\leqslant r_2)\}$ при $r_1\in\mathbb{N}_o,\ r_2\in\mathbb{N}_o$. Пусть $\overrightarrow{m,\infty}\overset{\triangle}{=}\{k\in\mathbb{N}_o\mid m\leqslant k\}$ при $m\in\mathbb{N}_o$. Если H — множество и $k\in\mathbb{N}$, то вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем традиционное обозначение H^k, полагая, что элементы $\mathbb{N}_o$ (неотрицательные целые числа) не являются множествами. Если $\mathbb{H}$ — множество, $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathbb{N}}$ и $H\in\mathcal{P}(\mathbb{H})$, то $((H_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow H)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\big((H=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}H_i)\,\&\,(H_{j+1}\subset H_j\ \forall\,j\in\mathbb{N})\big)$. Для любых ТП (X,τ) и множества $Y\in\mathcal{P}(X)$ через $\mathrm{cl}(Y,\tau)$ обозначаем замыкание Y в (X,τ); в виде $(Y,\tau|_Y)$ имеем п/п (X,τ).

Если E — множество и $\mathcal{E}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $\sigma_E^o(\mathcal{E})$ обозначаем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathcal{E}$. В связи с описанием п/п ИП отметим, что при $H\in\mathcal{P}(E)$ $\sigma_H^o(\mathcal{E}|_H)=\sigma_E^o(\mathcal{E})|_H$ и, в случае $H\in\sigma_E^o(\mathcal{E})$, $\sigma_H^o(\mathcal{E}|_H)=\{\Sigma\in\sigma_E^o(\mathcal{E})\mid\Sigma\subset H\}$. Меры, определенные на σ-алгебре борелевских п/м ТП, называем *борелевскими*. Для ИП $(S,\mathcal{S})$ через $(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{S}]$ обозначаем множество (точнее, конус при поточечном определении линейных операций) всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) счетно-аддитивных (с.-а.) мер на σ-алгебре $\mathcal{S}$.

3. Обобщенные программные управления и движения

В настоящем разделе вводятся обобщенные программные управления-меры и отвечающие им движения — скользящие режимы, в терминах которых будет определен затем нужный вариант оператора программного поглощения, именуемый также *оператором стабильности*. Пусть T, P и Q соответствуют разд. 1. При $t\in T$ получаем непустые конечномерные компакты $[t,\vartheta_o],\ Y_t\overset{\triangle}{=}[t,\vartheta_o]\times P$ и $\Omega_t\overset{\triangle}{=}[t,\vartheta_o]\times P\times Q$. Упомянутые компакты оснащаем σ-алгебрами борелевских п/м: $\mathcal{T}_t,\ \mathcal{K}_t$ и $\mathcal{C}_t$ соответственно. Получаем стандартные ИП $([t,\vartheta_o],\mathcal{T}_t),\ (Y_t,\mathcal{K}_t),\ (\Omega_t,\mathcal{C}_t)$ (символика в основном соответствует [8;9]). Если $t\in T$ и $\theta\in[t,\vartheta_o]$, то ИП $([\theta,\vartheta_o],\mathcal{T}_\theta),\ (Y_\theta,\mathcal{K}_\theta)$ и $(\Omega_\theta,\mathcal{C}_\theta)$ таковы, что $\mathcal{T}_\theta=\mathcal{T}_t|_{[\theta,\vartheta_o]}=\{\Gamma\in\mathcal{T}_t\mid\Gamma\subset[\theta,\vartheta_o]\},\ \mathcal{K}_\theta=\mathcal{K}_t|_{Y_\theta}=\{K\in\mathcal{K}_t\mid K\subset Y_\theta\},\ \mathcal{C}_\theta=\mathcal{C}_t|_{\Omega_\theta}=\{C\in\mathcal{C}_t\mid C\subset\Omega_\theta\}$ (согласованность п/п). Через λ обозначаем след меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{T}_{t_o}$. Заметим, что [15, с. 17] при $t\in T$ $\Omega_t=Y_t\times Q$. Кроме того, при $K\in\mathcal{K}_t$ имеем, что

$K \times Q \in \mathcal{C}_t$ (используется легкопроверяемое свойство, что $\{S \in \mathcal{K}_t \mid S \times Q \in \mathcal{C}_t\}$ есть σ-алгебра п/м Y_t, содержащая топологию Y_t, порождающую $\mathcal{K}_t$), а при $\Gamma \in \mathcal{T}_t$ $\Gamma \times P \times Q = (\Gamma \times P) \times Q \in \mathcal{C}_t$ и $\Gamma \times P \in \mathcal{K}_t$. С учетом этого (см. [8; 9, гл. IV]) полагаем при $t \in T$:

$$\mathcal{H}_t \stackrel{\triangle}{=} \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}; \tag{3.1}$$

$$\mathcal{R}_t \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t] \mid \mu(\Gamma \times P) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}; \tag{3.2}$$

$$\pi_t(\mu) \stackrel{\triangle}{=} \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(K \times Q) = \mu(K) \ \ \forall K \in \mathcal{K}_t\} \qquad \forall \mu \in \mathcal{R}_t. \tag{3.3}$$

Меры из множеств (3.1) являются аналогами пар $(u(\cdot), v(\cdot))$ к.-п., н. спр. и н. сл. в точке ϑ_o вектор-функций $u(\cdot) \in P^{[t,\vartheta_o]}$ и $v(\cdot) \in Q^{[t,\vartheta_o]}$, а меры из $\mathcal{R}_t$ (3.2) — аналоги упомянутых вектор-функций $u(\cdot)$. Наконец, меры из множеств (3.3) являются аналогами пар вектор-функций (данного типа) $(u(\cdot), v(\cdot))$, где $u(\cdot)$ фиксировано, т. е. $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$, а $v(\cdot)$ варьируется. В последующих построениях важную роль будут играть "совокупные" ОУ, реализующиеся при совместном действии ОУ $\mu \in \mathcal{R}_t$ и обычного управления-константы $v \in Q$; здесь $t \in T$. В интересах точного определения введем сначала σ-алгебру $\mathcal{B}$ борелевских п/м компакта Q и при $v \in Q$ меру Дирака $\delta_v \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{B}]$ посредством правила: $\forall B \in \mathcal{B}$ $\big((v \in B) \Rightarrow (\delta_v(B) \stackrel{\triangle}{=} 1)\big) \,\&\, \big((v \notin B) \Rightarrow (\delta_v(B) \stackrel{\triangle}{=} 0)\big)$. Заметим, что семейство $\mathcal{K}_t\{\times\}\mathcal{B} \stackrel{\triangle}{=} \{K \times B \colon K \in \mathcal{K}_t, \ B \in \mathcal{B}\}$ является полуалгеброй п/м Ω_t, порождающей σ-алгебру $\mathcal{C}_t$. Тогда при $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$ через $\mu \otimes v$ обозначаем единственную меру из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t]$, для которой $(\mu \otimes v)(K \times B) = \mu(K)\delta_v(B)$ $\forall K \in \mathcal{K}_t$ $\forall B \in \mathcal{B}$. С учетом (3.1) и (3.3) легко проверяется, что $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$.

Всюду в дальнейшем при $t \in T$ через $C([t, \vartheta_o])$, $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ обозначаем множества всех непрерывных в/з функций на $[t, \vartheta_o]$, Ω_t и Y_t соответственно, получая (при оснащении этих множеств нормами равномерной сходимости) три банаховых пространства. Нам потребуются также пространства $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Y_t)$ линейных непрерывных функционалов на $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ соответственно. По теореме Рисса меры из $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{R}_t$ (все они являются регулярными [16]) отождествимы с (неотрицательными) элементами $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Y_t)$, что позволяет оснащать $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{R}_t$ соответствующими относительными $*$-слабыми топологиями (см. [9, гл. IV, § 2]), которые метризуемы в силу сепарабельности пространств $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ в оснащении упомянутыми нормами. При $t \in T$ множества $\mathcal{H}_t$, $\mathcal{R}_t$ и $\pi_t(\mu)$, $\mu \in \mathcal{R}_t$, сильно ограничены и $*$-слабо замкнуты (см. свойства, отмеченные в [9, с. 163]), а потому $*$-слабо компактны в силу теоремы Алаоглу. Как следствие, относительные $*$-слабые топологии упомянутых множеств секвенциально компактны. Замкнутость их п/м в смысле упомянутых топологий эквивалентна секвенциальной замкнутости (упомянутые свойства см. в [17, гл. V]), кроме того, см. [18, § 2.7]. Это позволяет обходиться в последующих построениях секвенциальной сходимостью, для обозначения которой используется символ $\rightharpoonup$. Иными словами, упомянутые относительные топологии полностью описываются посредством сходящихся последовательностей (подробнее см. в [9, гл. IV]). Отметим следующее свойство: если $t \in T$, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{R}_t$, $\mu \in \mathcal{R}_t$, то

$$\big((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu\big) \Longrightarrow \big((\mu_i \otimes v)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu \otimes v \ \ \forall v \in Q\big). \tag{3.4}$$

