ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.968.4

О НЕТРИВИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРЫСОНА[1]

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, А. А. Сисакян

Статья посвящена изучению и решению одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на положительной полупрямой. Частные случаи рассматриваемых уравнений применяются в различных областях математической физики. Такие уравнения возникают, в частности, в кинетической теории газов, в теории переноса излучения и в p-адической математической физике. Предполагается, что сверточный оператор Гаммерштейна со степенной нелинейностью является минорантой в смысле М. А. Красносельского для исходного оператора Урысона. Доказывается теорема существования неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений. Более того, найден предел построенного решения в бесконечности. В одном частном случае установлена монотонность построенного решения. Доказательство основной теоремы носит конструктивный характер. Подход к доказательству теоремы основан на построении инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора Урысона. Приведены частные примеры рассматриваемых уравнений, представляющие самостоятельный интерес.

Ключевые слова: уравнение Урысона, условие Каратеодори, уравнение Вольтерра, итерация, монотонность, ограниченное решение.

Kh. A. Khachatryan, A. S. Petrosyan, A. A. Sisakyan. On the nontrivial solvability of one class of nonlinear integral equations of the Urysohn type.

This paper is devoted to the study and solution of one class of nonlinear integral equations of the Urysohn type on the positive half-line. Special cases of such equations are applied in various areas of mathematical physics. They appear, in particular, in kinetic gas theory, in radiative transfer theory, and in p-adic mathematical physics. It is assumed that the Hammerstein convolution operator with a power nonlinearity is a minorant in the Krasnoselskii sense for the Urysohn operator. We prove a theorem of existence of nonnegative nontrivial bounded solutions. In addition, we find the limit of the constructed solution at infinity. The monotonicity of the solution is established in a special case. The proof of the main theorem is of constructive nature. The proof is based on the construction of invariant conical segments for the corresponding nonlinear Urysohn operator. In the end of the paper, we give examples of equations of the described type that are of independent interest.

Keywords: Urysohn equation, Caratheodory condition, Volterra equation, iteration, monotonicity, bounded solution.

MSC: 47H30

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-266-273

1. Введение и формулировка основного результата

1.1. Введение

Работа посвящена исследованию класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона

$$f(x)=\int\limits_0^\infty U(x,t,f(t))dt, \quad x\in\mathbb{R}^+\equiv[0,+\infty), \tag{1}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $f(x)$. В уравнении (1) ядро Урысона $U(x,t,z)$ определено на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, принимает вещественные значения, удовлетворяет условию “критичности”:

$$U(x,t,0)\equiv 0 \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта No SCS 16YR-1A002.

и некоторым дополнительным условиям (см. формулировку теоремы).

Следует отметить, что различными частными случаями уравнения (1) описывается ряд задач в математической физике. В частности, такие уравнения возникают в кинетической теории газов, в p-адической теории струны, в теории переноса излучения (см. [1–3]).

История изучения и решения нелинейных интегральных уравнений началась в 1920-е годы с работы [4], где соответствующие нелинейные уравнения были рассмотрены на ограниченных множествах. В дальнейшем в работах М.А. Красносельского, Ф. Браудера, П. П. Забрейко, Н. Бобылева, Дж. Банаса эти уравнения были подробно и систематически исследованы (см. [5–7] и ссылки в них). Этими авторами разработан ряд интересных и эффективных методов построения неотрицательных (нетривиальных) решений для подобных уравнений.

Однако следует отметить, что классическая теория, как правило, ограничивается исследованием тех нелинейных уравнений, у которых соответствующие операторы являются компактными в рассматриваемых банаховых пространствах. В большинстве случаев сами уравнения исследуются на ограниченных множествах числовой прямой.

В недавних работах [8–10] проведены детальные и систематические исследования нелинейных уравнений вида (1) в случае, когда для соответствующего оператора Урысона линейной минорантой в смысле М.А. Красносельского служат различные модификации консервативного интегрального оператора Винера — Хопфа.

В настоящей статье в предположении, что сверточный оператор Гаммерштейна со степенной нелинейностью является минорантой для исходного оператора Урысона, доказано существование неотрицательного нетривиального и ограниченного решения уравнения (1). Более того, найден предел построенного решения в бесконечности. В конце работы приведены частные примеры уравнения (1), для которых выполняются все условия сформулированной теоремы.

