ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.928.1

ВОЗМУЩЕНИЕ ВОЛНОВОДА УЗКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

И. Х. Хуснуллин

Исследована краевая задача в полосе с граничным условием Фурье, моделирующая волновод, возмущенный узким комплексным потенциалом с большой интенсивностью. Потенциал зависит от малого и большого параметров. Малый параметр соответствует диаметру носителя потенциала, большой — его максимальному значению, а их произведение стремится к нулю. Задача соответствует математическим моделям квантовый и акустический волноводов. В такой постановке задача отличается от ранее исследованных тем, что на соотношение параметров наложены более слабые ограничения, на границе полосы заданы условия Фурье. Основным содержанием работы является построение специального преобразования, который переводит исходный оператор к оператору с малым локализованным возмущением. При этом данное преобразование не меняет спектр исходного оператора. Получено условие на потенциал, при которых из края непрерывного спектра возникает собственное значение, а так же условие отсутствия такого собственного значения. В случае возникновения, построены главные члены его асимптотики. Полученные результаты сформулированы в виде теоремы.

Ключевые слова: возмущение, волновод, собственное значение.

I. Kh. Khusnullin. Perturbation of a waveguide by a narrow potential.

We study a boundary value problem in a band with Fourier boundary condition. The problem models a waveguide perturbed by a narrow complex potential of large intensity. The potential depends on a small parameter and a large parameter. The small parameter corresponds to the diameter of the support of the potential, and the large parameter corresponds to the maximum value of the potential. The product of the parameters tends to zero. The problem corresponds to mathematical models of a quantum waveguide and an acoustic waveguide. In this statement, in contrast to the statements considered earlier, a weaker constraint is imposed on the ratio of the parameters and the Fourier conditions are given at the boundary of the band. The main content of this paper is the construction of a special transform that takes the original operator to an operator with a small localized perturbation; the transform preserves the spectrum of the operator. We obtain a condition on the potential under which an eigenvalue appears from the edge of the continuous spectrum; in this case, we find the leading terms of the asymptotics of the eigenvalue. We also obtain a condition for the absence of such an eigenvalue. The results are formulated in a theorem.

Keywords: perturbation, waveguide, eigenvalue.

MSC: 34E10, 76M45, 81Q15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-274-284

Посвящается Рустему Рашитовичу Гадыльшину

Введение

Хорошо известно, что при возмущении квантового волновода из края непрерывного спектра может возникать собственное значение. В частности, для слабо изогнутых волноводов в [1; 2] было доказано существование такого собственного значения, а в [3] была сосчитана его асимптотика. В [3] также были приведены условия, при которых из края непрерывного спектра возникает собственное значение при возмущении квантового волновода малым потенциалом, и построена его асимптотика.

В [4] был предложен метод, который позволил получить необходимые и достаточные условия возникновения собственных значений для волноводов при достаточно произвольных малых локализованных возмущениях. В случае возникновения собственных значений были по-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00066 мол-а) и частично гранта Республики Башкортостан молодым ученым и молодежным научным коллективам (договор № 4).

строены их асимптотики. В [5] этот подход был применен к квантовому волноводу с потенциалом, носитель которого сжимается в точку, а значение самого потенциала неограниченно растет при стремлении к нулю малого параметра, характеризующего возмущение.

В [6; 7] на основе методов, предложенных в [8; 9] соответственно, были рассмотрены двухпараметрические возмущения операторов Шредингера и Хилла на оси. Получены условия на возмущения, при которых из края непрерывного спектра возникают собственные значения. В [10] на основе подхода, предложенного в [11], результаты, полученные в [6], были обобщены на более широкий класс параметров.

В [12] рассмотрено достаточно произвольное малое локализованное возмущение волноводов с различными типами граничных условий. Развит подход, предложенный при подобном возмущении в [8; 9] для операторов Шредингера и Хилла на оси и в [4] для квантового волновода. Однако в отличие от [4], где исследовался только эффект возникновения собственных значений из непрерывного спектра, в [12] изучается и качественная структура спектра возмущенного оператора.

Новизна данной работы состоит в том, что на соотношение параметров возмущения накладываются более слабые ограничения и задаются граничные условия Фурье. Содержание работы следующее. На основе подхода, предложенного в [11], строится преобразование, которое переводит исходный оператор к оператору с малым локализованным возмущением, но при этом не меняет спектр. Далее, к новому оператору применяются результаты, полученные в [12].