В связи с проверкой (3.4) отметим построения [19, гл. 5] (в частности, см. [19, теорема 5.5.2]), а также конструкции [20, § III.2]. Напомним, что (см. (1.1)) $f \colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ является непрерывным (по совокупности переменных) отображением, а при $t \in T$ $C_n([t, \vartheta_o])$ есть множество всех непрерывных отображений из $[t, \vartheta_o]$ в $\mathbb{R}^n$, оснащаемое метрикой равномерной сходимости. Для обозначения упомянутой равномерной сходимости используем символ $\rightrightarrows$. Если $x(\cdot) = (x(\xi))_{\xi \in [t, \vartheta_o]} \in C_n([t, \vartheta_o])$, то $(\xi, u, v) \longmapsto f(\xi, x(\xi), u, v) \colon \Omega_t \longrightarrow \mathbb{R}^n$ есть непрерывное отображение. Тогда (покомпонентно) определяются интегралы

$$\int\limits_{[t,\theta[\times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\, \eta\,(d(\xi, u, v)) \in \mathbb{R}^n \qquad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \qquad \forall \theta \in [t, \vartheta_o] \tag{3.5}$$

(в (3.5) может использоваться простейшая схема [19, гл. 3]). При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \Big\{ x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \mid x(t)$$
$$= x_* + \int\limits_{[t_*, t[\times P \times Q} f\big(\xi, x(\xi), u, v\big)\, \eta\,\big(d(\xi, u, v)\big) \;\; \forall\, t \in [t_*, \vartheta_o] \Big\} \tag{3.6}$$

(интегральная воронка, отвечающая триплету (t_*, x_*, η)). Постулируем, что множество (3.6) одноэлементно при всяком выборе $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$. Полагаем при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_t$, что n-вектор-функция $\varphi(\cdot, t, x, \eta) = (\varphi(\xi, t, x, \eta))_{\xi \in [t, \vartheta_o]} \in C_n([t, \vartheta_o])$ реализует равенство $\Phi(t, x, \eta) = \{\varphi(\cdot, t, x, \eta)\}$ (введено программное движение, отвечающее (t, x, η)). Если $\kappa \in [0, \infty[$, то $B_n(\kappa) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant \kappa\}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Полагаем в дальнейшем, что $\forall\, a \in [0, \infty[\; \exists\, b \in [0, \infty[\colon \varphi(\xi, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \;\forall\, t \in T \;\forall\, x \in \mathbb{B}_n(a) \;\forall\, \eta \in \mathcal{H}_t \;\forall\, \xi \in [t, \vartheta_o]$. Напомним, что (см. [21]) при $t \in T$ оператор $(x, \eta) \longmapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta)\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \longrightarrow C_n([t, \vartheta_o])$ непрерывен (при этом $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t$ оснащается топологией произведения $\mathbb{R}^n$ в топологии покоординатной сходимости и $\mathcal{H}_t$ в относительной $*$-слабой топологии). Из данного свойства следует (см. (3.4)), что при $t \in T$ и $v \in Q$ оператор $(x, \mu) \longmapsto \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v)\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{R}_t \longrightarrow C_n([t, \vartheta_o])$ непрерывен: если $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to \mathcal{R}_t$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$, то

$$\big(((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow x) \,\&\, ((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu)\big) \Longrightarrow \big((\varphi(\cdot, t, x_i, \mu_i \otimes v))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v)\big). \tag{3.7}$$

Ниже используются также свойства [21, (4.12), (4.13)], связанные с “нарезкой-склейкой” ОУ. Из (3.7) вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$ $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v)\colon \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_o]))$ есть компакт в $C_n([t_*, \vartheta_o])$ с топологией равномерной сходимости.

4. Операторы стабильности и их свойства

Оснащаем $T \times \mathbb{R}^n$ обычной топологией $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости, получая ТП, метризуемое, в частности, метрикой ρ следующего вида:

$$((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \longmapsto \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\})\colon (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty[.$$

Как обычно, при $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $z \in T \times \mathbb{R}^n$ определяем расстояние от z до множества H: $\rho(z; H) \triangleq \inf(\{\rho(z, h)\colon h \in H\}) \in [0, \infty[$. Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, то $\rho(\cdot; H) \triangleq (\rho(z; H))_{z \in T \times \mathbb{R}^n}$ есть равномерно непрерывная в/з функция (см. [18, (2.7.14)]), определенная на метрическом пространстве $(T \times \mathbb{R}^n, \rho)$. Полагаем, что $\mathcal{F}$ есть def семейство всех замкнутых в ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$. При $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$S_o(H, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z; H) \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$$

есть (замкнутая) окрестность H в упомянутом ТП. Полагая $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(T)$, получаем в виде (T, τ_∂) дискрет с “единицей” T (дискретное ТП). Через $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть обычная топология покоординатной сходимости на $\mathbb{R}^n$, обозначаем естественную топологию произведения ТП (T, τ_∂) и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$; см. [21, с. 127]. Для семейства $\mathfrak{F}$ всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, имеем простое представление в терминах сечений. При $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$ $H\langle t \rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in H\}$ — сечение H гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$. Тогда

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \mid F\langle t \rangle \in \mathbf{F} \;\; \forall\, t \in T\},$$

где $\mathbf{F}$ есть def семейство всех п/м $\mathbb{R}^n$, замкнутых в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Ясно, что $\mathbf{t} \subset \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ и $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}$. Если $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$\mathrm{Supp}(\Lambda) \triangleq \{t \in T \mid \Lambda\langle t \rangle \neq \varnothing\}. \tag{4.1}$$

При $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ введем $(\|\cdot\| - \inf)[x; S] \triangleq \inf(\{\|x - y\| \colon y \in S\})$. Если $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, то функция $(\|\cdot\| - \inf)[\cdot; L] \triangleq ((\|\cdot\| - \inf)[x; L])_{x \in \mathbb{R}^n}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^n$, а потому $B_n^o(L, \varepsilon) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[x; L] \leqslant \varepsilon\} \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. Получили (замкнутые) окрестности L в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. С учетом (4.1) имеем, что при $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $t \in \mathrm{Supp}(\Lambda)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ определено $B_n^o(\Lambda\langle t\rangle, \varepsilon) \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}$. Полагаем, что

$$\mathbb{S}(H, \varepsilon) \triangleq \{(t, x) \in \mathrm{Supp}(H) \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_n^o(H\langle t\rangle, \varepsilon)\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

При $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ непременно $\mathbb{S}(H, \varepsilon) \in \mathfrak{F}$. Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то оператор

$$\mathbb{A}[M] \colon \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \tag{4.2}$$

определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}[M](H) \triangleq \big\{(t, x) \in H \mid \forall v \in Q \ \exists \mu \in \mathcal{R}_t \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o] \colon \big((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \mu \otimes v)) \in M\big) \,\&\\ \big((\xi, \varphi(\xi, t, x, \mu \otimes v)) \in H \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[\,\big)\big\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Множество M в (4.2), (4.3) играет роль целевого для игрока I. Предполагается, что оператор (4.2) реализует сжатие фазовых ограничений (ФО) в задаче сближения. Называем (4.2), (4.3) оператором стабильности, имея в виду связь с понятием, введенным Н. Н. Красовским. Данная связь проявляется при рассмотрении неподвижных точек оператора (4.2). Отметим, что (см. (4.3)) при $M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $H_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$((M_1 \subset M_2) \,\&\, (H_1 \subset H_2)) \Longrightarrow (\mathbb{A}[M_1](H_1) \subset \mathbb{A}[M_2](H_2)).$$

Предложение 4.1. *Если* $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, $F \in \mathfrak{F}$ *и* $(t_*, x_*) \in F \setminus \mathbb{A}[M](F)$, *то* $\exists \varepsilon \in]0, \infty[\colon$ $(t_*, x_*) \notin \mathbb{A}[S_o(M, \varepsilon)](\mathbb{S}(F, \varepsilon))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о использует $*$-слабую компактность множеств (3.2) и осуществляется от противного с использованием построений, подобных [21]; оно не содержит трудностей принципиального характера и по этой причине опущено в настоящем изложении.

Предложение 4.2. *Если* $M \in \mathcal{F}$ *и* $F \in \mathfrak{F}$, *то* $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о подобно обоснованию аналогичного положения [21].

По аналогии с [21, предложение 5.2] устанавливается также следующее

Предложение 4.3. *Если* $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ *и* $((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \,\&\, ((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F)$, *то* $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathfrak{F}$ *и* $(\mathbb{A}[M_i](F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F)$.

5. Итерационная процедура

В настоящем разделе излагается итерационная процедура [8, § 11] (см. также [9, гл. V, § 4]), реализующаяся в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при естественных предположениях топологического характера доставляющая (в пределе) МПП. Если $\alpha \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)}$ (т. е. α — оператор, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$), то последовательность $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_o} \colon \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)}$ степеней α определяется следующими традиционными условиями: $(\alpha^o(H) \triangleq H \ \ \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)) \,\&\, (\alpha^{k+1} = \alpha \circ \alpha^k \ \ \forall k \in \mathbb{N}_o)$, где символ $\circ$ используется для обозначения композиции отображений. Поэтому при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $k \in \mathbb{N}_o$ определен оператор $\mathbb{A}[M]^k$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. Полагаем

$$\mathcal{W}_k(M, N) \triangleq \mathbb{A}[M]^k(N) \quad \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall k \in \mathbb{N}_o. \tag{5.1}$$

Из (5.1) получаем, что $\forall\, M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall\, N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{W}_o(M,N) = N)\,\&\,(\mathcal{W}_{s+1}(M,N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_s(M,N)) \subset \mathcal{W}_s(M,N)\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o). \tag{5.2}$$

Наконец, имеем также $\forall\, M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall\, N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{W}(M,N) \overset{\triangle}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N}_o} \mathcal{W}_k(M,N) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_k(M,N) \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{5.3}$$

Легко видеть, что $(\mathcal{W}_k(M,N))_{k \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}(M,N)\ \ \forall\, M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall\, N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$.