1.2. Формулировка основного результата

Пусть функция $K(\tau)$ определена на множестве $\mathbb{R}$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j K(\tau)d\tau < +\infty, \quad j = 1, 2; \tag{3}$$

$$K(-x) = K(x), \quad x \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)d\tau = 1; \quad K(\tau) \downarrow \text{ по } \tau \text{ на } \mathbb{R}^+; \tag{4}$$

$$K(x) \geq 0, \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Пусть далее $\lambda(x)$ определена на $\mathbb{R}^+$ и обладает свойствами

$$0 \leq \lambda(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+; \quad x^j(1-\lambda(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \lambda \in C(\mathbb{R}^+), \quad j = 0, 1; \tag{6}$$

$$\lambda(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+ \text{ и } \lim_{x\to+\infty} \lambda(x) = 1. \tag{7}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть существуют числа $\xi > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что*

1) $U(x, t, z) \geq \lambda(x)(K(x-t) - K(x+t))z^\alpha \xi^{1-\alpha} \quad \forall (x, t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \xi] \equiv \Omega_\xi$;

2) *при каждом фиксированном* $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *функция* $U(x, t, z) \uparrow$ *по* z *на* $[0, \xi]$;

3) $\int_0^\infty U(x, t, \xi)dt \leq \xi \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$;

4) функция $U(x,t,z)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на множестве Ω_ξ, т. е. при каждом фиксированном $z \in [0,\xi]$ функция $U(x,t,z)$ измерима по $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и почти при всех $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ эта функция непрерывна по z на отрезке $[0,\xi]$;

5) для каждой измеримой функции $\varphi(t)\colon 0 \le \varphi(t) \le \xi$, $t \in \mathbb{R}^+$, функция $\int\limits_0^\infty U(x,t,\varphi(t))dt$ измерима по x.

Тогда уравнение (1) *имеет неотрицательное и нетривиальное решение $f(x)$, причем*

$$0 \le f(x) \le \xi, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \xi.$$

2. Доказательство теоремы и частные примеры

2.1. Доказательство теоремы

Проведем пошаговое доказательство.

Ш а г I. Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее однородное интегральное уравнение Вольтерра с переменным нижним пределом:

$$\psi(x) = \int\limits_x^\infty [v(t-x) - v(t+x)]\psi(t)dt, \quad x \ge 0, \tag{8}$$

относительно искомой функции $\psi(x)$, где

$$v(x) = 2K(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{9}$$

Нетрудно можно убедиться, что уравнение (8) обладает неотрицательным нетривиальным монотонно возрастающим непрерывным и ограниченным решением $\psi(x)$, которое зафиксируем для дальнейшего изложения (см. [11]).

Ш а г II. Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$\sigma(x) = \lambda(x) \int\limits_x^\infty [v(t-x) - v(t+x)]\sigma(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{10}$$

Ниже убедимся, что уравнение (10) обладает неотрицательным нетривиальным монотонно возрастающим непрерывным и ограниченным решением $\sigma(x)$.

С этой целью рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$\rho(x) = (1-\lambda(x))\psi(x) + \lambda(x) \int\limits_x^\infty [v(t-x) - v(t+x)]\rho(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что $\rho_1(x) = \psi(x)$ удовлетворяет уравнению (11).

Убедимся, что уравнение (11), кроме этого решения, обладает также неотрицательным суммируемым и ограниченным решением $\rho^*(x)$. Для этого сначала рассмотрим неоднородное интегральное уравнение типа свертки

$$Q(x) = (1-\lambda(x)) \sup_{x\ge 0} \psi(x) + \int\limits_x^\infty v(t-x)Q(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{12}$$

Из результатов работы [12, § 3, лемма 3.6] следует, что при условиях (3)–(7), (9) уравнение (12) имеет неотрицательное непрерывное суммируемое и ограниченное решение $Q(x)$.

Теперь для уравнения (11) рассмотрим простые итерации

$$\rho_{n+1}(x)=(1-\lambda(x))\psi(x)+\lambda(x)\int\limits_x^\infty[v(t-x)-v(t+x)]\rho_n(t)dt, \rho_0(x)\equiv 0,\ n=0,1,2,\dots,\ x\in\mathbb{R}^+.$$

Индукцией по n можно легко убедиться в достоверности следующих фактов:

a) $\rho_n\in C(\mathbb{R}^+),\ n=0,1,2,\dots;$

b) $\rho_n(x)\uparrow$ по n, $x\in\mathbb{R}^+$;

c) $\rho_n(x)\le Q(x),\ n=0,1,2,\dots,\ x\in\mathbb{R}^+$;

d) $\rho_n(x)\le\psi(x),\ n=0,1,2,\dots,\ x\in\mathbb{R}^+$.

Таким образом, последовательность непрерывных функций $\{\rho_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n(x)=\rho^*(x)$, причем предельная функция удовлетворяет уравнению (11) по теореме Б. Леви (см. [13, гл. 5, § 5, теорема 7]).