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Всюду далее Ω — интервал $(0,\pi)$, $\Pi := (-\infty,\infty)\times\Omega$, $L_2(G)$ — множество квадратично интегрируемых по Лебегу в G функций, а $H^n(G)$ — пространства Соболева.

Через $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$ (через $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$) обозначим оператор $(-\Delta)$, определенный на функциях из $H^2(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $u(x_1,0)=0$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\alpha u\right)\Big|_{x_2=\pi}=0$ $\Big($граничным условиям $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}-\alpha u\right)\Big|_{x_2=0}=0$, $u(x_1,\pi)=0\Big)$, где $\alpha\geqslant 0$. Хорошо известно (см., например [13]), что определенные таким образом операторы $\mathcal{H}_0(\cdot)$ являются самосопряженными операторами в $L_2(\Pi)$ и соответствуют математическим моделям волноводов.

Следуя работе [13], непрерывный спектр $\sigma_c(\mathcal{H})$ оператора $\mathcal{H}$ определим в терминах характеристических последовательностей. Точечным спектром $\sigma_p(\mathcal{H})$ назовем множество собственных значений оператора $\mathcal{H}$. Через $\sigma_r(\mathcal{H}) := \sigma(\mathcal{H})\backslash(\sigma_c(\mathcal{H})\cup\sigma_p(\mathcal{H}))$ обозначим остаточный спектр оператора.

Известно (см., например, [13]), что для операторов $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$, $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$ справедливы равенства

$$\sigma(\mathcal{H}_0(\cdot))=\sigma_c(\mathcal{H}_0(\cdot))=[\mu_1(\cdot),\infty),\quad \sigma_p(\mathcal{H}_0(\cdot))=\varnothing,$$

где $\mu_1(\cdot)$ — минимальное собственное значение для оператора $-\,\Delta' := -d^2/dx_2^2$, определенного на функциях из $H^2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям $u(0)=0, u'(\pi)+\alpha u(\pi)=0$ (для $\mu_1(\cdot)=\mu_1(\mathcal{D})$) и $u'(0)-\alpha u(0)=0, u(\pi)=0$ (для $\mu_1(\cdot)=\mu_1(\mathcal{F})$).

Пусть $0\le\mu_1<\mu_2<\ldots$ — собственные значения оператора $\mathfrak{h}(\cdot)$, n_j — кратность собственного значения μ_j, $\{\phi_{j,i}(x_2)\}_{i=1}^{n_j}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции.

Обозначим $\langle g\rangle := \displaystyle\int_\Pi g(t)dt$.

Функции $\phi_{j,i}(x)$ будем считать определенными на Π следующим образом: $\phi_{j,i}(x)$ равны $\phi_{j,i}(x_2)$ при любом x_1.

Обозначим $Q := (a,b)\times\Omega$, где (a,b) — конечный интервал. В [12] был рассмотрен оператор

$$\mathcal{H}_0(\cdot)-\varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon,$$

где $\{\mathcal{L}_\varepsilon\}$ — семейство линейных отображений $H^2_{\rm loc}(\Pi)$ в $L_2(\Pi;Q)$ таких, что

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon u\|_{L_2(Q)} \le C(\mathcal{L})\|u\|_{H^2(Q)}, \tag{1.1}$$

где постоянная $C(\mathcal{L})$ не зависит от ε, $H^2_{\rm loc}(\Pi)$ — множество функций, определенных в Π и таких, что сужение их на любую ограниченную область $M \subset \Pi$ принадлежит $H^2(M)$, $L_2(\Pi;M)$ — подмножество функций из $L_2(\Pi)$ с носителями из $\overline{M}$. Отображение $\mathcal{L}_\varepsilon$ является неограниченным оператором в $L_2(\Pi)$ с областью определения $H^2_{\rm loc}(\Pi)$.

Пусть $V(x)$ — комплекснозначная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, параметры $0<\mu,\varepsilon \ll 1$ удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon\mu^{-1} = o(1). \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что Q содержит начало координат и $\mathrm{supp} V(x) \subset Q$.

В $L_2(\Pi)$ на областях определения операторов $\mathcal{H}_0(\cdot)$ определим операторы $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ как

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot) := \mathcal{H}_0(\cdot) + \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{1.3}$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть выполнено условие* (1.2). *Тогда если*

$$\mathrm{Re}\langle V\rangle < 0, \tag{1.4}$$

то существует единственное и простое собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\mu}$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$, стремящегося к μ_1 при $\varepsilon \to 0$. Его асимптотика имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon,\mu} = \mu_1 - \frac{1}{4}(\varepsilon^2\mu^{-1})^2\left(\phi^2_{1,1}(0)\langle V\rangle\right)^2 + O\left(\varepsilon^5\mu^{-2} + \varepsilon^6\mu^{-3}|\ln\varepsilon|^2\right). \tag{1.5}$$

Если

$$\mathrm{Re}\langle V\rangle > 0, \tag{1.6}$$

то оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ не имеет собственных значений, стремящихся к μ_1 при $\varepsilon \to 0$.