Предложение 5.1. *Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}_s(M,N) \in \mathfrak{F}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (5.2) и предложения 4.2. С учетом (5.3) получаем

Следствие 5.1. *Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}(M,N) \in \mathfrak{F}$.*

Из предложений 4.3 и 5.1 вытекает следующее

Предложение 5.2. *Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}(M,N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}(M,N))$.*

Отметим два очевидных, но полезных свойства: 1) если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n),\ N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H \in \mathcal{P}(N)$, то $(H = \mathbb{A}[M](H)) \Longrightarrow (H \subset \mathcal{W}(M,N))$; 2) если $M \in \mathcal{F},\ N \in \mathfrak{F}$ и $L \in \mathcal{P}(N)$, то $(\mathcal{W}(M,N) \subset L) \Longrightarrow (\mathcal{W}(M,N) = \mathcal{W}(M,L))$. Из предложения 4.3 вытекает

Предложение 5.3. *Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}},\ (N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}},\ M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то*

$$\big(((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M)\,\&\,((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N)\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{W}_s(M_i,N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}_s(M,N)\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o\big).$$

Следствие 5.2. *Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}},\ (N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}},\ M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то*

$$\big(((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M)\,\&\,((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N)\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{W}(M_i,N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}(M,N)\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получаем комбинацией (5.3) и предложения 5.3. Из определений следует, что при $M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n),\ N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n),\ M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $((M_1 \subset M_2)\,\&\,(N_1 \subset N_2)) \Longrightarrow (\mathcal{W}_s(M_1,N_1) \subset \mathcal{W}_s(M_2,N_2)\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o)$; как следствие получаем импликацию $((M_1 \subset M_2)\,\&\,(N_1 \subset N_2)) \Longrightarrow (\mathcal{W}(M_1,N_1) \subset \mathcal{W}(M_2,N_2))$. Из предложения 5.3 вытекает

Предложение 5.4. *Если $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\},\ N \in \mathfrak{F},\ s \in \mathbb{N}$ и $(t_*,x_*) \in N \setminus \mathcal{W}_s(M,N)$, то $\exists\, \varepsilon \in]0,\infty[:\ (t_*,x_*) \notin \mathcal{W}_s(S_o(M,\varepsilon),\mathbb{S}(N,\varepsilon))$.*

Отметим, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ в виде $\mathcal{W}(M,N)$ имеем МПП, которое исчерпывает возможности успешного решения задачи наведения на M при ФО, определяемых сечениями N, в классе квазистратегий. В этой связи см. [8, теорема 11.1; 21, теорема 10.1].

6. Слои пространства позиций: общие свойства

В настоящем разделе схема МПИ (итерации стабильности) конкретизируется в интересах исследования задач уклонения с ограничением на число переключений. Всюду в дальнейшем

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\})\,\&\,(\mathbf{N} \in \mathfrak{F}) \tag{6.1}$$

(наряду с множествами (6.1) будем рассматривать их окрестности); $\mathbf{M}$ играет роль целевого множества задачи сближения, а сечения $\mathbf{N}$ определяют ФО упомянутой задачи. Полагаем, что

$(W_s \triangleq \mathcal{W}_s(\mathbf{M},\mathbf{N})\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o)\,\&\,(W \triangleq \mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N}))$. Тогда $W_s \in \mathfrak{F}$ при $s \in \mathbb{N}_o$; кроме того, $W \in \mathfrak{F}$. При $\varepsilon \in]0,\infty[$ реализуются множества $S_o(\mathbf{M},\varepsilon) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ и $\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \in \mathfrak{F}$. Имеем $\forall\, \varepsilon \in]0,\infty[$

$$\big(W_s^{(\varepsilon)} \triangleq \mathcal{W}_s(S_o(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon))\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o\big)\,\&\,\big(W^{(\varepsilon)} \triangleq \mathcal{W}(S_o(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon))\big).$$

При $\varepsilon \in]0,\infty[$ реализуются свойства $(W_s^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{F}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o)\,\&\,(W^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{F})$. В силу предложения 5.4

$$\forall\, s \in \mathbb{N} \quad \forall\,(t,x) \in \mathbf{N} \setminus W_s \quad \exists\, \varepsilon \in]0,\infty[:\ (t,x) \notin W_s^{(\varepsilon)}. \tag{6.2}$$

Если $\varepsilon \in]0,\infty[$, то определяем слои пространства позиций:

$$\big(\mathbb{F}_o^{(\varepsilon)} \triangleq ((T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)) \cup W^{(\varepsilon)}\big)\,\&\,\big(\mathbb{F}_s^{(\varepsilon)} \triangleq W_{s-1}^{(\varepsilon)} \setminus W_s^{(\varepsilon)}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\big).$$

Предложение 6.1. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$ *и* $s \in \mathbb{N}$, *то* $\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)} = \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}$.

Предложение 6.2. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$, *то последовательность* $(\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)})_{k\in\mathbb{N}}$ *образует разбиение множества* $\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)}$:

$$\Big(\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}\Big)\,\&\,(\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)} \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)} = \varnothing\ \ \forall\, k_1 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}).$$

Следствие 6.1. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$, *то* $\{\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)} : k \in \mathbb{N}_o\}$ *есть разбиение* $T \times \mathbb{R}^n$:

$$\Big(T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_o} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}\Big)\,\&\,(\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)} \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)} = \varnothing\ \ \forall\, k_1 \in \mathbb{N}_o\ \ \forall\, k_2 \in \mathbb{N}_o \setminus \{k_1\}).$$

Следствие 6.2. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$ *и* $t \in T$, *то* $\{\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}\langle t\rangle : k \in \mathbb{N}_o\}$ *есть разбиение* $\mathbb{R}^n$:

$$\Big(\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_o} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}\langle t\rangle\Big)\,\&\,(\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)}\langle t\rangle \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)}\langle t\rangle = \varnothing\ \ \forall\, k_1 \in \mathbb{N}_o\ \ \forall\, k_2 \in \mathbb{N}_o \setminus \{k_1\}).$$

7. Процедуры уклонения, 1: построение траекторий

Ниже уточняются построения разд. 1 для задач уклонения с ограничением на число переключений. Через $\mathfrak{V}$ обозначаем множество всех отображений из $T\times\mathbb{R}^n$ в $\mathcal{P}'(Q)$: $\mathfrak{V} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T\times\mathbb{R}^n}$. Элементы $\mathfrak{V}$ (позиционные стратегии) — суть непустозначные мультифункции из $T \times \mathbb{R}^n$ в Q, что идейно соответствует определению позиционных стратегий в [2; 3].

Если $t \in T$, то через $G^*(t)$ обозначаем множество всех отображений $g^* \in \mathcal{P}'([t,\vartheta_o])^{C_n([t,\vartheta_o])}$, обладающих каждое следующим свойством: $\forall\, g_1 \in C_n([t,\vartheta_o])\ \ \forall\, g_2 \in C_n([t,\vartheta_o])\ \ \forall\, \theta \in [t,\vartheta_o]$

$$((g_1|\,[t,\theta]) = (g_2|\,[t,\theta])) \Longrightarrow (g^*(g_1) \cap [t,\theta] = g^*(g_2) \cap [t,\theta]) \tag{7.1}$$

(см. [11; 12]). Элементы $G^*(t)$ — суть неупреждающие (см. (7.1)) мультифункционалы на $C_n([t,\vartheta_o])$. Отображения-константы являются элементами $G^*(t)$. Через $\mathbb{G}_o^*(t)$ обозначаем множество всех отображений из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$: $\mathbb{G}_o^*(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$. Наконец, пусть при $\theta \in T$

$$\mathbb{G}_\theta^* \triangleq \prod_{t\in[\theta,\vartheta_o]} \mathbb{G}_o^*(t) \tag{7.2}$$

($\mathbb{G}_\theta^*$ есть декартово произведение множеств $\mathbb{G}_o^*(t),\ t \in [\theta,\vartheta_o]$). Элементы (7.2) называем стратегиями коррекции на $[\theta,\vartheta_o]$ (см. [11, с. 8]). Каждая стратегия коррекции из множества (7.2) является отображением на $[\theta,\vartheta_o]$, значения которого при $t\in[\theta,\vartheta_o]$ содержатся в $\mathbb{G}^*_o(t)$ и являются всякий раз отображением из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$. Итак, при $\theta\in T,\ \gamma\in\mathbb{G}^*_\theta,\ t\in[\theta,\vartheta_o]$ и $x\in\mathbb{R}^n$ в виде $\gamma(t)(x)$ имеем неупреждающий мультифункционал из множества $G^*(t)$. Если $t\in T,\ \gamma\in\mathbb{G}^*_t$ и $\tau\in[t,\vartheta_o]$, то (см. (7.2)) определено сужение

$$(\gamma|\,[\tau,\vartheta_o])\in\mathbb{G}^*_\tau \tag{7.3}$$

исходного отображения γ на отрезок $[\tau,\vartheta_o]$. Наконец, располагая позицией (t,x) и $s\in\mathbb{N}$, мы определяем множество допустимых процедур уклонения из данной позиции в виде $\mathfrak{V}\times\mathbb{G}^*_t\times\overline{1,s}$. Здесь s задает ограничение на число переключений формируемого управления.