Из b) и c) следует также, что

$$(1-\lambda(x))\psi(x)\le\rho^*(x)\le Q(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Так как $Q\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то из (13) следует, что $\rho^*\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$. Поскольку свертка двух суммируемых и ограниченных функций — непрерывная функция, то с учетом того, что $\lambda,\psi\in C(\mathbb{R}^+)$, из (11) следует $\rho^*\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty(\mathbb{R}^+),\ \rho^*\in C(\mathbb{R}^+)$. Из d) вытекает также, что $\rho^*(x)\le\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^+$. Поскольку функции ρ^* и ψ имеют разные асимптотические поведения, то $\rho^*(x)\not\equiv\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^+$. Очевидно, что функция $\sigma(x)=\psi(x)-\rho^*(x)\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^+$, удовлетворяет уравнению (10) и обладает свойствами

$$\sigma(x)\ge 0,\quad \sigma(x)\not\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}^+,$$

$$\sigma\in L_\infty(\mathbb{R}^+)\cap C(\mathbb{R}^+).$$

Ш а г III. Докажем, что уравнение (10) обладает также монотонно возрастающим решением $\sigma^*(x):\sigma^*(x)\ge\sigma(x),\ x\in\mathbb{R}^+$. Для этого рассмотрим следующие итерации:

$$\sigma_{n+1}(x)=\lambda(x)\int\limits_x^\infty[v(t-x)-v(t+x)]\sigma_n(t)dt,\quad \sigma_0(x)=\sup_{x\ge 0}\sigma(x),\quad n=0,1,2,\dots .$$

Индукцией по n можно проверить, что

1) $\sigma_n(x)\downarrow$ по n;

2) $\sigma_n\in C(\mathbb{R}^+),\ n=0,1,2,\dots;$

3) $\sigma_n(x)\ge\sigma(x),\ n=0,1,2,\dots,x\in\mathbb{R}^+$;

4) $\sigma_n(x)\uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $n=0,1,2,\dots$.

Значит, последовательность функций $\{\sigma_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\sigma^*(x)$, причем

a) σ^* удовлетворяет уравнению (10) по теореме Б. Леви;

b) σ^* — непрерывная функция на $\mathbb{R}^+$ (доказывается аналогично, как при шаге II);

c) $\sigma^*(x)\uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$;

d) $\sigma^*(x)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\sigma(x)\le\sigma^*(x)\le\sup_{x\ge 0}\sigma(x),\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

В силу линейности уравнения (10) функция

$$\tilde\sigma(x)=\frac{\sigma^*(x)}{\delta}\xi\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/(1-\alpha)},\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{14}$$

будет также удовлетворять уравнению (10) и обладать свойствами b) и c), где $\delta \equiv \lim\limits_{x\to+\infty}\sigma^*(x)$.

Ш а г IV. Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна со степенной нелинейностью:

$$\omega(x)=\lambda(x)\int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\omega^\alpha(t)\xi^{1-\alpha}dt, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{15}$$

Для уравнения (15) введем специальные последовательные приближения

$$\omega_{n+1}(x)=\lambda(x)\int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\omega_n^\alpha(t)\xi^{1-\alpha}dt, \tag{15$'$}$$

$$\omega_0(x)\equiv\xi, \quad n=0,1,2,\dots .$$

Индукцией по n докажем, что

$$\omega_n\downarrow \text{ по } n,$$

$$\omega_n(x)\geq\tilde\sigma(x), \quad n=0,1,2,\dots, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{16}$$

В силу того что $K(x-t)\geq K(x+t)$ $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,$ $1\geq\lambda(x)\geq 0$, имеем

$$\omega_1(x)\leq\int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\omega_0^\alpha(t)\xi^{1-\alpha}dt\leq\xi\int_0^\infty K(x-t)dt\leq\xi=\omega_0(x),$$

ибо $\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau)d\tau=1$.

Предполагая, что $\omega_n(x)\leq\omega_{n-1}(x)$ при некотором $n\in\mathbb{N}$ и учитывая монотонность функции $z^\alpha, \alpha\in(0,1), z\in\mathbb{R}^+$, из (15$'$) получим $\omega_{n+1}(x)\leq\omega_n(x)$. Теперь докажем (16). При $n=0$ в силу (14) будем иметь

$$\omega_0(x)\equiv\xi\geq\left(\frac12\right)^{1/(1-\alpha)}\xi\geq\left(\frac12\right)^{1/(1-\alpha)}\xi\frac{\sigma^*(x)}{\delta}=\tilde\sigma(x).$$