2. Вспомогательные утверждения

Далее, мы следуем подходу, предложенному в [11]. Обозначим через $W(\xi)$ решение уравнения

$$\Delta_\xi W(\xi) = V(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

определяемое формулой

$$W(\xi) = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} E(\xi - z)V(z)dz, \tag{2.2}$$

где

$$E(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x| \tag{2.3}$$

— фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$. Через $\chi(x)$ обозначим бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную единице в окрестности начала координат и нулю — вне большей окрестности. Большую окрестность будем предполагать достаточно малой.

Положим

$$\varphi_{\varepsilon,\mu}(x) = 1 + \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{2.4}$$

где

$$W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{|\ln\varepsilon|}W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{2.5}$$

Оператор умножения на функцию $\varphi_{\varepsilon,\mu}(x)$ обозначим через $U_{\varepsilon,\mu}$:

$$U_{\varepsilon,\mu}[v] := \varphi_{\varepsilon,\mu}(x)v. \tag{2.6}$$

Собственные значения оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ совпадают с собственными значениями оператора $U^{-1}_{\varepsilon,\mu}\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu}$ (см. [11]).

Лемма 1. *Для функций* $W_1\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ *при* $\varepsilon\to 0$ *и* $W(x)$ *при* $x\in Q$ *справедливы равенства*

$$W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) = -\frac{\langle V\rangle}{2\pi} + O\Big(\frac{1}{|\ln\varepsilon|}\Big), \quad x\in Q, \tag{2.7}$$

$$\Big\|W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{C(Q)} \le C_{3,Q}, \tag{2.8}$$

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{C(Q)} \le C_{1,Q}, \quad i=1,2, \tag{2.9}$$

$$\Big\|W(x)\Big\|_{C(Q)} \le C_{2,Q}, \tag{2.10}$$

где постоянные $C_{1,Q}, C_{2,Q}, C_{3,Q}$ *зависят только от* Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [14, лемма 4.6] было показано, что функция $W(x)$ имеет при $|x|\to\infty$ дифференцируемую асимптотику

$$W(x) = \frac{\langle V\rangle}{2\pi}\ln|x| + C_{1,1}\frac{x_1}{|x|^2} + C_{1,2}\frac{x_2}{|x|^2} + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i(x)|x|^{-2i},$$

где $C_{1,1}, C_{1,2}$ — постоянные, $Y_i(x)$ — однородные гармонические полиномы порядка i. Из (2.5) и последнего равенства при $|x|\varepsilon^{-1}\to\infty$ последовательно получаем

$$\begin{aligned}
W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) &= -\frac{\langle V\rangle}{2\pi} + \frac{1}{|\ln\varepsilon|}\frac{\langle V\rangle}{2\pi}\ln|x| - \frac{\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\Big(C_{1,1}\frac{x_1}{|x|^2} + C_{1,2}\frac{x_2}{|x|^2}\Big) + O\Big(\frac{\varepsilon^2}{|\ln\varepsilon|}\Big), \qquad x\in Q,\\
\frac{\partial}{\partial x_1}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) &= \frac{1}{|\ln\varepsilon|}\frac{\langle V\rangle x_1}{2\pi|x|^2} - \frac{\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\Big(C_{1,1}\Big(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_1^2}{|x|^4}\Big) - 2C_{1,2}\frac{x_1x_2}{|x|^4}\Big) + O\Big(\frac{\varepsilon^2}{|\ln\varepsilon|}\Big), \qquad x\in Q,\\
\frac{\partial}{\partial x_2}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) &= \frac{1}{|\ln\varepsilon|}\frac{\langle V\rangle x_2}{2\pi|x|^2} - \frac{\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\Big(C_{1,2}\Big(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_2^2}{|x|^4}\Big) - 2C_{1,1}\frac{x_1x_2}{|x|^4}\Big) + O\Big(\frac{\varepsilon^2}{|\ln\varepsilon|}\Big), \qquad x\in Q.
\end{aligned}$$

Из последних равенств вытекают оценки (2.7)–(2.9).