Рассмотрим вопрос о траекториях, порождаемых стратегиями-тройками из множества $\mathfrak{V}\times\mathbb{G}^*_t\times\mathbb{N}$. Сначала введем несколько вспомогательных определений. Если $t\in T$ и $m\in\mathbb{N}$, то $\Delta_m[t]\triangleq\{(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}}\in[t,\vartheta_o]^{m+1}\mid(\tau_1=t)\,\&\,(\tau_{m+1}=\vartheta_o)\,\&\,(\tau_j\leqslant\tau_{j+1}\ \ \forall\,j\in\overline{1,m})\}$. Каждый кортеж из последнего множества порождает разбиение $[t,\vartheta_o]$ в сумму m промежутков (некоторые из них могут быть вырожденными). Если $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n,\ v\in Q$ и $\theta\in[t,\vartheta_o]$, то полагаем, что $\mathcal{X}^{(\theta)}_\Pi(t,x,v)\triangleq\{(\mathbf{x}|\,[t,\theta])\colon\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\Pi(t,x,v)\}$, получая непустое множество n-вектор-функций на $[t,\theta]$. Если $V\in\mathfrak{V},\ t\in T,\ m\in\mathbb{N},\ (\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}}\in\Delta_m[t]$ и $\mathbf{x}\in C_n([t,\vartheta_o])$, то

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}_Q[V;t;m;(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}};\mathbf{x}]\\&\triangleq\Big\{(v_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\prod_{i=1}^m V(\tau_i,\mathbf{x}(\tau_i))\mid(\mathbf{x}|[\tau_k,\tau_{k+1}])\in\mathcal{X}^{(\tau_{k+1})}_\Pi(\tau_k,\mathbf{x}(\tau_k),v_k)\ \ \forall\,k\in\overline{1,m}\Big\}\end{aligned} \tag{7.4}$$

(не исключается, что множество (7.4) может быть пустым). Разумеется, (7.4) представляет интерес при условии, что $\mathbf{x}=x(\cdot)$ — траектория системы. Далее, если $V\in\mathfrak{V},\ t\in T,\ \gamma\in\mathbb{G}^*_t,\ \mathbf{x}\in C_n([t,\vartheta_o])$ и $m\in\mathbb{N}$, то полагаем

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{pos}}[V;t;\gamma;\mathbf{x};m]\triangleq\big\{&(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}}\in\Delta_m[t]\mid(\mathfrak{M}_Q[V;t;m;(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}};\mathbf{x}]\neq\varnothing)\,\&\\&(\tau_{k+1}\in\gamma(\tau_k)(\mathbf{x}(\tau_k))((\mathbf{x}|[\tau_k,\vartheta_o]))\ \ \forall\,k\in\overline{1,m-1})\big\}.\end{aligned} \tag{7.5}$$

В (7.5) указаны возможные “временные сценарии” организации коррекций, согласованных с (V,γ,m) и “привязанных” к вектор-функции $\mathbf{x}$. Теперь сопоставим стратегии-тройке множество не противоречащих ей траекторий: если $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n,\ V\in\mathfrak{V},\ \gamma\in\mathbb{G}^*_t$ и $m\in\mathbb{N}$, то

$$\mathfrak{X}[t;x;V;\gamma;m]\triangleq\{\mathbf{x}\in C_n([t,\vartheta_o])\mid(\mathbf{x}(t)=x)\,\&\,(\Delta_{\mathrm{pos}}[V;t;\gamma;\mathbf{x};m]\neq\varnothing)\}. \tag{7.6}$$

Элементы (7.6) — траектории системы, которые стартуют из позиции (t,x) и не противоречат стратегии-тройке (V,γ,m). Эти траектории называем *порожденными стратегией-тройкой.*

З а м е ч а н и е 7.1. В (7.6) допускается, что формируемое на основе (V,γ,m) обычное управление $v(\cdot)$ со значениями в Q воздействует на систему вместе с некоторой обобщенной помехой $\mu\in\mathcal{R}_t$. Итак, мы существенно расширяем возможности игрока I в части формирования помеховых воздействий. Отметим вариант [11] излагаемой ниже конструкции, в рамках которого допускалось использование игроком I только обычных помеховых управлений. □

Из (7.4)–(7.6) вытекает свойство: если $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n,\ V\in\mathfrak{V}$ и $\gamma\in\mathbb{G}^*_{t_*}$, то

$$\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\gamma;1]=\bigcup_{v\in V(t_*,x_*)}\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,v)\in\mathcal{P}'(C_n([t_*,\vartheta_o])). \tag{7.7}$$

Предложение 7.1. *Если* $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n,\ V\in\mathfrak{V},\ \gamma\in\mathbb{G}^*_{t_*},\ m\in\mathbb{N},\ \mathbf{x}\in C_n([t_*,\vartheta_o])$ *и* $(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+2}}\in\Delta_{\mathrm{pos}}[V;t_*;\gamma;\mathbf{x};\,m+1]$, *то* $(\tau_{i+1})_{i\in\overline{1,m+1}}\in\Delta_{\mathrm{pos}}[V;\tau_2;(\gamma|\,[\tau_2,\vartheta_o]);(\mathbf{x}|\,[\tau_2,\vartheta_o]);m]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из определений.

Из (7.6) и предложения 7.1 вытекает

Предложение 7.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; m+1]$ *и* $(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{\mathrm{pos}}[V; t_*; \gamma; \mathbf{x};\ m+1]$, *то* $(\mathbf{x}|\,[\tau_2, \vartheta_o]) \in \mathfrak{X}[\tau_2; \mathbf{x}(\tau_2); V; (\gamma|\,[\tau_2, \vartheta_o]); m]$.

Ниже используется "обычная" операция склеивания: если $t \in T$, $\theta \in [t, \vartheta_o]$, $g_1 \colon [t, \vartheta_o] \to \mathbb{R}^n$, $g_2 \colon [\theta, \vartheta_o] \to \mathbb{R}^n$, то $g_1 \Box\, g_2 \colon [t, \vartheta_o] \to \mathbb{R}^n$ определяется условиями

$$((g_1 \Box\, g_2)(\xi) \triangleq g_1(\xi)\ \ \forall \xi \in [t, \theta[\,)\,\&\,((g_1 \Box\, g_2)(\xi) \triangleq g_2(\xi)\ \ \forall \xi \in [\theta, \vartheta_o]). \tag{7.8}$$

Ясно, что при $g_1 \in C_n([t, \vartheta_o])$ и $g_2 \in C_n([\theta, \vartheta_o])$

$$(g_1(\theta) = g_2(\theta)) \Longrightarrow (g_1 \Box\, g_2 \in C_n([t, \vartheta_o])). \tag{7.9}$$

Предложение 7.3. *Если* $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_t$ *и* $m \in \mathbb{N}$, *то* $\mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; m] \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о осуществляется по индукции с учетом (7.7)–(7.9).

Итак, каждой стратегии-тройке сопоставляется непустое множество — пучок траекторий, порожденных данной стратегией. Из (7.7) следует

Предложение 7.4. *Если* $(t_*, x_*) \in W_1$, *то* $\forall V \in \mathfrak{V}\ \ \forall \gamma \in \mathbb{G}^*_{t_*}\ \ \exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; 1]\ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[\,)$.

Предложение 7.5. *Если* $s \in \mathbb{N}$, $(t, x) \in W_s$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_t$ *и* $k \in \overline{1, s}$, *то* $\exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k]\ \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]\colon\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N}\ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[\,)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{N} \triangleq \big\{ s \in \mathbb{N} \mid \forall (t, x) \in W_s\ \ \forall V \in \mathfrak{V}\ \ \forall \gamma \in \mathbb{G}^*_t\ \ \forall k \in \overline{1, s}\ \ \exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k]\ \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]\colon \\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N}\ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[\,)\big\}. \tag{7.10}$$

Из предложения 7.4 вытекает, что $1 \in \mathfrak{N}$. Выберем произвольно $m \in \mathfrak{N}$. Пусть, кроме того, $(t_*, x_*) \in W_{m+1}$, $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}$ и $\kappa \in \mathbb{G}^*_{t_*}$. Тогда $\mathbb{V}(t_*, x_*) \in \mathcal{P}'(Q)$ и, в частности, $\mathbb{V}(t_*, x_*) \neq \varnothing$. Пусть $v_* \in \mathbb{V}(t_*, x_*)$, при этом $W_{m+1} = \mathbb{A}[\mathbf{M}](W_m)$. Для некоторых $\mu_* \in \mathcal{R}_{t_*}$ и $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta_*, \mathbf{x}^*(\vartheta_*)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}^*(t)) \in W_m\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_*[\,), \tag{7.11}$$

где $\mathbf{x}^* \triangleq \varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu_* \otimes v_*)$. Тогда $\kappa(t_*)(x_*)(\mathbf{x}^*) \in \mathcal{P}'([t_*, \vartheta_o])$. Пусть

$$t^* \in \kappa(t_*)(x_*)(\mathbf{x}^*). \tag{7.12}$$

Рассмотрим позицию $(t^*, \mathbf{x}^*(t^*)) \in T \times \mathbb{R}^n$. Фиксируя $r \in \overline{1, m}$, получаем стратегию-тройку $(\mathbb{V}, \bar{\kappa}, r)$, где $\bar{\kappa} \triangleq (\kappa|\,[t^*, \vartheta_o]) \in \mathbb{G}^*_{t^*}$ (см. (7.3)). В силу предложения 7.3 $\mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \bar{\kappa}; r] \in \mathcal{P}'(C_n([t^*, \vartheta_o]))$. Используя (7.12), нетрудно показать, что

$$\mathbf{x}^* \Box\, \mathbf{y} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1] \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \bar{\kappa}; r]. \tag{7.13}$$

При этом $(\vartheta_* \leqslant t^*) \vee (t^* < \vartheta_*)$. Оба упомянутых случая рассмотрим отдельно.