Предположим, что $\omega_n(x)\geq\tilde\sigma(x)$ при некотором $n\in\mathbb{N}$. Тогда из (15$'$) и (14) выводим

$$\omega_{n+1}(x)\geq\lambda(x)\int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\xi^{1-\alpha}(\tilde\sigma(t))^\alpha dt$$

$$\geq 2\lambda(x)\int_0^\infty (K(x-t)-K(x+t))\tilde\sigma(t)dt\geq\lambda(x)\int_x^\infty (v(t-x)-v(t+x))\tilde\sigma(t)dt=\tilde\sigma(x).$$

Индукцией также можно убедиться, что

$$\omega_n(x)\uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad n=0,1,2,\dots,$$

$$\omega_n\in C(\mathbb{R}^+), \quad n=0,1,2,\dots .$$

Следовательно, имеем

$$\exists\lim_{n\to\infty}\omega_n(x)=\omega(x),$$

$$\omega\in C(\mathbb{R}^+), \quad \omega(x)\uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+,$$

$$\tilde\sigma(x)\leq\omega(x)\leq\xi, \quad x\in\mathbb{R}^+,$$

$$\omega \text{ удовлетворяет уравнению (15).}$$

Обозначим через $\beta \equiv \lim\limits_{x\to+\infty} \omega(x) > 0$. Тогда в силу предельных соотношений для операции свертки из (15) получим $\beta = \xi^{1-\alpha}\beta^\alpha \Rightarrow \beta = \xi$, ибо $\beta > 0$.

Ш а г 5. Для основного уравнения (1) рассмотрим итерации

$$f_{n+1}(x) = \int\limits_0^\infty U(x,t,f_n(t))dt, \quad f_0(x) = \omega(x), \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Индукцией по n можно доказать, что

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n,$$

$$f_n \text{ — измеримые функции,}$$

$$f_n(x) \le \xi, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$$f(x) \text{ — измеримая функция,}$$

$$f(x) \text{ удовлетворяет уравнению (1),}$$

$$\omega(x) \le f(x) \le \xi, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

По теореме о двух милиционерах существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \xi$. Теорема доказана.

2.2. Частные примеры

В конце работы приведем несколько примеров функции $U(x,t,z)$, для которой выполняются все условия доказанной теоремы:

I) $U(x,t,z) = K(x-t)G(z)$,

II) $U(x,t,z) = \lambda(x)K(x-t)G(z)$,

III) $U(x,t,z) = \lambda(x)(K(x-t) - K(x+t))G(z) + K(x+t)G_0(z)$,

где функции λ и K обладают свойствами (3)–(7), а G и G_0 удовлетворяют следующим условиям:

1) $G(z) \ge z^\alpha \xi^{1-\alpha}, z \in [0,\xi]$, $G_0(z) \ge 0$, $z \in [0,\xi]$,

2) $G(\xi) = G_0(\xi) = \xi$,

3) G и $G_0 \uparrow$ по z на отрезке $[0,\xi]$,

4) $G, G_0 \in C[0,\xi]$.

Конкретными примерами функций G и G_0 могут служить функции

a) $G(z) = z^\alpha \xi^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$,

a$_0$) $G_0(z) = z^p \xi^{1-p}$, $p > 0$,

b) $G(z) = z^\alpha \left(\dfrac{\pi n}{\alpha}\right)^{1-\alpha} + \sin^2 \alpha z$,

b$_0$) $G_0(z) = z + \dfrac{\xi}{\pi n}\sin^2 \dfrac{\pi n z}{\xi}$, $\quad n = 1,2,3,\dots$.

Подробно остановимся на примере b) для функции $G(z)$. Проверим выполнение условий (1)–(4), накладываемых на G. Действительно, если в качестве ξ выберем любой член из последовательности $\left\{\dfrac{\pi n}{\alpha}\right\}_{n=1}^\infty$, то при $z \in \left[0, \dfrac{\pi n}{2}\right]$ ($n \in \mathbb{N}$ фиксирована) будем иметь

$$G(z) \ge z^\alpha \xi_n^{1-\alpha}, \quad \xi_n = \frac{\pi n}{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$G(\xi_n) = \xi_n + \sin^2 \pi n = \xi_n,$$

$$G'(z) = \alpha z^{\alpha-1} \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^{1-\alpha} + \alpha \sin 2\alpha z \geq \alpha z^{\alpha-1} z^{1-\alpha} + \alpha \sin 2\alpha z = \alpha(1 + sin2\alpha z) \geq 0.$$