Далее, из (2.2) и (2.3) получаем оценку

$$\|W(x)|_{C(Q)} = \frac{1}{2\pi}\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln|x-z|V(z)dz\Big\|_{C(Q)} = \frac{1}{2\pi}\Big\|\int\limits_{Q}\ln|x-z|V(z)dz\Big\|_{C(Q)}$$

$$\le C_V\Big\|\int\limits_{Q}dz\Big\|_{C(Q)} = C_{2,Q}.$$

Неравенство (2.10) доказано. Лемма 1 доказана.

Далее везде C_i — некоторые константы, не зависящие от ε,μ.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (1.2), *тогда для оператора* $U_{\varepsilon,\mu}$ *справедливы оценки*

$$\big|U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1]\big| \le C_1, \quad x\in Q, \tag{2.11}$$

$$U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1] = 1 + O\left(\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\right), \quad x\in Q. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.4) и (2.6) следует

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1]=\frac{1}{\varphi_{\varepsilon,\mu}(x)}=\frac{1}{1+\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}.$$

В силу (2.7) из последнего равенства вытекает

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1]=\frac{1}{1+q}, \tag{2.13}$$

где $q=-\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\dfrac{\langle V\rangle}{2\pi}\chi(x)+O(\varepsilon^2\mu^{-1})$, $x\in Q$. Из (2.13) и оценки $|q|\le C_q\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|$, $x\in Q$, следует

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1]=1+O(q)=1+O\left(\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\right).$$

Оценка (2.12) доказана. Неравенство (2.11) непосредственно вытекает из (2.12). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (1.2), *тогда*

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu}=\mathcal{H}_0(\cdot)-\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}, \tag{2.14}$$

где $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ *— дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными финитными коэффициентами, удовлетворяющий оценке*

$$\|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}u\|_{L_2(Q)}\le C_2\|u\|_{H^2(Q)}. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.3), (2.4)–(2.6) следует

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu}=\Big(\mathcal{H}_0(\cdot)+\mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big)\Big[1+\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big]$$

$$=\mathcal{H}_0(\cdot)[1]+\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\mathcal{H}_0(\cdot)\Big[\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big]+\mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^2\mu^{-2}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

В силу определения оператора $\mathcal{H}_0(\cdot)$ имеем

$$\mathcal{H}_0(\cdot)\Big[\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big]=-W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Delta_x[\chi(x)]-\chi(x)\Delta_x\Big[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big]+\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathcal{H}_0(\cdot)[1]$$

$$-2\sum_{i=1}^{2}\Big(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big).$$

Из последних двух равенств следует

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu}=\mathcal{H}_0(\cdot)[1]+\mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^2\mu^{-2}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$-\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Delta_x[\chi(x)]-\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)\Delta_x\Big[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big]+\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathcal{H}_0(\cdot)[1]$$

$$-2\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\sum_{i=1}^{2}\Big(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big). \tag{2.16}$$

Пусть $\xi=x\varepsilon^{-1}$, тогда в силу уравнения (2.1) и равенства (2.5) последовательно получаем, что

$$\mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)\Delta_x\Big[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big]=\mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)\Delta_\xi W_1(\xi)$$

$$=\mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\mu^{-1}\chi(x)\Delta_\xi W(\xi)=\mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\mu^{-1}\chi(x)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=0.$$

Из (2.16) с учетом последнего равенства вытекает

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu} = \mathcal{H}_0(\cdot)[1] + \varepsilon^2\mu^{-2}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

$$-\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)] + \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\mathcal{H}_0(\cdot)[1]$$

$$-2\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\sum_{i=1}^{2}\Big(W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big).$$

В свою очередь из этого равенства и (2.4)–(2.6) следует

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu} = U_{\varepsilon,\mu}\mathcal{H}_0(\cdot)[1] + \varepsilon^2\mu^{-2}|\ln\varepsilon|\chi(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) - \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)]$$

$$-2\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|\sum_{i=1}^{2}\bigg(W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg).$$

Из последнего равенства вытекает равенство (2.14), где

$$\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} = -U_{\varepsilon,\mu}^{-1}\mu^{-1}\chi(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + U_{\varepsilon,\mu}^{-1}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)]$$

$$+2U_{\varepsilon,\mu}^{-1}\sum_{i=1}^{2}\Big(W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big). \tag{2.17}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ удовлетворяет оценке (2.15). Из (2.17) и оценки (2.11) получаем оценку

$$\|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}u\|_{L_2(Q)} \le C_1\mu^{-1}\Big\|\chi(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(Q)} + C_1\Big\|W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)]u\Big\|_{L_2(Q)}$$

$$+2C_1\sum_{i=1}^{2}\Big\|W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(Q)} + 2C_1\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(Q)}$$

$$+2C_1\sum_{i=1}^{2}\Big\|\chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(Q)}. \tag{2.18}$$