1) Пусть $\vartheta_* \leqslant t^*$. Тогда с учетом непустоты $\mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \bar{\kappa}; r]$ выберем произвольно $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \bar{\kappa}; r]$, получая (см. (7.13)) $\bar{\mathbf{z}} \triangleq \mathbf{x}^* \Box\, \bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]$ со свойством $\bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{x}^*(t)\ \ \forall t \in [t_*, t^*]$. В силу (7.11) получаем, что $((\vartheta_*, \bar{\mathbf{z}}(\vartheta_*)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \bar{\mathbf{z}}(t)) \in W_m\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_*[\,)$. Итак, установлена следующая импликация

$$(\vartheta_* \leqslant t^*) \Rightarrow \big(\exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]\ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon \\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[\,)\big). \tag{7.14}$$

2) Пусть $t^* < \vartheta_*$. Тогда $t^* \in [t_*, \vartheta_*[$ и согласно (7.11) $(t^*, \mathbf{x}^*(t^*)) \in W_m,\ r \in \overline{1,m},\ \mathbb{V} \in \mathfrak{V},\ \bar{\kappa} \in \mathbb{G}^*_{t^*}$. По выбору m имеем (см. (7.10)) для некоторых $\mathbf{x}^\natural \in \mathfrak{X}[t^*, \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \bar{\kappa}; r]$ и $\vartheta^\natural \in [t^*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta^\natural, \mathbf{x}^\natural(\vartheta^\natural)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}^\natural(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t^*, \vartheta^\natural[\,). \tag{7.15}$$

В силу (7.13) $\mathbf{x}^\natural_* \overset{\triangle}{=} \mathbf{x}^* \Box \mathbf{x}^\natural \in \mathfrak{X}[t_*, x_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]$, причем $\mathbf{x}^\natural_*(t) = \mathbf{x}^*(t)\ \ \forall\, t \in [t_*, t^*]$. Тогда из (7.11) получаем, что $(t, \mathbf{x}^\natural_*(t)) = (t, \mathbf{x}^*(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t_*, t^*]$ (учли вложение $W_m \subset \mathbf{N}$), откуда в силу (7.15) получаем, что $((\vartheta^\natural, \mathbf{x}^\natural_*(\vartheta^\natural)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}^\natural_*(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta^\natural[\,)$. Итак,

$$(t^* < \vartheta_*) \Rightarrow \big(\exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]\ \ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\,)\big). \tag{7.16}$$

Поскольку выбор $r \in \overline{1,m}$ был произвольным, из (7.14) и (7.16) вытекает, что

$$\forall\, s \in \overline{2, m+1}\ \ \exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; s]\ \ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\,). \tag{7.17}$$

С другой стороны, $W_{m+1} \subset W_1$, а потому $(t_*, x_*) \in W_1$ и с учетом предложения 7.4 и (7.17) $\forall\, s \in \overline{1, m+1}\ \ \exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; s]\ \ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\,))$. Поскольку выбор (t_*, x_*), $\mathbb{V}$ и κ был произвольным, установлено, что $m+1 \in \mathfrak{N}$. Получили импликацию $(m \in \mathfrak{N}) \Rightarrow (m+1 \in \mathfrak{N})$. Следовательно, $(1 \in \mathfrak{N})\,\&\,(k+1 \in \mathfrak{N}\ \ \forall\, k \in \mathfrak{N})$, а потому $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$ и с учетом (7.10) получаем требуемое утверждение. $\square$

Итак, установлено, что при $s \in \mathbb{N}$ и $(t, x) \in W_s$ гарантированное $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$-уклонение в классе стратегий-троек (V, γ, k), $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_t$, $k \in \overline{1, s}$, невозможно.

8. Процедуры уклонения, 2 (связь с методом итераций)

В настоящем разделе рассматривается вопрос о процедурах, гарантирующих строгое уклонение при ограничении на число переключений (см. [11; 12]). Согласно (6.2)

$$\Xi_s(t, x) \overset{\triangle}{=} \{\varepsilon \in]0, \infty[\ |\ (t, x) \notin W^{(\varepsilon)}_s\} \in \mathcal{P}'(]0, \infty[)\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\ \ \forall\,(t, x) \in \mathbf{N} \setminus W_s. \tag{8.1}$$

Введем в рассмотрение аналог позиционной стратегии [12, (5.5), (5.6)], для чего отметим сначала, что $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\ \ \forall\,(t, x) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_s\ \ \exists\, v \in Q\ \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v)\ \ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin W^{(\varepsilon)}_{s-1}). \tag{8.2}$$

При $\varepsilon \in]0, \infty[$ полагаем (см. (8.2), следствие 6.2), что $\mathbf{V}_\varepsilon \in \mathfrak{V}$ имеет вид

$$\big(\mathbf{V}_\varepsilon(t, x) \overset{\triangle}{=} Q\ \ \forall\,(t, x) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_o\big)\,\&\,\big(\mathbf{V}_\varepsilon(t, x) \overset{\triangle}{=} \big\{v \in Q\ |\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v)\ \ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin W^{(\varepsilon)}_{s-1})\big\}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\ \ \forall\,(t, x) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_s\big). \tag{8.3}$$

При $t \in T$ полагаем, что $\Theta^o_t \in G^*(t)$ определяется условием $\Theta^o_t(g) \overset{\triangle}{=} \{\vartheta_o\}\ \ \forall\, g \in C_n([t, \vartheta_o])$. Для построения работоспособных стратегий коррекции потребуются некоторые вспомогательные определения. Если $t \in T$, $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$C_t[\Gamma; \Lambda] \overset{\triangle}{=} \big\{g \in C_n([t, \vartheta_o])\ |\ \exists\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]\colon ((\vartheta, g(\vartheta)) \in \Lambda)\,\&\,((\xi, g(\xi)) \notin \Gamma\ \ \forall\, \xi \in [t, \vartheta])\big\}. \tag{8.4}$$

О п р е д е л е н и е 8.1. Если $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$, то мультифункционал $\theta^o[\Gamma; \Lambda; t]\colon C_n([t, \vartheta_o]) \longrightarrow \mathcal{P}'([t, \vartheta_o])$ определяем следующими условиями:

$$\big(\theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g) \overset{\triangle}{=} \big\{\vartheta \in [t, \vartheta_o]\ |\ ((\vartheta, g(\vartheta)) \in \Lambda)\,\&\,((\xi, g(\xi)) \notin \Gamma\ \ \forall\, \xi \in [t, \vartheta])\big\}\ \ \forall\, g \in C_t[\Gamma; \Lambda]\big)\ \&$$
$$\big(\theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g) \overset{\triangle}{=} \{\vartheta_o\}\ \ \forall\, g \in C_n([t, \vartheta_o]) \setminus C_t[\Gamma; \Lambda]\big). \tag{8.5}$$

Предложение 8.1. *Если* $\Gamma \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ *и* $t\in T$, *то* $\theta^o[\Gamma;\Lambda;t] \in G^*(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем Γ, Λ и t в соответствии с условиями. Пусть $g_1 \in C_n([t,\vartheta_o])$, $g_2 \in C_n([t,\vartheta_o])$ и $\theta \in [t,\vartheta_o]$ таковы, что $(g_1|\,[t,\theta]) = (g_2|\,[t,\theta])$. Введем $\mathbb{T}_1 \triangleq \theta^o[\Gamma;\Lambda;t](g_1)$ и $\mathbb{T}_2 \triangleq \theta^o[\Gamma;\Lambda;t](g_2)$.

1) Пусть $g_1 \in C_t[\Gamma;\Lambda]$ и $\vartheta_1 \in \mathbb{T}_1\cap[t,\theta]$. Тогда (см. (8.5))

$$((\vartheta_1, g_1(\vartheta_1))\in\Lambda)\,\&\,((\xi,g_1(\xi))\notin\Gamma\ \ \forall\,\xi\in[t,\vartheta_1]). \tag{8.6}$$

Поскольку $\vartheta_1 \leqslant \theta$, из (8.6) легко следует, что $\vartheta_1\in\mathbb{T}_2\cap[t,\theta]$. Итак, в случае 1) $\mathbb{T}_1\cap[t,\theta]\subset \mathbb{T}_2\cap[t,\theta]$. Получили импликацию $(g_1\in C_t[\Gamma;\Lambda]) \Longrightarrow (\mathbb{T}_1\cap[t,\theta]\subset\mathbb{T}_2\cap[t,\theta])$.