Следовательно, $G(z) \uparrow$ по z на $[0, \xi_n]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** Качественное различие решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Теорет. мат. физика. 2014. Т. 180, № 2. С. 272–288.
2. **Владимиров В.С., Волович Я.И.** О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теорет. мат. физика. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368.
3. **Енгибарян Н.Б.** Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
4. **Урысон П.С.** Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Мат. сб. 1923. Т. 31, № 2. С. 236–255.
5. **Красносельский М.А.** Положительные решения операторных уравнений. М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962. 394 с.
6. **Забрейко П.П., Пустыльник Е.И.** О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 2. С. 204–505.
7. **Brezis H., Browder F.E.** Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 81, no. 1. P. 73–78.
8. **Арабаджян Л.Г.** Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32, № 1. С. 21–28.
9. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** О построении неотрицательного решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на полуоси // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 4. С. 110–118.
10. **Хачатрян Х.А.** Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // Известия РАН. Сер. Математика. 2012. Т. 76, № 1. С. 173–200.
11. **Хачатрян Х.А.** О нетривиальных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Материалы конференции "VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике". Ростов-на-Дону, 2016. С. 40–41. URL: http://rus-arm.sfedu.ru/thethis.pdf.
12. **Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.** Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1984. Т. 22. С. 175–242.
13. **Колмогоров А.Н., Фомин В.С.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

Хачатрян Хачатур Агавардович Поступила 7.11.2016
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник отдела методов мат. физики
Институт математики НАН Армении, г. Ереван
e-mails: Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук, ассистент каф. высшей математики и теор. механики
Армянский национальный аграрный университет, г. Ереван
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

Сисакян Арусяк Арамовна
ассистент каф. высшей математики и теор. механики
Армянский национальный аграрный университет, г. Ереван
e-mail: Sisakyan64@mail.ru

REFERENCES

1. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. Qualitative difference between solutions of stationary model Boltzmann equations in the linear and nonlinear cases. *Theor. Math. Phys.*, 2014, vol. 180, no. 2, pp. 990–1004. doi: 10.1007/s11232-014-0194-6 .
2. Vladimirov V.S., Volovich Y.I. Nonlinear Dynamics equation in p-adic string theory. *Theor. Math. Phys.*, 2004, vol 138, no. 3, pp. 355–368. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29 .
3. Engibaryan N.B. On a problem in nonlinear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, iss. 1, pp. 12–14. doi: 10.1007/BF01014505 .
4. Urysohn P. One type of nonlinear integral equations. *Mat. Sbornik*, 1923, vol. 31, no. 2, pp. 236–255 (in Russian).
5. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964, 381 p. Original Russian text published in *Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravnenii*, Moscow: Fiziko-Matematicheskoj Literatury Publ., 1962, 394 p.
6. Zabreiko P. P., Pustyl'nik E. I. On continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L_p spaces. *Uspehi Mat. Nauk*, 1964, vol 19, no. 2 (116), pp. 204–205 (in Russian).
7. Brezis H., Browder F.E.. Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 81, no. 1, pp. 73–78.
8. Arabadzhyan L.G. Solutions of an integral equation of Hammerstein type. *J. Contemp. Math. Anal.*, 1997, vol. 32 , no. 1, pp. 17–24.
9. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On the construction of a nonnegative solution for one class of Urysohn-type nonlinear integral equations on a semiaxis. *Ukrainian Math. J.*, 2011, vol. 63, no. 1, pp. 134–145. doi: 10.1007/s11253-011-0492-1 .
10. Khachatryan Kh.A. On a class of integral equations of Urysohn type with strong non-linearity. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 163–189. doi: 10.1070/IM2012v076n01ABEH002579 .
11. Khachatryan Kh.A. On nontrivial solutions of one class convolution type nonlinear integral equations. VI *Russian-Armenian conference on Mathematical Physics and Analitical Mechanics*, Rostov-on-Don, 2016, pp. 40–41 (in Russian). Available at: http://rus-arm.sfedu.ru/thethis.pdf .
12. Arabadzhyan L.G., Engibaryan N.B. Convolution equations and nonlinear functional equations. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 36, no. 6, pp. 745–791. doi: 10.1007/BF01085507 .
13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1981, 544 p.

The paper was received by the Editorial Office on November 7, 2016.

Khachatur Agavardovich Khachatryan. Dr. Phys.-Math. Sci., Head Scientist Researcher of National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, 0019 Armenia,
e-mails: Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru .

Aikanush Samvelovna Petrosyan. Assistant of the Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics of National Agrarian University of Armenia, Yerevan, 0009 Armenia,
e-mail: Haykuhi25@mail.ru .

Arusyak Aramovna Sisakyan. Assistant of the Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics of National Agrarian University of Armenia Yerevan, 0009 Armenia,
e-mail: Sisakyan64@mail.ru .