Из определения функции $\chi(x)$ и оценки (2.8) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}\Big\|W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)]u\Big\|_{L_2(Q)} &\le C_3\|u\|_{L_2(Q)} \le C_3\|u\|_{H^2(Q)},\\ \sum_{i=1}^{2}\Big\|W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(Q)} &\le C_4\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(Q)} \le 2C_4\|u\|_{H^2(Q)}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

В [5] было доказано, что для любой функции u из $H^2(Q)$ справедливо неравенство (лемма 3.1)

$$\int\limits_{\varepsilon Q}|u|^2dx \le C_5\varepsilon^2|\ln\varepsilon|\,\|u\|^2_{H^2(Q)},$$

где εQ — сжатие множества Q в ε^{-1} раз.

Из (1.2), (2.5), (2.10) в силу последнего неравенства последовательно выводим оценку

$$\mu^{-1}\Big\|\chi(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(Q)} = \frac{\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}\Big\|W\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(\varepsilon Q)}$$

$$\le \frac{\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}\Big\|W\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{C(\varepsilon Q)}\Big\|V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(Q)} = \frac{\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}\Big\|W\Big(x\Big)\Big\|_{C(Q)}\Big\|V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(Q)}$$

$$\le C_{2,Q}\frac{\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}\Big\|V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(\varepsilon Q)} \le C_6\frac{\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}\|u\|_{L_2(\varepsilon Q)} \le C_7\frac{\mu^{-1}\varepsilon}{\sqrt{|\ln\varepsilon|}}\|u\|_{H^2(Q)} \le C_8\|u\|_{H^2(Q)}. \qquad (2.20)$$

Далее, в силу оценки (2.9) и определения функции χ получаем следующие оценки:

$$\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_{L_2(Q)} \le C_{1,Q}\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial\chi}{\partial x_i}u\Big\|_{L_2(Q)} \le C_9\|u\|_{L_2(Q)} \le C_{10}\|u\|_{H^2(Q)}, \qquad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\Big\|\chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(Q)} \le C_{1,Q}\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(Q)} \le 2C_{1,Q}\|u\|_{H^2(Q)}. \qquad (2.22)$$

Из (2.18)–(2.22) вытекает неравенство (2.15). Лемма 3 доказана.

3. Доказательство теоремы

Из леммы 3 следует, что оператор $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ удовлетворяет неравенству (1.1). В качестве малого параметра в силу (1.2) примем параметр $\varepsilon_1 := \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln\varepsilon|$.

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu} := -\mu^{-1}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)]$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{2}\Big(W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big). \qquad (3.1)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\phi_{1,1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1} = -\mu^{-1}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x) + W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x)$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{2}\Big\{\phi_{1,1}(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i} + \phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] + \chi(x)\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i}\Big\},$$

$$\langle\phi_{1,1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle = -\mu^{-1}\int\limits_{\Pi}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x)dx + \int\limits_{\Pi}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x)dx$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Pi}\Big\{\phi_{1,1}(x)W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i} + \phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]$$

$$+ \chi(x)\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i}\Big\}dx. \qquad (3.2)$$

С учетом равенства

$$\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] + \chi(x)\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i}$$

$$= \phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\Big(\phi_{1,1}(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i} + \chi(x)\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i}\Big) = \phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]$$

из (3.2) следует, что

$$\langle\phi_{1,1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle = -\mu^{-1}\int\limits_{\Pi}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x)dx$$

$$+\int\limits_{\Pi} W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\{\Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x)+2\sum_{i=1}^{2}\phi_{1,1}(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i}\Big\}dx$$

$$+2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Pi}\Big\{\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}(x)\chi(x)\Big]\Big\}\,dx.$$

А в свою очередь из равенства

$$\Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x)+2\sum_{i=1}^{2}\phi_{1,1}(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i}=\Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\phi_{1,1}^2(x)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\Big]$$

следует, что

$$\langle\phi_{1,1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle=-\mu^{-1}\int\limits_{\Pi}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x)dx+\int\limits_{\Pi}\sum_{i=1}^{2}\Big\{W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\Big]$$

$$+2\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\phi_{1,1}(x)\chi(x)\right]\Big\}\,dx. \tag{3.3}$$