2) Пусть теперь $g_1\in C_n([t,\vartheta_o])\setminus C_t[\Gamma;\Lambda]$. Из определения 8.1 следует, что $\mathbb{T}_1=\{\vartheta_o\}$, а из (8.4) и совпадения $g_1(t)$ и $g_2(t)$ на $[t,\theta]$ вытекает, что $\forall\,\vartheta\in[t,\theta]$

$$((\vartheta,g_2(\vartheta))\in\Lambda)\Longrightarrow(\exists\,\xi\in[t,\vartheta]\colon(\xi,g_2(\xi))\in\Gamma).$$

Допустим, что $(\mathbb{T}_1\cap[t,\theta])\setminus(\mathbb{T}_2\cap[t,\theta])\neq\varnothing$. Пусть $\bar\vartheta\in(\mathbb{T}_1\cap[t,\theta])\setminus(\mathbb{T}_2\cap[t,\theta])$. Тогда $\bar\vartheta\notin\mathbb{T}_2$ и, вместе с тем, $\bar\vartheta=\vartheta_o$. Получили, что $\vartheta_o\notin\mathbb{T}_2$, что означает в силу определения 8.1 справедливость включения $g_2\in C_t[\Gamma;\Lambda]$. При этом

$$\mathbb{T}_2=\bigl\{\vartheta\in[t,\vartheta_o]\mid((\vartheta,g_2(\vartheta))\in\Lambda)\,\&\,((\xi,g_2(\xi))\notin\Gamma\ \ \forall\,\xi\in[t,\vartheta])\bigr\}\subset[t,\vartheta_o[. \tag{8.7}$$

Тогда $\mathbb{T}_2\cap[t,\theta]=\varnothing$ (действительно, при $\hat\vartheta\in\mathbb{T}_2\cap[t,\theta]$ имеем $\hat\vartheta<\vartheta_o$ и, вместе с тем, с учетом (8.7) $((\hat\vartheta,g_1(\hat\vartheta))\in\Lambda)\,\&\,((\xi,g_1(\xi))\notin\Gamma\ \ \forall\,\xi\in[t,\hat\vartheta])$; поэтому при $\mathbb{T}_2\cap[t,\theta]\neq\varnothing$ имеем в силу (8.4), что $g_1\in C_t[\Gamma;\Lambda]$, а это невозможно). Кроме того, при $\theta=\vartheta_o$ имеем равенство $g_1=g_2$, а тогда $\mathbb{T}_1=\mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T}_2=\{\vartheta_o\}$, что невозможно в силу (8.7). Стало быть $\theta<\vartheta_o$, а потому $\mathbb{T}_1\cap[t,\theta]=\{\vartheta_o\}\cap[t,\theta]=\varnothing$ и наше предположение о непустоте $(\mathbb{T}_1\cap[t,\theta])\setminus(\mathbb{T}_2\cap[t,\theta])$ неверно. Таким образом, $\mathbb{T}_1\cap[t,\theta]\subset\mathbb{T}_2\cap[t,\theta]$ и в рассматриваемом случае 2). Получаем окончательно, что $((g_1|\,[t,\theta])=(g_2|\,[t,\theta]))\Longrightarrow(\mathbb{T}_1\cap[t,\theta]\subset\mathbb{T}_2\cap[t,\theta])$. Поскольку g_1, g_2 и θ выбирались произвольно, установлено требуемое свойство неупреждаемости. $\square$

О п р е д е л е н и е 8.2. Если $\varepsilon\in]0,\infty[$ и $t\in T$, то полагаем, что отображение $\tilde\theta_t^{(\varepsilon)}\in\mathbb{G}_o^*(t)$ имеет следующий вид:

$$\bigl(\tilde\theta_t^{(\varepsilon)}(x)\triangleq\Theta_t^o\ \ \forall\,x\in\mathbb{F}_o^{(\varepsilon)}\langle t\rangle\bigr)\,\&\,\bigl(\tilde\theta_t^{(\varepsilon)}(x)\triangleq\theta^o[S_o(\mathbf{M},\varepsilon);(T\times\mathbb{R}^n)\setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)};t]\ \ \forall\,s\in\mathbb{N}\ \ \forall\,x\in\mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}\langle t\rangle\bigr).$$

С учетом определения 8.2 имеем теперь, что

$$\tilde\theta^{(\varepsilon)}[t]\triangleq(\tilde\theta_\xi^{(\varepsilon)})_{\xi\in[t,\vartheta_o]}\in\mathbb{G}_t^*\qquad\forall\,\varepsilon\in]0,\infty[\qquad\forall\,t\in T. \tag{8.8}$$

Таким образом (см. (8.3), (8.8)), при $\varepsilon\in]0,\infty[$, $t\in T$ и $s\in\mathbb{N}$ $(\mathbf{V}_\varepsilon,\tilde\theta^{(\varepsilon)}[t],s)\in\mathfrak{V}\times\mathbb{G}_t^*\times\mathbb{N}$ (построена стратегия-тройка). Легко видеть, что справедливо

Предложение 8.2. *Если* $\varepsilon\in]0,\infty[$, $s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 2$, $(t,x)\in\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\setminus W_s^{(\varepsilon)}$ *и* $v\in\mathbf{V}_\varepsilon(t,x)$, *то*

$$\mathcal{X}_\Pi(t,x,v)\subset C_t[\mathbf{S}_o(\mathbf{M},\varepsilon);(T\times\mathbb{R}^n)\setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}].$$

Из предложения 8.2 вытекает (см. определение 8.2), что при $\varepsilon\in]0,\infty[$, $s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 2$, $(t,x)\in\mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}$, $v\in\mathbf{V}_\varepsilon(t,x)$ и $\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\Pi(t,x,v)$

$$\theta^o[S_o(\mathbf{M},\varepsilon);(T\times\mathbb{R}^n)\setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)};t](\mathbf{x})$$
$$=\bigl\{\vartheta\in[t,\vartheta_o]\mid((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in(T\times\mathbb{R}^n)\setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)})\,\&\,((\xi,\mathbf{x}(\xi))\notin S_o(\mathbf{M},\varepsilon)\ \ \forall\,\xi\in[t,\vartheta])\bigr\}.$$

В силу (7.7) $\forall\,\varepsilon\in]0,\infty[\ \ \forall\,(t,x)\in\mathbb{F}_1^{(\varepsilon)}\ \ \forall\,\mathbf{x}\in\mathfrak{X}[t;x;\mathbf{V}_\varepsilon;\tilde\theta^{(\varepsilon)}[t];1]\ \ \forall\,\vartheta\in[t,\vartheta_o]$

$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in S_o(\mathbf{M},\varepsilon))\Longrightarrow(\exists\,\xi\in[t,\vartheta[\colon(\xi,\mathbf{x}(\xi))\notin\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)). \tag{8.9}$$

Предложение 8.3. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[,\ s \in \mathbb{N},\ (t,x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)},\ \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t;x;\mathbf{V}_\varepsilon;\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t];s]$ *и* $\vartheta \in [t,\vartheta_o]$, *то* $((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)) \Longrightarrow (\,\exists\,\xi \in [t,\vartheta[:\ (\xi,\mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\varepsilon \in]0,\infty[$ и введем множество

$$\mathfrak{N} \overset{\triangle}{=} \big\{s \in \mathbb{N} \mid \forall\,(t,x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)}\ \ \forall\,\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t;x;\mathbf{V}_\varepsilon;\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t];s]\ \ \forall\,\vartheta \in [t,\vartheta_o]$$
$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)) \Longrightarrow (\,\exists\,\xi \in [t,\vartheta[:\ (\xi,\mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon))\big\}. \tag{8.10}$$

Из (8.9), (8.10) имеем включение $1 \in \mathfrak{N}$. Пусть вообще $m \in \mathfrak{N}$. Выберем произвольно

$$(t_*,x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \setminus W_{m+1}^{(\varepsilon)}, \qquad h \in \mathfrak{X}[t_*;x_*;\mathbf{V}_\varepsilon;\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*];m+1], \qquad \vartheta_* \in [t_*,\vartheta_o]. \tag{8.11}$$

Тогда $h \in C_n([t_*,\vartheta_o])$, $h(t_*) = x_*$ и $\Delta_{\rm pos}[\mathbf{V}_\varepsilon;t_*;\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*];h;m+1] \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем $(\theta_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \Delta_{\rm pos}[\mathbf{V}_\varepsilon;t_*;\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*];h;m+1]$, получая, в частности, что $(\theta_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \Delta_{m+1}[t_*]$ и $\theta_2 \in [t_*,\vartheta_o]$. В силу (7.3) и предложения 7.2 имеем, что $(h|\,[\theta_2,\theta_o]) \in \mathfrak{X}[\theta_2;h(\theta_2);\mathbf{V}_\varepsilon;\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[\theta_2];m]$. Заметим, что $\theta_2 \in \tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*)(h)$, где $\tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*) \in G^*(t_*)$. Заметим здесь же, что $\mathfrak{M}_Q[\mathbf{V}_\varepsilon;t_*;m+1;(\theta_i)_{i\in\overline{1,m+2}};h] \neq \varnothing$.

С использованием этого свойства выберем $(v_i^*)_{i\in\overline{1,m+1}} \in \mathfrak{M}_Q[\mathbf{V}_\varepsilon;t_*;\ m+1;(\theta_i)_{i\in\overline{1,m+2}};h]$. Тогда, в частности, $v_1^* \in \mathbf{V}_\varepsilon(t_*,x_*)$ и для некоторой траектории $h_1 \in \mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,v_1)$ имеет место $(h|\,[t_*,\theta_2]) = (h_1|\,[t_*,\theta_2])$, откуда в силу неупреждаемости $\tilde{\theta}_{t_*}(x_*)$ получаем, что

$$\theta_2 \in \tilde{\theta}_{t_*}(x_*)(h_1). \tag{8.12}$$

Согласно (8.11) и предложения 8.2 $h_1 \in C_{t_*}[S_o(\mathbf{M},\varepsilon);(T\times\mathbb{R}^n)\setminus W_m^{(\varepsilon)}]$. Данное свойство допускает уточнение: по выбору (t_*,x_*) имеем в силу предложения 6.1, что для некоторого $r \in \overline{1,m+1}$ выполнено $(t_*,x_*) \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}$, а потому $x_* \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}\langle t_*\rangle$. Как следствие (см. определение 8.2)

$$\tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*) = \theta^o[S_o(\mathbf{M},\varepsilon);(T\times\mathbb{R}^n)\setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)};t_*]. \tag{8.13}$$

С учетом (8.12) и (8.13) получаем, что

$$\big((\theta_2,h(\theta_2)) = (\theta_2,h_1(\theta_2)) \in (T\times\mathbb{R}^n)\setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}\big)\ \&\ \big((t,h(t)) \notin S_o(\mathbf{M},\varepsilon)\ \ \forall\,t \in [t_*,\theta_2]\big). \tag{8.14}$$

Из (8.14) имеем, в частности, импликацию

$$((\vartheta_*,h(\vartheta_*)) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)) \Longrightarrow (\theta_2 < \vartheta_*). \tag{8.15}$$

Отдельно рассмотрим случаи $r = 1$ и $r \in \overline{2,m+1}$.

1) При $r = 1$ имеем, что $(\theta_2,h(\theta_2)) \notin \mathbb{S}_o(\mathbf{N},\varepsilon)$ и с учетом (8.15) получаем в рассматриваемом случае $r = 1$ импликацию

$$((\vartheta_*,h(\vartheta_*)) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\,t \in [t_*,\vartheta_*[:\ (t,h(t)) \notin \mathbb{S}_o(\mathbf{N},\varepsilon)). \tag{8.16}$$

2) Пусть $r \in \overline{2,m+1}$. Тогда в силу (8.14)

$$((\theta_2,h(\theta_2) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)) \vee ((\theta_2,h(\theta_2)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}). \tag{8.17}$$

В первом, из указанных в (8.17), случае имеем сразу (см. (8.15)) импликацию (8.16). Пусть $(\theta_2,h(\theta_2)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}$. Поскольку $W_m^{(\varepsilon)} \subset W_{r-1}^{(\varepsilon)}$, получаем, что $(\theta_2,h(\theta_2)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\setminus W_m^{(\varepsilon)}$. Поэтому по выбору m имеем следующее свойство: $\forall\,\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[\theta_2;h(\theta_2);\mathbf{V}_\varepsilon;\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[\theta_2];m]\ \ \forall\,\vartheta \in [\theta_2,\vartheta_o]$

$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\,\xi \in [\theta_2,\vartheta[:\ (\xi,\mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)). \tag{8.18}$$

Из (8.15) и (8.18) следует, что $((\vartheta_*,h(\vartheta_*)) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\,\xi \in [\theta_2,\vartheta_*[:\ (\xi,h(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon))$. Поскольку $[\theta_2,\vartheta_*[\subset [t_*,\vartheta_*[$, имеем в силу (8.15), что (8.16) истинно и во втором случае в (8.17).

Таким образом, (8.16) истинно при $r \in \overline{2, m+1}$. Мы установили, что (8.16) истинно во всех возможных случаях. Поскольку выбор (t_*, x_*), h и ϑ_* (см. (8.11)) был произвольным, получаем, что $m+1 \in \mathfrak{N}$ (см. (8.10)). Итак, $(1 \in \mathfrak{N})\,\&\,(k+1 \in \mathfrak{N}\ \forall\, k \in \mathfrak{N})$. Получили (см. (8.10)) требуемое утверждение. $\square$

С учетом (8.1) и предложения 8.3 имеем конкретные варианты процедур, гарантирующих строгое уклонение: $\forall\, s \in \mathbb{N}\ \forall\,(t,x) \in \mathbf{N} \setminus W_s\ \forall\, \varepsilon \in \Xi_s(t,x)\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; s]\ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$ $((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon))$.

9. Условия разрешимости задач уклонения с ограничением на число переключений

В настоящем разделе указываются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие возможность успешного решения задач уклонения с тем или иным ограничением на число переключений формируемого управления. Из (8.1), предложений 7.5 и 8.3 вытекает

Теорема 9.1. *Если $s \in \mathbb{N}$, то справедливо следующее равенство*:

$$\mathbf{N} \setminus W_s = \big\{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, V \in \mathfrak{V}\ \exists\, \gamma \in \mathbb{G}_t^*\ \exists\, k \in \overline{1, s}\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k]\ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon))\big\}.$$

В свою очередь, из теоремы 9.1 и предложения 7.5 следует

Теорема 9.2. *Если $s \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство*:

$$\mathbf{N} \setminus W_s = \big\{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists\, V \in \mathfrak{V}\ \ \exists\, \gamma \in \mathbb{G}_t^*\ \ \exists\, k \in \overline{1, s}\ \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k]\ \ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \Longrightarrow (\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbf{N})\big\}.$$

Следствие 9.1. *Если $s \in \mathbb{N}$ и $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$, то*

$$\big(\exists\, V \in \mathfrak{V}\ \exists\, \gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^*\ \exists\, k \in \overline{1, s}\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k]\ \forall\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \Longrightarrow (\exists \xi \in [t_*, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbf{N})\big) \Longleftrightarrow$$
$$\big(\exists\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, V \in \mathfrak{V}\ \exists\, \gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^*\ \exists\, k \in \overline{1, s}\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k]\ \forall\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists\, \xi \in [t_*, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon))\big).$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации теорем 9.1 и 9.2. Следствие 9.1 показывает, что при заданных $s \in \mathbb{N}$ и $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$ задача "обычного" $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$-уклонения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача строгого уклонения (т. е. уклонения по отношению к некоторым окрестностям $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$).

10. Некоторые топологические свойства и вопросы потенциальной реализуемости процедур уклонения

Рассмотрим некоторые следствия построений [12, теорема 10.2], связанные с вопросом о потенциальной реализуемости процедур уклонения, рассматриваемых в разд. 8. В связи с определениями разд. 7 отметим важную роль (7.5), где, в частности, оговаривается правило выбора моментов коррекции управлений игрока II (см. также (7.6)). Речь идет о селекции упомянутых моментов из множеств — значений неупреждающих мультифункционалов. Реально такая селекция предусматривает достаточную оперативность выбора моментов коррекции, а сам же конструктивный вариант выбора при этом не оговаривается. В построениях разд. 8

указан (см. (8.8)) более понятный тип процедуры: коррекцию предлагается осуществлять (см. определение 8.2) по мере наступления события, связанного с выталкиванием траектории из множества, определяемого нужной итерацией на основе оператора стабильности. Само же выталкивание обеспечивается (см. (8.3)) позиционной стратегией $\mathbf{V}_\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, но момент его наступления зависит от реализации помехи и, в общем случае, не может быть указан заранее (в момент предыдущей коррекции). Возможность конкретного применения стратегии коррекции (8.8) можно на гипотетическом уровне связать с ненулевой временной протяженностью события, связанного с выталкиванием. Надо отметить здесь, что реализация (строгого) уклонения может осуществиться и “раньше”, чем будут выполнены все существенные в упомянутом смысле коррекции. Тогда “правильная” реализация оставшихся после фактического осуществления уклонения коррекций уже не представляет интереса, так как цель игрока II уже достигнута. Такой взгляд на вещи излагается ниже. Прежде всего напомним (см. (2.1)), что при $N \in \mathfrak{F}$ в виде $\mathbf{t}|_N = \{N \cap G \colon G \in \mathbf{t}\}$ имеем топологию N, а в виде $\mathcal{F}|_N$ — семейство всех п/м N, замкнутых в ТП $(N, \mathbf{t}|_N)$; последнее является п/п $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$. Если $N \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}|_N \subset \mathcal{F}$. С учетом [12, лемма 10.1] имеем, что $\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F}|_N \ \forall M \in \mathcal{F} \ \forall N \in \mathfrak{F} \ \forall F \in \mathcal{F}|_N$ (доказательство подобно [21, предложение 7.1]). Рассуждением по индукции получаем, что

$$\mathcal{W}_k(M, N) \in \mathcal{F}|_N \qquad \forall M \in \mathcal{F} \qquad \forall N \in \mathfrak{F} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_o. \tag{10.1}$$

Из (10.1) по свойствам замкнутых множеств имеем, что $\mathcal{W}(M, N) \in \mathcal{F}|_N \ \forall M \in \mathcal{F} \ \forall N \in \mathfrak{F}$.