В силу определения функции χ, интегрируя по частям, из последнего равенства последовательно получаем

$$\int\limits_{\Pi}\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]\,dx=\int\limits_{Q}\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]\,dx$$

$$=-\int\limits_{Q}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]\Big]dx=-\int\limits_{\Pi}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]\Big]dx.$$

С учетом последнего равенства формула (3.3) примет вид

$$\langle\phi_{1,1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle=-\mu^{-1}\int\limits_{\Pi}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x)dx$$

$$+\int\limits_{\Pi}\sum_{i=1}^{2}W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\Big]-2\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]\Big]\Big\}dx. \tag{3.4}$$

Далее, из (3.4) и равенства

$$\sum_{i=1}^{2}\Big\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\Big]-2\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]\Big]\Big\}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}-2\phi_{1,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}(x)\chi(x)]\Big\}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{-\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}-2\chi(x)\phi_{1,1}(x)\frac{\partial\phi_{1,1}}{\partial x_i}\Big\}$$

$$=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\phi_{1,1}^2(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}+\chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}^2(x)]\Big\}$$

$$=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)]\Big]=-\triangle_x[\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)]$$

вытекает равенство

$$\langle \phi_{1,1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle = -\,\mu^{-1}\int\limits_{\Pi} W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x)dx - \int\limits_{\Pi} W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\triangle_x\big[\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)\big]dx. \tag{3.5}$$

Интегрируя по частям два раза, в силу определения функции χ и (2.1), (2.5) последовательно получаем

$$\int\limits_{\Pi} W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\triangle_x\big[\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)\big]dx = \int\limits_{Q} W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\triangle_x\big[\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)\big]dx$$

$$= -\int\limits_{Q}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\big[\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)\big]dx = \int\limits_{Q}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)dx$$

$$= \int\limits_{Q}\triangle_x\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)dx = \varepsilon^{-2}\int\limits_{Q}\triangle_\xi\Big[W_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)dx$$

$$= \frac{\varepsilon^{-2}}{|\ln\varepsilon|}\int\limits_{Q} V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)dx = \frac{\varepsilon^{-2}}{|\ln\varepsilon|}\int\limits_{Q} V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi_{1,1}^2(x)dx.$$

После разложения функции $\phi_{1,1}(x)$ в ряд и замены переменной выводим, что

$$\int\limits_{Q} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi_{1,1}^2(x)dx = \varepsilon^2\left(\phi_{1,1}(0)\right)^2\langle V\rangle + O\left(\varepsilon^3\right).$$

С учетом последнего равенства имеем

$$\int\limits_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\triangle_x\left[\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)\right]dx = \frac{1}{|\ln\varepsilon|}\left(\phi_{1,1}(0)\right)^2\langle V\rangle + O\Big(\frac{\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\Big). \tag{3.6}$$

Оценим первый интеграл в равенстве (3.5). В силу (2.10) последовательно получаем

$$\mu^{-1}\Big|\int\limits_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi_{1,1}^2(x)dx\Big| = \mu^{-1}\Big|\int\limits_{\varepsilon Q} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi_{1,1}^2(x)dx\Big|$$

$$\le \frac{\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}\Big\|W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big\|_{C(\varepsilon Q)}\Big\|V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big\|_{C(\varepsilon Q)}\|\phi_{1,1}^2(x)\|_{C(\varepsilon Q)}\Big|\int\limits_{\varepsilon Q}dx\Big|$$

$$= \frac{\varepsilon^2\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}\|W(x)\|_{C(Q)}\|V(x)\|_{C(Q)}\left\|\phi_{1,1}^2(x)\right\|_{C(\varepsilon Q)} \le \frac{\varepsilon^2\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}C_{11}\left\|\phi_{1,1}^2(x)\right\|_{C(Q)} = C_{12}\frac{\varepsilon^2\mu^{-1}}{|\ln\varepsilon|}.$$

Из последней оценки и (3.5), (3.6) следует равенство

$$\langle \phi_{1,1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle = -\frac{1}{|\ln\varepsilon|}\left(\phi_{1,1}(0)\right)^2\langle V\rangle + O\Big(\frac{\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\Big). \tag{3.7}$$

Далее, из (2.17), (3.1), (3.7) в силу (2.12) вытекает

$$\langle \phi_{1,1}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle = -\frac{1}{|\ln\varepsilon|}\left(\phi_{1,1}(0)\right)^2\langle V\rangle + O\Big(\frac{\varepsilon}{|\ln\varepsilon|} + \varepsilon^2\mu^{-1}\Big). \tag{3.8}$$

Из леммы 6.1 и следствия 5.2 работы [12] следует, что если

$$\mathrm{Re} k_{\varepsilon,\mu} > 0, \tag{3.9}$$

то $\lambda_{\varepsilon,\mu}$, определяемое равенством

$$\lambda_{\varepsilon,\mu} = \mu_1 - (k_{\varepsilon,\mu})^2, \tag{3.10}$$

является единственным и к тому же простым собственным значением оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$, где

$$k_{\varepsilon,\mu} = \varepsilon_1 \frac{1}{2}\langle \phi_{1,1}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle + \varepsilon_1^2 \frac{1}{2}\langle \phi_{1,1}T^{(1)}_{\varepsilon,\mu}(k)\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle + O(\varepsilon_1^3), \tag{3.11}$$

k — комплексный параметр, оператор $T^{(1)}_{\varepsilon,\mu}(k)$ является ограниченно-голоморфным оператором в $L_2(\Pi; Q)$.

Обозначим $K_1 := |\langle \phi_{1,1}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle|$, $\quad K_2 := \left|\langle \phi_{1,1}T^{(1)}_{\varepsilon,\mu}(k)\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle\right|$.

Из (3.8) следует, что

$$K_1 = O\Big(\frac{1}{|\ln\varepsilon|}\Big). \tag{3.12}$$

В силу определения оператора $T^{(1)}_{\varepsilon,\mu}(k)$ и неравенства (2.15) последовательно получаем оценку

$$\begin{aligned}\left|\langle \phi_{1,1}T^{(1)}_{\varepsilon,\mu}(k)\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\rangle\right| &\le \|\phi_{1,1}\|_{L_2(Q)} \left\|T^{(1)}_{\varepsilon,\mu}(k)\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\right\|_{L_2(Q)} \le C_\phi C_T \|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\phi_{1,1}\|_{L_2(Q)} \\ &\le C_\phi C_T C_2 \|\phi_{1,1}\|_{H^2(Q)} = C_{13}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$K_2 = O(1). \tag{3.13}$$

Пусть выполнено условие (1.2), тогда из (3.11) и оценок (3.12), (3.13) следует, что знак $\mathrm{Re}k_{\varepsilon,\mu}$ совпадает со знаком $-\mathrm{Re}\langle V\rangle$. Следовательно, из неравенства (3.9) следует, что достаточным условием существования единственного и простого собственного значения $\lambda_{\varepsilon,\mu}$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$, стремящегося к μ_1 при $\varepsilon \to 0$, является неравенство (1.4). Если верно неравенство (1.6), то такого собственного значения не существует.

Из равенств (3.8), (3.10), (3.11) и оценок(3.12), (3.13) вытекает асимптотика (1.5).

Теорема доказана.

Автор выражает признательность Д. И. Борисову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Exner P., Seba P.** Bound states in curved quantum waveguides // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30, no. 11. P. 2574–2580. doi: 10.1063/1.528538 .
2. **Exner P.** Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature // J. Math. Phys. 1993. Vol. 34, no. 1. P. 23–28. doi: 10.1063/1.530378 .
3. **Duclos P., Exner P.** Curvature–induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions // Rev. Math. Phys. 1995. Vol. 7, no. 1. P. 73–102. doi:10.1142/S0129055X95000062 .
4. **Гадыльшин Р.Р.** О локальных возмущениях квантовых волноводов // Теорет. и мат. физика. 2005. Vol. 145, № 3. С. 358–371. doi: 10.4213/tmf1905 .
5. **Bikmetov A., Gadyl'shin R.** On quantum waveguide with shrinking potential // Russian J. Math. Phys. 2010. Vol. 17, no. 1. P. 19–25. doi:10.1134/S1061920810010024 .
6. **Гадыльшин Р. Р., Хуснуллин И. Х.** Оператор Шредингера на оси с потенциалами, зависящими от двух параметров // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 6. С. 50–66.
7. **Гадыльшин Р. Р., Хуснуллин И. Х.** Возмущение периодического оператора узким потенциалом // Теорет. и мат. физика. 2012. Т. 173, № 1. С. 127–134. doi: 10.4213/tmf8324 .
8. **Гадыльшин Р.Р.** О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси // Теорет. и мат. физика. 2002. Т. 132, № 1. С. 97–104. doi: 10.4213/tmf349 .
9. **Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р.** О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением // Изв. РАН. Сер. математическая. 2008. Т. 72, № 4. С. 37–66. doi: 10.4213/im1146 .
10. **Бикметов А.Р., Вильданова В.Ф., Хуснуллин И. Х.** О возмущении оператора Шредингера на оси узкими потенциалами // Уфим. мат. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 25–33.

11. **Борисов Д.И., Шарапов Т.Р., Каримов Р.** Оценка начальных масштабов для волноводов с некоторыми случайными сингулярными потенциалами // Уфим. мат. журн. 2015. Т. 7, № 2. С. 35–56.
12. **Bikmetov A.R., Gadyl'shin R.R.** On local perturbations of waveguides // Russian J. Math. Phys. 2016. Vol. 23, no. 1. P. 1–19. doi: 10.1134/S1061920816010015 .
13. **Глазман И.М.** Прямые методы спектрального качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1963. 339 с.
14. **Бикметов А. Р., Гадыльшин Р. Р.** Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n-мерной области // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 28–64.

Хуснуллин Ильфат Хамзиевич Поступила 01.08.2016

канд. физ.-мат. наук,
ст. преподаватель
физ.-мат. факультет БГПУ им. М. Акмуллы, г. Уфа
e-mail: Khusnullinikh@mail.ru

REFERENCES

1. Exner P., Seba P. Bound states in curved quantum waveguides. *J. Math. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 11, pp. 2574–2580. doi: 10.1063/1.528538 .
2. Exner P. Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature. *J. Math. Phys.*, 1993, vol. 34, no. 1, pp. 23–28. doi: 10.1063/1.530378 .
3. Duclos P., Exner P. Curvature–induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. *Rev. Math. Phys.*, 1995, vol. 7, no. 1, pp. 73–102. doi:10.1142/S0129055X95000062 .
4. Gadylshin R.R. Local perturbations of quantum waveguides. *Theor. Math. Phys.*, 2005, vol. 145, iss. 3, pp. 1678–1690. doi: 10.1007/s11232-005-0190-y .
5. Bikmetov A., Gadyl'shin R. On quantum waveguide with shrinking potential. *Russian J. Math. Phys.*, 2010, vol. 17, no. 1, pp. 19–25. doi: 10.1134/S1061920810010024.
6. Gadylshin R.R., Khusnullin I. Kh. Schrodinger operator on the axis with potentials depending on two parameters. *St. Petersburg Math. J.*, 2011, vol. 22, no. 6, pp. 883–894. doi: 10.1090/S1061-0022-2011-01174-4 .
7. Gadylshin R.R., Khusnullin I. Kh. Perturbation of a periodic operator by a narrow potential. *Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 173, iss. 1, pp. 1438–1444. doi:10.1007/s11232-012-0124-4 .
8. Gadyl'shin R.R. Local perturbations of the Schrodinger operator on the axis. *Theor. Math. Phys.*, 2002, vol. 132, iss. 1. pp. 976–982. doi: 10.1023/A:1019615509634 .
9. Borisov D.I., Gadyl'shin R.R. On the spectrum of a periodic operator with a small localized perturbation. *Izvestiya: Mathematics*, 2008, vol. 72, no. 4, pp. 659–688. doi: 10.1070/IM2008v072n04ABEH002420 .
10. Bikmetov A.R., Vil'danova V.F., Khusnullin I.Kh. On perturbation of a Schrodinger operator on axis by narrow potentials. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 24–31. doi: 10.13108/2015-7-4-24 .
11. Borisov D.I., Karimov R.Kh., Sharapov T.F. Initial length scale estimate for waveguides with some random singular potentials. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 33–54. doi: 10.13108/2015-7-2-33 .
12. Bikmetov A.R., Gadyl'shin R.R. On local perturbations of waveguides. *Russian J. Math. Phys.*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 1–19. doi: 10.1134/S1061920816010015 .
13. Glazman I.M. *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators.* New York, Davey, 1965, 234 p. Original Russian text published in *Pryamye metody spektral'nogo kachestvennogo analiza singulyarnykh differentsial'nykh operatorov*, M.: Fizmatlit Publ., 1963, 339 p.
14. Bikmetov A.R., Gadyl'shin R.R. Perturbation of an elliptic operator by a narrow potential in an n-dimensional domain. *Ufimskii Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 28–64 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on August 1, 2016.

Il'fat Khamzievich Khusnullin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Bashkortostan, Ufa, 450000 Russian, e-mail: Khusnullinikh@mail.ru .