Предложение 10.1. *Если* $N \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathcal{F}|_N$ *и* $(t_*, x_*) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus F$, *то*

$$\big((t_*, x_*) \notin N\big) \vee \big(\exists\, \delta \in]0, \infty[\colon \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho((t, x), (t_*, x_*)) < \delta\} \cap F = \varnothing\big).$$

Доказательство очевидно (см. (2.1) и определение $\mathcal{F}$). Также очевидно

Следствие 10.1. *Если* $N \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathcal{F}|_N$, $t_* \in T$, $\mathbf{x} \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, $t^* \in [t_*, \vartheta_o]$ *и* $(t^*, \mathbf{x}(t^*)) \in N \setminus F$, *то*

$$\exists\, \kappa \in]0, \infty[\colon (t, \mathbf{x}(t)) \notin F \qquad \forall\, t \in]t^* - \kappa, t^* + \kappa[\cap [t_*, \vartheta_o].$$

Предложение 10.2. *Если* $t \in [t_o, \vartheta_o[$, $\Gamma \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$, $\Lambda \in \mathbf{t}|_N$ *и* $\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; \Lambda]$, *то*

$$\exists\, a \in [t, \vartheta_o] \qquad \exists\, b \in]a, \vartheta_o] \colon]a, b[\subset \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\}.$$

Доказательство. Фиксируем t, Γ, N, Λ и $\mathbf{x}$ в соответствии с условиями предложения. Из (8.4) следует по выбору $\mathbf{x}$, что для некоторого $\vartheta^o \in [t, \vartheta_o]$

$$((\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in \Lambda) \,\&\, ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta^o]). \tag{10.2}$$

Отметим, что в силу первого положения в (10.2) $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in N$ (действительно, $\Lambda \subset N$). Поскольку $\Lambda \subset (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)$, из (10.2) вытекает включение $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)$. Поэтому (см. (8.4), (10.2)) $\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)]$. Как следствие (см. (8.5))

$$\begin{gathered}\theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \\ = \{\vartheta \in [t, \vartheta_o] \mid ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)) \,\&\, ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta])\}.\end{gathered} \tag{10.3}$$

Из (10.2) следует, что $\vartheta^o \in [t, \vartheta_o]$ обладает свойствами

$$((\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)) \,\&\, ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta^o]). \tag{10.4}$$

Поэтому (см. (10.3), (10.4)) $\vartheta^o \in \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x})$. Заметим, что согласно (10.2) $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in N \setminus (N \setminus \Lambda)$, где $N \setminus \Lambda \in \mathcal{F}|_N$. В силу следствия 10.1 для некоторого $\kappa \in]0, \infty[$

$$(\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin N \setminus \Lambda \qquad \forall\, \xi \in]\vartheta^o - \kappa, \vartheta^o + \kappa[\cap [t, \vartheta_o]. \tag{10.5}$$

Кроме того, в силу (10.4) $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \notin \Gamma$ и, поскольку $\Gamma \in \mathcal{F}$, для некоторого $\bar\kappa \in]0,\infty[$ $(\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \ \forall \xi \in]\vartheta^o - \bar\kappa, \vartheta^o + \bar\kappa[\cap [t, \vartheta_o]$. При $\hat\kappa \triangleq \inf(\{\kappa, \bar\kappa\}) \in]0,\infty[$ имеем в силу (10.5), что $\forall \xi \in]\vartheta^o - \hat\kappa, \vartheta^o + \hat\kappa[\cap [t, \vartheta_o] \ \ ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)) \,\&\, ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma)$. Пусть $\alpha \triangleq \sup(\{t; \vartheta^o - \hat\kappa\}$ и $\beta \triangleq \inf(\{\vartheta^o + \hat\kappa; \vartheta_o\})$, тогда $\alpha \in [t, \vartheta_o]$ и $\beta \in]\alpha, \vartheta_o]$. Поэтому из (10.4) следует, что $((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda) \ \forall \vartheta \in]\alpha, \beta[) \,\&\, ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \ \forall \xi \in [t, \beta[)$. С учетом (10.3) и неравенства $\beta \leqslant \vartheta_o$ получаем, что $]\alpha, \beta[\subset \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_0\}$. $\square$

Следствие 10.2. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$, $t \in [t_o, \vartheta_o[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $x \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}\langle t\rangle$, $v \in \mathbb{V}_\varepsilon(t, x)$ *и* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v)$, *то* $(\exists \vartheta \in [t, \vartheta_o] \colon ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)) \,\&\, ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta])) \vee (\exists a \in [t, \vartheta_o[\ \exists b \in]a, \vartheta_o] \colon]a, b[\subset \tilde\theta_t^{(\varepsilon)}(x)(\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предложений 6.1 и 10.2 с учетом определения 8.2.

Напомним определения разд. 7, 8, фиксируя $\varepsilon \in]0,\infty[$. Рассмотрим на содержательном уровне реализацию совокупного воздействия позиционной стратегии $\mathbf{V}_\varepsilon$ и стратегии коррекции $\tilde\theta^{(\varepsilon)}[t_*]$ на одном отдельно взятом этапе построения траектории; здесь t_* отвечает "началу" формируемой траектории. Полагаем, что данное воздействие отвечает уже сформировавшемуся моменту $t^* \in [t_*, \vartheta_o[$ на траектории $\bar{\mathbf{x}}$, развивающейся из позиции (t_*, x_*), где $x_* \in \mathbb{R}^n$. Тогда реализуется управление $v^* \in \mathbf{V}_\varepsilon(t^*, \bar{\mathbf{x}}(t^*))$, которое вместе с помехой определяет продолжение $\mathbf{x} \colon [t^*, \vartheta_o] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ получившейся к данному моменту траектории. Стратегия коррекции реагирует на это продолжение множеством $\tilde\theta_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$. Для нас интересен случай $\bar{\mathbf{x}}(t^*) \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}\langle t^*\rangle$, где $r \in \overline{1, s}$ (s определяет ограничение на число переключений). В этих условиях действие v^* сводится к выталкиванию всех траекторий пучка $\mathcal{X}_\Pi(t^*, \bar{\mathbf{x}}(t^*), v^*)$ из множества $W_{r-1}^{(\varepsilon)}$ до встречи с $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$. Моменты времени из $\tilde\theta_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$ соответствуют в силу свойства, подобного (7.1), упомянутому выталкиванию реализующейся траектории из пучка (см. определение 8.2). Согласно следствию 10.2, если не происходит выхода из $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)$ до попадания на множество $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$, то множество $\tilde\theta_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$ содержит интервал ненулевой длины. Это касается v-траекторий, где $v = v^*$, но свойство неупреждаемости мультифункционала $\tilde\theta_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))$ позволяет применить упомянутое положение к анализу траектории, порожденной соответствующей стратегией-тройкой (данная траектория является склейкой v-траекторий). Это обстоятельство позволяет принципиально зафиксировать осуществление выталкивания (на промежутке положительной длины) и осуществить новую коррекцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
4. **Ченцов А. Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
5. **Ченцов А. Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
6. **Чистяков С. В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
7. **Ухоботов В. И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
8. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНИТИ, № 1933-79. Свердловск, 1979. 102 с.
9. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 286 с.
10. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.

11. **Ченцов А. Г.** О задаче управления с ограниченным числом переключений / УПИ им. С. М. Кирова. Деп. в ВИНИТИ, № 4942-В87. Свердловск, 1987. 44 с.
12. **Ченцов А. Г.** О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, 2 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНИТИ, № 5406-80. Свердловск, 1980. 55 с.
13. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
14. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
15. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
16. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.
17. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
18. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
19. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 389 с.
20. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
21. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321.

Ченцов Александр Георгиевич
Поступила 21.12.2016
чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games.* New York: John Wiley and Sons, 1965, 408 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow, Mir Publ., 1967, 480 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamic system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of converging. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian).
5. Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Sov. Math. Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
6. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 41, pp. 845–852.
7. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354.
8. Chentsov A.G. *Metod programmnykh iteratsii dlya differentsial'noi igry sblizheniya-ukloneniya* [The method of program iterations for a differential approach-evasion game]. Sverdlovsk, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Scientific Center of the USSR Academy of Sciences. Deponent VINITI, No. 1933-79, 1979, 102 p.
9. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of guarantee in control problems], Moscow, Nauka Publ., 1981, 286 p.
10. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965.
11. Chentsov A.G. *O zadache upravleniya s ogranichennym chislom pereklyuchenii* [On a control problem with a bounded number of switchings]. Sverdlovsk, Ural'skii Politekhnicheskii Institut Publ. Deponent VINITI, No. 4942-B87, 1987, 44 p.
12. Chentsov A.G. *O differentsial'nykh igrakh s ogranicheniem na chislo korrektsii, 2* [On differential games with restriction on the number of corrections, 2]. Sverdlovsk, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Scientific Center of the USSR Academy of Sciences, Deponent VINITI, No. 5406-80, 1980, 55 p.
13. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of approach-evasion. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 239, no. 4, pp. 779–782 (in Russian).

14. Kuratovski K., Mostovski A. *Set theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, Warszawa, PWN — Polish Scientific Publisher, 1967. 417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
15. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* New Yourk, London, Acad. Press, 1960, 361 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow, Mir Publ., 1964, 430 p.
16. Billingsley P. *Convergence of probability measures.* New York, Wiley, 1968, 253 p. ISBN: 0471072427. Translated under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer*, Moscow, Nauka, 1977, 352 p.
17. Dunford N.J., Schwartz J.T. *Linear operators. Part I: general theory.* New York-London, Interscience Publ. 1958. 874 p. ISBN: 0470226056. Translated under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* M.: Izd-vo Inostr. Lit., 1962, 895 p.
18. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p.
19. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery. I.* [Elements of finitely additive measure theory. I]. Ekaterinburg, Ural State Technical University, 2008, 389 p.
20. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability.* San Francisco, Holden-Day, 1965, 223 p. Translated under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei*, Moscow, Mir, 1969, 309 p.
21. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 304–321 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321 .

The paper was received by the Editorial Office on December 21, 2016.

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .