

УДК 517.928.4

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ВБЛИЗИ ТОЧКИ КАТАСТРОФЫ ТИПА “БАБОЧКА”¹

О. Ю. Хачай

В рамках метода согласования асимптотических разложений рассматривается решение трехмерного нелинейного волнового уравнения $-U''_{TT} + U''_{XX} + U''_{YY} + U''_{ZZ} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U)$. Здесь ε – малый положительный параметр и правая часть представляет собой плавно меняющийся источниковый член уравнения. Около типичной точки катастрофы типа “бабочка” строится формальное асимптотическое разложение решения исходного уравнения во внутреннем масштабе. При этом для приближаемого решения предполагается наличие стандартного внешнего асимптотического разложения, пригодного вне малой окрестности точки катастрофы. Исследуется нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка с тремя параметрами $u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x$ для главного члена внутреннего асимптотического разложения. Это уравнение описывает возникновение контрастной структуры типа “ступенька” вблизи точки катастрофы. Кратко приведена процедура получения такого уравнения. На ограниченном множестве параметров установлена равномерная асимптотика на бесконечности решения этого ОДУ, удовлетворяющего условиям согласования. Численными методами показана возможность нахождения ударного слоя вне окрестности нуля внутреннего масштаба. Приведены иллюстрации найденных численно интегральных кривых.

Ключевые слова: согласование асимптотических разложений, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, нелинейное уравнение математической физики, катастрофа типа “бабочка”, численные методы.

O. Yu. Khachai. Asymptotics of a solution of a three-dimensional nonlinear wave equation near a butterfly catastrophe point.

In the framework of the method of matched asymptotic expansions, a solution of the three-dimensional nonlinear wave equation $-U''_{TT} + U''_{XX} + U''_{YY} + U''_{ZZ} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U)$ is considered. Here ε is a small positive parameter and the right-hand side is a smoothly changing source term of the equation. A formal asymptotic expansion of the solution of the equation is constructed in terms of the inner scale near a typical “butterfly” catastrophe point. It is assumed that there exists a standard outer asymptotic expansion of this solution suitable outside a small neighborhood of the catastrophe point. We study a nonlinear second-order ordinary differential equation (ODE) for the leading term of the inner asymptotic expansion depending on three parameters: $u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x$. This equation describes the appearance of a step-like contrast structure near the catastrophe point. We briefly describe the procedure for deriving this ODE. For a bounded set of values of the parameters, we obtain a uniform asymptotics at infinity of a solution of the ODE that satisfies the matching conditions. We use numerical methods to show the possibility of locating a shock layer outside a neighborhood of zero in the inner scale. The integral curves found numerically are presented.

Keywords: matched asymptotic expansions, nonlinear ordinary differential equation, nonlinear equation of mathematical physics, butterfly catastrophe, numerical methods.

MSC: 34E05, 35C20, 34K28

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-250-265

Введение

Данная статья продолжает начатое в работе [1] исследование поведения решений трехмерного нелинейного волнового уравнения в частных производных (УЧП)

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U) \quad (0.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00222).

с малым положительным параметром ε . Основное внимание здесь сконцентрировано на описании локального участка решения вблизи точки катастрофы типа “бабочка”, имеющего вид сглаженной ударной волны, так называемой контрастной структуры типа ступеньки; подробную информацию о структурах этого типа можно найти в обзорной статье [2] и в работах из ее библиографического списка. Отметим, что поскольку в функцию f , стоящую в правой части уравнения (0.1), входят 4 независимые переменные (T, X, Y, Z) , то для открытых областей пространства переменных (T, X, Y, Z, U) являются типичными точки катастрофы, соответствующие нулям функции f вплоть до 5-го порядка по искомой функции U , что соответствует типу “бабочка”. Вариант уравнения с двумя независимыми переменными и соответственной типичной точкой катастрофы типа “сборка” был рассмотрен в статье [3], а подробное исследование специального решения и получение его равномерного асимптотического разложения были осуществлены в статьях [4; 5]; данная работа в основном следует подходам, примененным в этих трудах.

В статье [1] было выведено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x, \tag{0.2}$$

зависящее от трех параметров (y, z, t) , которому удовлетворяет специальное решение, связанное с контрастной структурой типа “ступенька”.

Цель настоящей работы — получить асимптотику специального решения нелинейного ОДУ (0.2) при $x \rightarrow \infty$, равномерную на произвольном ограниченном множестве изменения параметров (y, z, t) , и, дополнительно, продемонстрировать отличительную особенность катастрофы типа “бабочка” от исследованной ранее [3–5] катастрофы типа “сборка” — возможность локализации ударного слоя (резкого скачка решения) вне конечной окрестности точки $x = 0$.

1. Постановка задачи

Запись точной формулировки задачи для поиска специального решения ОДУ (0.2) удобно сочетать с процессом вывода самого этого уравнения. Поэтому воспроизведем здесь кратко некоторые этапы вывода ОДУ (0.2), выполненного в [1, разд. 1, 2], делая акцент на условиях, налагаемых на составные части задачи.

1.1. Связь ОДУ (0.2) с задачей поиска асимптотики уравнения (0.1)

С помощью сжимающей замены переменных $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4) = \varepsilon(T, X, Y, Z)$, $V(\varepsilon, \mathbf{s}) = U(\varepsilon, T, X, Y, Z)$ приведем уравнение (0.1) к стандартному виду сингулярных уравнений с малым параметром при старших производных:

$$\varepsilon^2 \sum_{n=1}^4 A_n \frac{\partial^2 V}{\partial s_n^2} = f(\mathbf{s}, V), \tag{1.3}$$

где $-A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$.

Пусть будут выполнены следующие условия:

- функция $f(\mathbf{s}, V)$ является гладкой и удовлетворяет неравенству $f'_V(\mathbf{s}, V) \neq 0$ на некоторой области $(\mathbf{s}, V) \in \Omega_{\mathbf{s}} \times \Omega_V$; здесь и далее все области предполагаются открытыми;
- соблюдаются соответствующие уравнению (1.3) условия, выделяющие некоторое решение задачи на области $\Omega_{\mathbf{s}}$, приближаемое рядом внешнего асимптотического разложения вида

$$V(\varepsilon, \mathbf{s}) = V_0(\mathbf{s}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(\mathbf{s}), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad f(\mathbf{s}, V_0(\mathbf{s})) = 0, \tag{1.4}$$

на области $\Omega_{\mathbf{s}}$, за исключением некоторой окрестности ее границы.

Конкретные примеры постановок задач, удовлетворяющих данным условиям, представлены, например, в монографиях [6; 7] и статьях [2; 4].

На границе множества Ω_s могут типичным образом находиться точки вырождения отображения $f(s, V)$ по искомой функции — нули отображения $f'_V(s, V)$, которые могут содержать многообразия точек складки, сборки, гладкие линии катастрофы типа “ласточкин хвост” и изолированные точки катастрофы типа “бабочка”.

Пусть точка (s°, V°) на границе области $\Omega_s \times \Omega_V$ является изолированной точкой катастрофы [8, с. 12, 17] типа “бабочка” функции $f(s, V)$. Тогда асимптотическое тейлоровское разложение функции f в окрестности этой точки имеет вид

$$f(s, V) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(b_m + G_m(s) + \widetilde{G}_m(s) \right) (V - V^\circ)^m, \quad (s, V) \rightarrow (s^\circ, V^\circ),$$

где

$$G_m(s) = \sum_{j=1}^4 b_{m,j} (s_j - s_j^\circ), \quad \widetilde{G}_m(s) = \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} b_{m,\alpha} (s - s^\circ)^\alpha, \quad s \rightarrow s^\circ,$$

$$0 = b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4, \quad (1.5)$$

$$b_5 = \varkappa \neq 0 \quad (1.6)$$

(в статье используется операция возведения векторной величины в степень с показателем-мультииндексом, как, например, в монографии [9, с. 15]). Обозначим $\mathbf{B} = (b_{n-1,j})_{n,j=1,\dots,4}$. Обращение в нуль пяти коэффициентов (1.5) достигается за счет выбора значений пяти координат точки (s°, V°) . Существование такого решения системы пяти уравнений $\frac{\partial^k}{\partial V^k} f(s, V) = 0$, $k = 0, \dots, 4$, с пятью неизвестными является типичной ситуацией, при этом выполнение еще каких-либо независимых соотношений уже не будет типичным для функций $f(s, V)$, что, в частности, делает закономерными предположение (1.6) и неравенство $\det \mathbf{B} \neq 0$.

Применение подхода [8, с. 45, 46, 52] позволяет получить специальный диффеоморфизм $(s, V) = \Psi(\sigma, \mathcal{W})$, покомпонентно имеющий вид:

$$s = \Psi[s](\sigma, \mathcal{W}) \equiv s^\circ + \mathbf{B}^{-1} \sigma, \quad V = \Psi[V](\sigma, \mathcal{W}), \quad (1.7)$$

отображающий некоторую окрестность начала координат переменных (σ, \mathcal{W}) на некоторую окрестность точки (s°, V°) , удовлетворяющий тождеству

$$f(s, V) \equiv f(\Psi(\sigma, \mathcal{W})) \equiv -\varphi_1(\sigma) - \varphi_2(\sigma)\mathcal{W} - \varphi_3(\sigma)\mathcal{W}^2 - \varphi_4(\sigma)\mathcal{W}^3 + \varkappa\mathcal{W}^5,$$

коэффициенты в правой части которого имеют асимптотические представления

$$\varphi_n(\sigma) = \sigma_n + \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} c_{n,\alpha} \sigma^\alpha, \quad n = 1, \dots, 4, \quad \sigma \rightarrow \mathbf{0}.$$

Кроме того, диффеоморфизм (1.7) удовлетворяет асимптотическим соотношениям

$$\Psi[V](\sigma, \mathcal{W}) = V^\circ + H_0(\sigma) + \mathcal{W}(1 + H_1(\sigma)) + \sum_{m=2}^{\infty} \mathcal{W}^m (C_m + H_m(\sigma)), \quad (\sigma, \mathcal{W}) \rightarrow (\mathbf{0}, 0),$$

$$H_m(\sigma) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} C_{m,\alpha} \sigma^\alpha, \quad \sigma \rightarrow \mathbf{0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

с некоторым набором числовых коэффициентов $C_m, C_{m,\alpha}$.

Осуществим нелинейную замену переменных

$$(\mathbf{s}, V(\varepsilon, \mathbf{s})) = (\mathbf{s}^\circ + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, V(\varepsilon, \mathbf{s}^\circ + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\sigma})) = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{W}(\varepsilon, \boldsymbol{\sigma})),$$

которую можно записать покомпонентно следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= G_{n-1}(\mathbf{s}), \quad n = 1, \dots, 4; \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}(\mathbf{s} - \mathbf{s}^\circ), \\ V(\varepsilon, \mathbf{s}) &= \Psi[V](\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s}), \mathcal{W}(\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s}))). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Совершим растяжение координат

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \varepsilon^{\beta_n} S_n, \quad n = 1, \dots, 4; \quad \mathcal{W}(\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}) = \varepsilon^\gamma W(\varepsilon, \mathbf{S}), \\ \beta_n &= (n + 1)\gamma, \quad n = 1, \dots, 4, \quad \gamma = 1/7, \end{aligned}$$

и введем в рассмотрение формальный ряд внутреннего асимптотического разложения

$$W(\varepsilon, \mathbf{S}) = w(\mathbf{S}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n\gamma} w_n(\mathbf{S}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \tag{1.9}$$

Нужно отметить, что в [1, формулы (2.4), (2.5)] были допущены неточности, связанные с отсутствием в записи диффеоморфной замены переменных [1, формула (2.4)] нелинейной части $\Psi[V]$ диффеоморфизма $\Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{W})$, и в формулах (1.7)–(1.8) они исправлены. В (1.9) уточнен показатель степени ε в сумме ряда [1, формула (2.10)]. Указанные опечатки, однако, не сказались на правильности самого ОДУ (0.2).

Значение γ было найдено в [1] в соответствии с практикой применения метода согласования асимптотических разложений [7] при переходе ко внутреннему масштабу и подстановке ряда (1.9) в уравнение (1.3). Тогда при фиксированном значении \mathbf{S} и $\varepsilon \rightarrow 0$ данное уравнение приняло вид

$$N \frac{\partial^2}{\partial (S_1)^2} w(\mathbf{S}) + S_1 + S_2 w(\mathbf{S}) + S_3 w^2(\mathbf{S}) + S_4 w^3(\mathbf{S}) - \varkappa w^5(\mathbf{S}) = O(\varepsilon^\gamma),$$

где $N = -(b_{0,1})^2 + (b_{0,2})^2 + (b_{0,3})^2 + (b_{0,4})^2$. Затем, в результате предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и линейной замены с постоянными коэффициентами $(\mathbf{S}, W) \rightarrow ((x, y, z, t), u)$ было получено искомое нелинейное ОДУ второго порядка

$$\text{sgn}(N) u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x,$$

в котором переменные y, z, t стали уже просто параметрами.

1.2. Постановка задачи для ОДУ (0.2)

Рассмотрим асимптотическую задачу

$$A(u) \equiv -u''_{xx} + u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x = 0, \tag{1.10}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |u(x; y, z, t) - H_{\pm}(x; y, z, t)| = 0, \tag{1.11}$$

где функции H_- и H_+ суть гладкие ветви корня конечного уравнения

$$\omega(u, x; y, z, t) \equiv u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x = 0, \tag{1.12}$$

максимально продолженные, соответственно, вправо из окрестности точки $x = -\infty$ и влево из окрестности точки $x = +\infty$. Предельное соотношение (1.11) представляет собой необходимое

условие для согласования внутреннего (1.9) и внешнего (1.4) асимптотических разложений на уровне главных членов — функций $w(\mathbf{S})$ и $V_0(\mathbf{s})$.

Для удобства объявления новых объектов условимся, что все обозначения, вводимые ниже в статье, никак не связаны с использованными в подразд. 1.1. Введем норму $\|\mathbf{a}\| = \max\{|a_1|, \dots, |a_m|\}$ для векторной величины $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Договоримся, что в обозначениях вида M_b^a , верхний индекс не является показателем степени, а указывает на переменную, ограничение на изменение которой устанавливается соотношением, содержащим данное обозначение; для возведения такой величины в степень будем предварительно заключать ее в скобки.

2. Асимптотика при $x \rightarrow \infty$ для ограниченных значений параметров y, z, t

Ниже нам потребуется следующая лемма об асимптотике глобально единственного корня конечного уравнения вида (1.12), определенного на некоторой окрестности точки $x = \infty$.

Лемма. Пусть задано конечное уравнение

$$y^5 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y - x = 0 \quad (2.1)$$

с некоторым набором вещественных коэффициентов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Тогда найдется числовая функция $M_0^x = M_0^x(\mathbf{a})$, удовлетворяющая ограничению

$$M_0^x < M(1 + (M^{\mathbf{a}})^{5/2}) \quad (2.2)$$

с некоторой постоянной $M > 0$, такая что для произвольного ограниченного множества \mathbf{A} рассматриваемых наборов коэффициентов \mathbf{a} : $\|\mathbf{a}\| \leq M^{\mathbf{a}}$ будут верны следующие утверждения.

На множестве $\{|x| > M_0^x\}$ существует единственное решение $y(x; \mathbf{a})$ уравнения (2.1), причем $y'_x(x; \mathbf{a}) > 0$ при $|x| > M_0^x$ и справедливо асимптотическое разложение вида

$$y(x; \mathbf{a}) = x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\mathbf{a}) x^{-j/5} \right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

допускающее почленное дифференцирование по x .

Кроме того, на множестве $\{|x| > M_0^x\}$ является строго положительным выражение

$$\lambda(y; \mathbf{a}) = 5y^4 + 3a_1 y^2 + 2a_2 y + a_3 \quad (2.4)$$

и справедлива равномерная оценка

$$\frac{1}{2}|x|^{1/5} < y(x; \mathbf{a}) \operatorname{sgn} x < 2|x|^{1/5}, \quad |x| > M_0^x, \quad \mathbf{a} \in \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение функцию

$$F(s, q; \mathbf{a}) = q^5 + a_1 s^2 q^3 + a_2 s^3 q^2 + a_3 s^4 q - 1. \quad (2.6)$$

Заметим, что если совершить подстановку

$$s = x^{-1/5}, \quad q = x^{-1/5} y \quad (2.7)$$

в функцию $F(s, q; \mathbf{a})$ и полученное выражение умножить на x , мы получим в точности выражение в правой части уравнения (2.1). Таким образом, уравнение $F(s, q; \mathbf{a}) = 0$ с учетом подстановки (2.7) эквивалентно уравнению (2.1) при $x \neq 0$.

Отметим также, что полином (2.6) удовлетворяет соотношениям $F(0, 1; \mathbf{a}) = 0$ и $F'_q(0, 1; \mathbf{a}) \neq 0$. Следовательно, согласно теореме о неявной функции (см., например, [10, с. 560]), существует функция $q = q(s; \mathbf{a})$ — решение уравнения $F(s, q; \mathbf{a}) = 0$ в некоторой окрестности точки $(s, q) = (0, 1)$ при фиксированном значении \mathbf{a} . Но, поскольку нам требуется равномерная пригодность искомой окрестности и функции $q(s; \mathbf{a})$ для всех значений параметров $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, мы проведем более подробно рассуждение, подобное доказательству теоремы о неявной функции [10, с. 560–563], но отличающееся от него на начальном этапе. Для этого зафиксируем $\delta_q = 1/2$ и найдем число $0 < \delta_s < 1$ такое, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$F'_q(s, q; \mathbf{a}) > 0 \quad \forall (s, q) \in (-\delta_s, \delta_s) \times (1 - \delta_q, 1 + \delta_q); \tag{2.8}$$

$$F(s, 1 + \delta_q; \mathbf{a}) > 0, \quad F(s, 1 - \delta_q; \mathbf{a}) < 0 \quad \forall s \in (-\delta_s, \delta_s). \tag{2.9}$$

Воспользовавшись условием, что рассматриваемые значения параметров удовлетворяют неравенству $|a_i| \leq M^a$, $i = 1, 2, 3$, получим некоторый диапазон допустимых чисел $0 < \delta_s < 1$, удовлетворяющих соотношению (2.8). Запишем

$$F'_q(s, q) = q^4(5 + h_1(s, q; \mathbf{a})), \quad h_1(s, q; \mathbf{a}) = 3a_1s^2q^{-2} + 2a_2s^3q^{-3} + a_3s^4q^{-4} \tag{2.10}$$

и, оценивая $1/2 < q < 3/2$, $\max\{q^{-2}, q^{-3}, q^{-4}\} < 2^4$, $\max\{s^2, |s^3|, s^4\} < (\delta_s)^2$, получим, что $|h_1(s, q; \mathbf{a})| < 16(6M^a)(\delta_s)^2$, откуда в соответствии с (2.10) легко видеть, что допустимыми являются все числа

$$0 < \delta_s < \left(\frac{96}{5}M^a\right)^{-1/2}. \tag{2.11}$$

Подобным образом найдем диапазон допустимых чисел $0 < \delta_s < 1$, удовлетворяющих соотношению (2.9). Запишем

$$F(s, 1 \pm \delta_q; \mathbf{a}) = \pm \delta_q \left(1 + \sum_{i=1}^4 (1 \pm \delta_q)^i\right) + h_2(s, q; \mathbf{a}), \quad h_2(s, q; \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^3 a_i s^{i+1} (1 \pm \delta_q)^{-i-1} \tag{2.12}$$

и, оценивая $1/2 \leq 1 \pm \delta_q \leq 3/2$; $(1 \pm \delta_q)^{-i-1} \leq 2^4$, $|s^{i+1}| < (\delta_s)^2$, $i = 1, 2, 3$, получим, что $|h_2(s, q; \mathbf{a})| < 16(3M^a)(\delta_s)^2$, а тогда, имея ввиду, что скобка, умножаемая на $\pm \delta_q$ в равенстве (2.12), больше 1, легко установить, что допустимыми являются все числа $\delta_s > 0$, удовлетворяющие ограничению

$$\delta_s < (\delta_q)^{1/2} (48M^a)^{-1/2}. \tag{2.13}$$

Итак, учитывая оба достаточных условия (2.11), (2.13), определим δ_s и δ_q формулами

$$\delta_q = \frac{1}{2}, \quad \delta_s = \min \left\{ 1, \left(\frac{96}{5}M^a\right)^{-1/2}, (\delta_q)^{1/2} (48M^a)^{-1/2} \right\}, \tag{2.14}$$

не зависящими от выбора параметров $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ и удовлетворяющими соотношениям (2.8), (2.9).

Далее, строго следуя рассуждению доказательства теоремы о неявной функции [10, с. 560–563], приходим к выводу, что при каждом $s \in (-\delta_s, \delta_s)$ уравнение $F(s, q; \mathbf{a}) = 0$ имеет в точности один корень $q = q(s; \mathbf{a}) \in (1 - \delta_q, 1 + \delta_q)$. Причем данный корень $q = q(s; \mathbf{a})$ является бесконечно дифференцируемой по переменной $s \in (-\delta_s, \delta_s)$ функцией и имеет тейлоровское разложение вида

$$q(s; \mathbf{a}) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\mathbf{a})s^j, \quad s \rightarrow 0. \tag{2.15}$$

Применяя подстановку (2.7) в обратную сторону, мы получим, что при любом выборе значения $M_0^x \geq (\delta_s)^{-5}$ на множестве $|x| > M_0^x$ существует решение уравнения (2.1), определяемое формулой

$$y(x; \mathbf{a}) = x^{1/5} q(x^{-1/5}; \mathbf{a}), \tag{2.16}$$

причем

$$|x|^{1/5}(1 - \delta_q) < |y(x; \mathbf{a})| < |x|^{1/5}(1 + \delta_q). \quad (2.17)$$

Легко видеть, что из асимптотики (2.15) следует асимптотическое разложение (2.3) для решения (2.16). Кроме того, поскольку выражение (2.4), есть $s^{-4}F'_q(s, q; \mathbf{a})$ в терминах подстановки (2.7), то в силу неравенства (2.8) оно является строго положительным на множестве $|x| > M_0^x$.

Осталось доказать глобальную единственность и строгое возрастание корня (2.16) уравнения (2.1) на множестве $|x| > M_0^x$, при необходимости увеличив значение M_0^x .

Вначале рассмотрим однозначную функцию

$$x(y; \mathbf{a}) = y^5 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y, \quad (2.18)$$

при каждом вещественном y определяющую глобально единственный корень $x = x(y; \mathbf{a})$ уравнения (2.1). Если положить

$$\Delta^y = \max \left\{ 1, \left(\frac{6}{5} M^{\mathbf{a}} \right)^{1/2} \right\}, \quad (2.19)$$

то на всем множестве $|y| > \Delta^y$ функция (2.18) строго возрастает. Действительно, в силу (2.19) $\partial x / \partial y(y; \mathbf{a}) = \lambda(y; \mathbf{a}) > (\Delta^y)^4(5 - 3M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-2} - 2M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-3} - M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-4}) \geq (\Delta^y)^4(5 - 6M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-2}) \geq 0$. Заметим также, что функция (2.18) удовлетворяет неравенству $|x(y; \mathbf{a})| \leq \Delta^x$ на множестве $(y, \mathbf{a}) \in [-\Delta^y, \Delta^y] \times \mathbf{A}$, где

$$\Delta^x = (\Delta^y)^5 + 3M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^3. \quad (2.20)$$

Поэтому никакая точка $(x, y; \mathbf{a})$, удовлетворяющая соотношениям $|x| > \Delta^x$, $|y| \leq \Delta^y$ и $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, не может обращать в верное равенство уравнение (2.1).

Обозначим теперь

$$M_0^x = \max \left\{ (\delta_s)^{-5}, \Delta^x, (\Delta^y / (1 - \delta_q))^5 \right\} \quad (2.21)$$

и предположим от противного, что существует некоторая удовлетворяющая уравнению (2.1) тройка $(x_0, y_0; \mathbf{a}_0)$, где $x_0: |x_0| > M_0^x$, $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}$ и число y_0 , отличное от значения $y(x_0; \mathbf{a}_0)$, определяемого формулой (2.16). Если предположить, что $|y_0| \leq \Delta^y$, то получится, что нашлась точка $(x_0, y_0; \mathbf{a}_0)$, удовлетворяющая и соотношениям $|x_0| > \Delta^x$, $|y_0| \leq \Delta^y$, $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}$, и уравнению (2.1), что противоречит доказанному выше. Следовательно, осталось рассмотреть только случай $|y_0| > \Delta^y$. Заметим, что тогда согласно формуле (2.21) и соотношению (2.17) выполняется неравенство $|y(x_0; \mathbf{a}_0)| > \Delta^y$. Значит, нашлись две точки $(x_0, y_0; \mathbf{a}_0)$ и $(x_0, y(x_0; \mathbf{a}_0); \mathbf{a}_0)$, одновременно удовлетворяющие и ограничению $|y| > \Delta^y$, и уравнению (2.1), но это противоречит тому, что на множестве $|y_0| > \Delta^y$ глобально единственный корень $x = x(y; \mathbf{a})$ уравнения (2.1) строго возрастает. Таким образом, предположение о нарушении глобальной единственности корня (2.16) уравнения (2.1) на множестве $|x| > M_0^x$ неправильно. Поэтому функция (2.16) является строго возрастающей как обратная к строго возрастающей функции (2.18), а с помощью неравенства (2.17) мы сразу же устанавливаем справедливость оценки (2.5).

Осталось отметить, что из соотношений (2.14), (2.19), (2.20), (2.21) следует неравенство (2.2). Действительно, оценим асимптотику величины M_0^x при $M^{\mathbf{a}} \rightarrow \infty$, проанализировав каждый член в фигурных скобках в формуле (2.21). Пусть $f \sim g$ означает, что величина $\lim f/g$ при $M^{\mathbf{a}} \rightarrow \infty$ есть некоторое ненулевое число. Из формулы (2.19) следует, что $\Delta^y \sim (M^{\mathbf{a}})^{1/2}$. Учет этого соотношения в равенстве (2.20) позволяет заключить, что $\Delta^x \sim (M^{\mathbf{a}})^{5/2}$. Тогда в силу формулы (2.14) мы приходим к выводу, что $\delta_s \sim (M^{\mathbf{a}})^{-1/2}$ и $M_0^x \sim (M^{\mathbf{a}})^{5/2}$. Из этой асимптотической оценки сразу вытекает неравенство (2.2).

Лемма полностью доказана.

Применив лемму к уравнению (1.12), мы получим, что существует числовая функция $M_1^x = M_1^x(M^z)$, удовлетворяющая ограничению $M_1^x < M(1 + (M^z)^{5/2})$ с некоторой постоянной $M > 0$, такая что для выбранного произвольно ограниченного множества \mathbf{D} изменения

параметров $(y, z, t) = \mathbf{z}$: $\|\mathbf{z}\| < M^z$ будет справедливо высказывание, что на лучах $(-\infty, -M_1^x)$ и $(M_1^x, +\infty)$ функции $H_-(x; y, z, t)$ и $H_+(x; y, z, t)$ соответственно, участвующие в соотношении (1.11), определены, являются глобально единственными корнями уравнения (1.12), строго возрастают, имеют одинаковые асимптотические разложения вида

$$H_{\pm}(x; y, z, t) = x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_j(y, z, t) x^{-j/5} \right), \quad x \rightarrow \infty$$

и удовлетворяют равномерной по $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ оценке

$$2x^{1/5} < H_-(x; \mathbf{z}) < \frac{1}{2}x^{1/5}, \quad x < -M_1^x, \quad \frac{1}{2}x^{1/5} < H_+(x; \mathbf{z}) < 2x^{1/5}, \quad x > M_1^x. \quad (2.22)$$

Проведенный в [1, разд. 4, 6] анализ найденных численным методом интегральных кривых дает основания полагать, что в дальнейшем удастся доказать существование функции $u(x; y, z, t)$ — решения задачи (1.10), (1.11), удовлетворяющего неравенствам

$$H_-(x; \mathbf{z}) < u(x; \mathbf{z}) < 0 \text{ при } x < -M_1^x, \quad 0 < u(x; \mathbf{z}) < H_+(x; \mathbf{z}) \text{ при } x > M_1^x. \quad (2.23)$$

Далее в статье мы будем опираться на это предположение.

Займемся теперь непосредственно асимптотикой функции $u(x; y, z, t)$ при $x \rightarrow \infty$ для значений параметров $(y, z, t) = \mathbf{z}$ из ограниченного множества \mathbf{D} . Заметим, что уравнение (1.10) допускает построение формального асимптотического разложения (ФАР) в виде следующего ряда:

$$\tilde{u}(x; y, z, t) = x^{1/5} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(y, z, t) x^{-j/5}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Коэффициенты c_j этого разложения, являющиеся многочленами по \mathbf{z} , последовательно находятся после приравнивания членов при одинаковых степенях x результата подстановки в уравнение (1.10) ряда (2.24).

Найдем несколько первых коэффициентов:

- при x^{-5} : $0 = (c_0(\mathbf{z}))^5 - 1$; $c_0(\mathbf{z}) = 1$;
- при x^{-4} : $0 = 5c_1(\mathbf{z})$; $c_1(\mathbf{z}) = 0$;
- при x^{-3} : $0 = 5c_2(\mathbf{z}) - t$; $c_2(\mathbf{z}) = t/5$;
- при x^{-2} : $0 = 5c_3(\mathbf{z}) - z$; $c_3(\mathbf{z}) = z/5$.

В общем случае, при $k \geq -4$, имеют место уравнения следующего вида:

$$5c_{k+5}(\mathbf{z}) = G_k(\mathbf{z}), \quad (2.25)$$

где $G_k(\mathbf{z})$ есть некоторый полином по переменным c_0, c_1, \dots, c_{k+4} и параметрам (y, z, t) . Таким образом, уравнения (2.25) вместе с равенством $c_0(\mathbf{z}) = 1$ образуют рекуррентную систему, из которой последовательно определяются все коэффициенты c_0, c_1, c_2, \dots .

Теорема. Для произвольного ограниченного множества изменения параметров $\mathbf{D} = \{(y, z, t) = \mathbf{z} : \|\mathbf{z}\| < M^z\}$ и для любого значения $M_{0,n}^Y > 0$ найдутся числа $M_{1,n}^Y$ и $M_{2,n}^x > 0$ такие, что для произвольного решения $u(x; y, z, t)$ уравнения (1.10), удовлетворяющего неравенствам (2.23), и найденных выше коэффициентов ряда (2.24) равномерно по $(x, \mathbf{z}) \in \{|x| > M_{2,n}^x\} \times \mathbf{D}$ будут выполняться оценки

$$\left| u(x; y, z, t) - x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^n c_j(y, z, t) x^{-j/5} \right) \right| \leq M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.26)$$

$$\left| u'_x(x; y, z, t) - x^{-4/5} \left(\frac{1}{5} + \sum_{j=1}^n \frac{1-j}{5} c_j(y, z, t) x^{-j/5} \right) \right| \leq M_{1,n}^Y |x|^{(-4-n)/5}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.27)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $n \in \mathbb{N}$ и $M_{0,n}^Y > 0$. Определим две вспомогательные функции

$$Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) = P_n(x; \mathbf{z}) \pm \frac{1}{2} M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5}, \quad P_n(x; \mathbf{z}) = x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^n c_j(\mathbf{z}) x^{-j/5} \right). \quad (2.28)$$

Докажем, что можно определить не зависящее от x и \mathbf{z} число $M_{3,n}^x > \max\{1, M_1^x\}$ так, чтобы равномерно на множестве

$$\mathbf{E}(M_{3,n}^x) = \{(x, \mathbf{z}) : |x| > M_{3,n}^x, \mathbf{z} \in \mathbf{D}\} \quad (2.29)$$

выполнялись неравенства

$$A(Y_{+,n}(x; \mathbf{z})) > 0, \quad A(Y_{-,n}(x; \mathbf{z})) < 0. \quad (2.30)$$

Здесь M_1^x – число, участвовавшее в соотношениях (2.22), (2.23); оператор $A(\cdot)$ определен формулой (1.10). Отметим, что все рассуждения остаются в силе при увеличении значения $M_{3,n}^x$.

Действительно, поскольку коэффициенты $c_j(\mathbf{z})$, найденные из уравнений (2.25), являются гладкими функциями параметров $(y, z, t) = \mathbf{z}$, то при достаточно большом $M_{3,n}^x$ равномерно на множестве (2.29) будут справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} |x|^{1/5} < P_n(x; \mathbf{z}) \operatorname{sgn} x < 2|x|^{1/5}, \quad (2.31)$$

$$|A(P_n(x; \mathbf{z}))| \leq M_{1,n}^A |x|^{(4-n)/5}. \quad (2.32)$$

Далее, значение оператора $A(\cdot)$ от функций (2.28) можно записать в виде

$$A(Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})) = A(P_n(x; \mathbf{z})) \pm \frac{5}{2} (P_n(x; \mathbf{z}))^4 M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5} + Q_{1,n}(x; \mathbf{z}). \quad (2.33)$$

Здесь $Q_{1,n}(x; \mathbf{z})$ представляет собой линейную, с равномерно ограниченными на множестве (2.29) коэффициентами, комбинацию следующих произведений:

$$(P_n(x; \mathbf{z}))^k |x|^{(1-n)i/5}, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad 1 \leq i \leq 5,$$

и потому допускает равномерную на множестве (2.29) оценку

$$|Q_{1,n}(x; \mathbf{z})| \leq M_n^Q |x|^{(4-n)/5}. \quad (2.34)$$

Подставляя оценки (2.31), (2.32) и (2.34) в равенство (2.33), получим, что для некоторой постоянной $M_{2,n}^Y > 0$ равномерно на множестве (2.29) выполняется соотношение

$$\pm A(Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})) > \pm |x|^{(5-n)/5} \left(\frac{5}{32} M_{0,n}^Y - |x|^{-1/5} M_{2,n}^Y \right).$$

Дополнительно увеличивая значение $M_{3,n}^x$, мы легко получим, что сомножитель в скобках в правой части будет оставаться положительным на всем множестве $|x| > M_{3,n}^x$. Таким образом, неравенства (2.30) установлены.

Зафиксируем произвольное решение $u(x; \mathbf{z})$ уравнения (1.10), удовлетворяющее неравенствам (2.23), и определим еще три пары вспомогательных функций $R_{\pm,n}$, $T_{\pm,n}$ и $Q_{\pm,n}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) &= \pm(u(x; \mathbf{z}) - Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})), \quad T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) = \max\{|u(x; \mathbf{z})|, |Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})|\}, \\ Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) &= S_{5,\pm,n}(x; \mathbf{z}) - tS_{3,\pm,n}(x; \mathbf{z}) - zS_{2,\pm,n}(x; \mathbf{z}) - y, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$S_{m,\pm,n}(x; \mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{m-1} (u(x; \mathbf{z}))^i (Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^{m-i-1}, \quad m = 2, 3, 5. \quad (2.36)$$

Тогда, записывая с помощью этих обозначений результаты вычитания из неравенств (2.30) уравнения (1.10), получим:

$$R''_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}). \quad (2.37)$$

Подберем значение величины $M_{3,n}^x > 1$ таким образом, чтобы равномерно на множестве (2.29) выполнялось неравенство

$$Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > 1. \quad (2.38)$$

Отметим, что для достаточно больших значений $M_{3,n}^x$ равномерно на множестве (2.29) верны оценки

$$\frac{1}{3}|x|^{1/5} < Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) \operatorname{sgn} x < 3|x|^{1/5}, \quad T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > 1. \quad (2.39)$$

Также согласно неравенствам (2.22), (2.23) при $M_{3,n}^x > M_1^x$ на множестве (2.29) выполняется соотношение

$$0 < u(x; \mathbf{z}) \operatorname{sgn} x < 2|x|^{1/5}. \quad (2.40)$$

Функции (2.41) легко оценить следующим образом:

$$S_{5,\pm,n}(x; \mathbf{z}) \geq (T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^4; \quad |S_{m,\pm,n}(x; \mathbf{z})| \leq m(T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^{m-1}, \quad m = 2, 3, \quad (2.41)$$

и тогда, учитывая условие $\max\{|y|, |z|, |t|\} = \|\mathbf{z}\| < M^z$, на множестве (2.29) получим $Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > (T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^4 - M^z(3(T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^2 + 2T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) + 1)$. Отсюда, потребовав дополнительно выполнение неравенства $M_{3,n}^x > (6M^z + 1)^{1/2}$, сразу выводим неравенство (2.38).

Дальнейшее рассуждение связано с использованием [5, лемма 1.1]. Для удобного различения переменных переобозначим здесь переменные x и x_1 , участвующие в формулировке данной леммы, через ξ и ξ_1 соответственно. Проверим условия указанной леммы в применении ее к неравенству (2.37) относительно независимой переменной $\xi = x$, неизвестной функции $u(\xi) = R_{\pm,n}(\xi; \mathbf{z})$ при произвольном фиксированном $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ для $\beta = 1$ и $\xi_1 = M_{3,n}^x$. Легко видеть, что согласно неравенствам (2.39), (2.40) верна оценка $|R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})| < 3|x|^{1/5}$, поэтому, очевидно, выполняется условие [5, лемма 1.1, формула (1.2)]. Неравенство [5, лемма 1.1, формула (1.1)] очевидным образом следует из доказанных выше неравенств (2.37), (2.38). Итак, все условия [5, лемма 1.1] выполнены. Совершенно аналогично можно получить справедливость условий данной леммы по отношению к неравенству (2.37) для независимой переменной $\xi = -x$, неизвестной функции $u(\xi) = R_{\pm,n}(-\xi; \mathbf{z}) = R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})$ при произвольном фиксированном $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ для $\beta = 1$ и $\xi_1 = M_{3,n}^x$. Объединяя полученные результаты, приходим к выводу, что для некоторого фиксированного значения $M_{3,n}^x$ при любых $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ справедливы соотношения

$$R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) \leq |R_{\pm,n}(M_{3,n}^x; \mathbf{z})| \exp(M_{3,n}^x - x), \quad x > M_{3,n}^x, \\ R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) \leq |R_{\pm,n}(-M_{3,n}^x; \mathbf{z})| \exp(M_{3,n}^x + x), \quad x < -M_{3,n}^x.$$

Используя их вместе с оценкой $|R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})| < 3|x|^{1/5}$ при $|x| > M_{3,n}^x$ и применяя известное соотношение $\exp(-|x|) = o(|x|^{-n/5})$ при $x \rightarrow \infty$, мы можем легко найти число $M_{2,n}^x > M_{3,n}^x$ такое, что

$$R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) < \frac{1}{2}M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5}, \quad |x| > M_{2,n}^x. \quad (2.42)$$

Подставив равенства (2.28) и (2.35) в оценку (2.42), мы сразу придем к требуемому неравенству (2.26).

Займемся оценкой (2.27); для удобства докажем ее только для положительных значений x из множества $|x| > M_{2,n}^x$, поскольку доказательство для отрицательных чисел из этого множества совершенно аналогичное. Также удобно рассматривать лишь достаточно большие $n > N_0$, но очевидно, что полученный результат легко можно распространить на случай произвольного $n \in \mathbb{N}$. Заметим вначале, что справедливо следующее равенство:

$$u'(x; \mathbf{z}) = \int_x^{+\infty} \omega(u(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z}) d\xi, \quad x > M_{2,n}^x, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{D}, \quad (2.43)$$

где функция $\omega(u, x; y, z, t)$ определена тождеством, входящим в состав соотношения (1.12). Действительно, рассмотрим последовательность $x_k(\mathbf{z}) = M_{2,n}^x + n \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку при $k \rightarrow \infty$ выполняется $P'_n(x; \mathbf{z}) \rightarrow 0$, то $P_n(x_k + 1; \mathbf{z}) - P_n(x_k; \mathbf{z}) \rightarrow 0$ и, значит, согласно (2.26) разность $u(x_k + 1; \mathbf{z}) - u(x_k; \mathbf{z}) \rightarrow 0$, а тогда из формулы конечных приращений вытекает существование последовательности $\theta_k \rightarrow +\infty$ такой, что $u'(\theta_k; \mathbf{z}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, несложно видеть, что из неравенства (2.26) следует оценка

$$|\omega(u(x; \mathbf{z}), x; \mathbf{z}) - \omega(P_n(x; \mathbf{z}), x; \mathbf{z})| < M_n^\omega |x|^{-n_0}, \quad |x| > M_{2,n}^x, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{D}. \quad (2.44)$$

Здесь и ниже $n_i = n_i(n)$ — такие натуральные числа, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_i(n)/n) = 1/5$; M_n^ω — положительная постоянная. Заметим также, что в силу рекуррентной системы уравнений для коэффициентов $c_j(\mathbf{z})$ справедлива оценка $\omega(P_n(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z}) = O(\xi^{-9/5})$ при $\xi \rightarrow \infty$. Согласно неравенству (2.44) такая же оценка справедлива и для $\omega(u(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z})$, а значит, интеграл в правой части соотношения (2.43) сходится. Поэтому, интегрируя уравнение (1.10) в пределах от x до θ_k и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, мы сразу получим равенство (2.43).

Далее, интегрируя оценку (2.44) в пределах от x до $+\infty$ и используя равенство (2.43), при $x > M_{2,n}^x$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ выводим

$$\begin{aligned} \left| P'_n(x; \mathbf{z}) - \int_x^{+\infty} \omega(P_n(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z}) d\xi \right| &\leq M_{1,n}^P x^{-n_1}, \\ |u'(x; \mathbf{z}) - P'_n(x; \mathbf{z})| &\leq M_{2,n}^P x^{-n_2}, \end{aligned}$$

где $M_{1,n}^P, M_{2,n}^P$ — положительные постоянные. Отсюда стандартным асимптотическим способом легко прийти к искомой оценке (2.27). Теорема доказана.

3. Смещение ударного слоя из точки $x = 0$

Цель данного раздела — показать дополнительную сложность получения равномерной асимптотики главного члена внутреннего разложения решения исходного УЧП (0.1) — решения задачи (1.10), (1.11) — при $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \rightarrow \infty$ по сравнению со случаем катастрофы типа “сборка”, исследованным в статьях [3–5]. Здесь кроме исчезновения при $z \neq 0$ нечетности линия корня уравнения (1.12) может происходить смещение абсциссы центра локализации ударного слоя (резкого изменения решения) за пределы конечной окрестности точки $x = 0$.

Ниже приведены результаты численных расчетов для решения задачи (1.10), (1.11) с фиксированными коэффициентами $y = -20$, $z = 0$, $t = 8.5$, выбранными таким образом, чтобы линия корня уравнения (1.12) была нечетной и имела при положительных x два ярко выраженных изгиба, отстоящих от линии $x = 0$ (см. рис. 1–3). Нечетность линии корня позволяет строить решение задачи (1.10), (1.11) в виде продолженного по нечетности на отрицательную полуось решения $u(x)$ задачи Коши для уравнения

$$u_{xx} = u^5 - 8.5u^3 + 20u - x \quad (3.1)$$

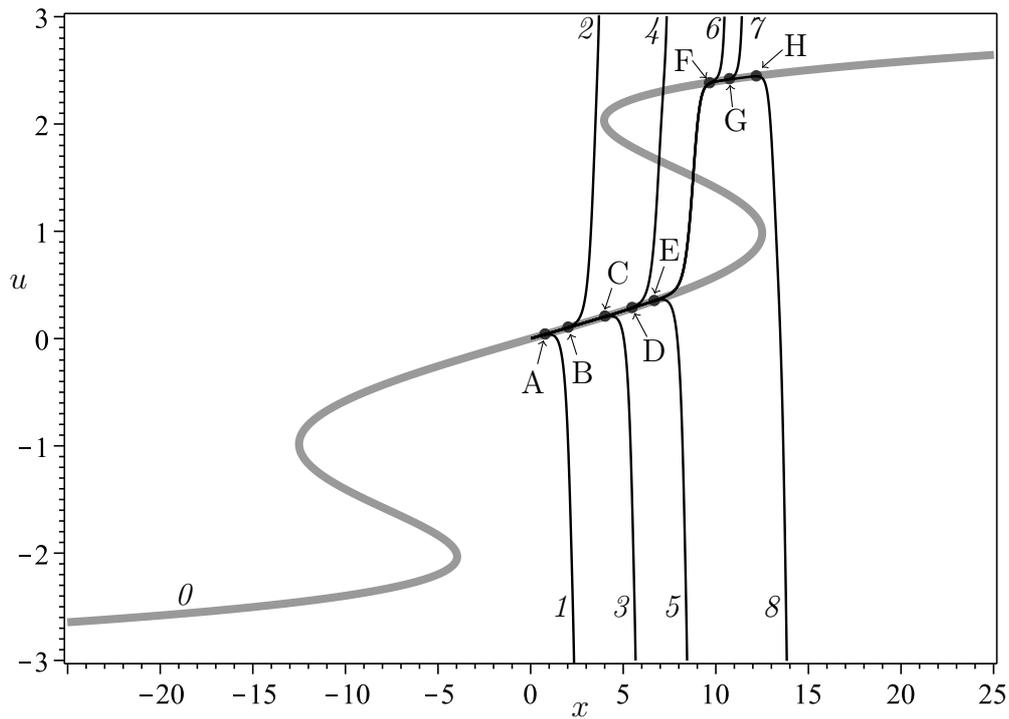


Рис. 1. Численно найденные интегральные кривые задачи Коши (3.1), (3.2) с начальными скоростями, определенными в результате процедуры бинарного поиска. Нумерация кривых: 1 — результат выполнения 10 шагов алгоритма, 2 — 20 шагов, . . . , 7 — 70 шагов, 8 — 85 шагов; 0 — линия корня уравнения (1.12). Буквами А–Н показаны точки, в которых наступает срыв соответствующей кривой 1–8.

с начальными условиями

$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = \alpha \tag{3.2}$$

и вновь, как и в статье [1], воспользоваться бинарным поиском начальной скорости α , принцип которого состоит в следующем.

Для выбираемого на m -м шаге поиска значения начальной скорости $\alpha = \alpha_m$ была найдена интегральная кривая задачи Коши (3.1), (3.2) с использованием явного метода Рунге — Кутты — Фельберга (4,5) [11] с переменным шагом интегрирования и контролем точности. Такая интегральная кривая либо проходит сквозь линию корня $u = H_+(x) = H_+(x; -20, 0, 8.5)$ и быстро уходит вверх, стремясь к $+\infty$ (первое состояние), либо, если начальная скорость (3.2) оказывается недостаточной, не может приблизиться к этой линии и срывается вниз, к $-\infty$ (второе состояние). Такая дискретность поведения интегральных кривых связана с тем, что верхняя ветвь $u = H_+(x)$ линии корня уравнения (1.12) состоит из точек отталкивания, затухающего при приближении к линии и быстро растущего при удалении от нее вверх или вниз (как, впрочем, и нижняя ветвь $u = H_-(x)$, которая в данном случае не оказывает влияния на интегральную кривую, поскольку находится левее точки $x = 0$). При этом другие части линии корня, среди которых есть и участки, состоящие из точек притяжения, являются ограниченными в горизонтальном направлении, в связи с чем оказывают влияние на поведение интегральной кривой только на ограниченном интервале значений x .

Перед запуском алгоритма поиска вручную подбирался исходный диапазон $[a_0, b_0]$ значений начальной скорости $\alpha = u_x(0)$ с единственным требованием к числам a_0, b_0 : интегральная кривая задачи (3.1), (3.2) с $\alpha = b_0$ должна находиться в первом состоянии, а кривая, соответствующая $\alpha = a_0$, — во втором состоянии. В качестве α_{m+1} всегда выбиралась середина отрезка $[a_m, b_m]$, $m = 0, 1, \dots$, а в качестве нового диапазона $[a_{m+1}, b_{m+1}]$ — тот из отрезков $[a_m, \alpha_{m+1}]$, $[\alpha_{m+1}, b_m]$, границы которого соответствуют интегральным кривым, находящимся в различных состояниях.

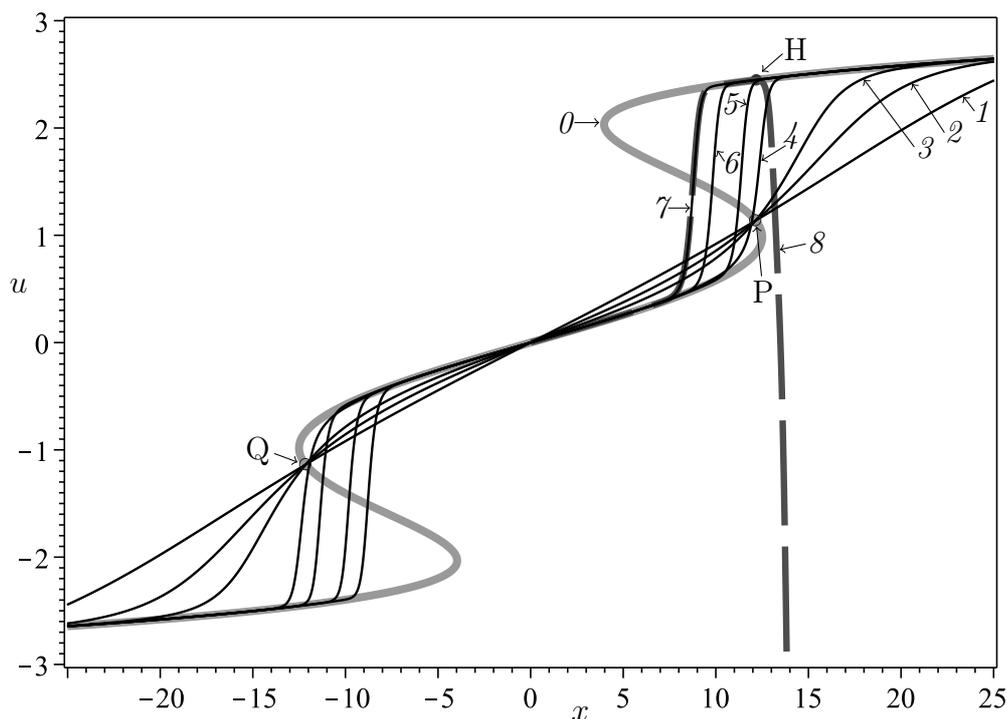


Рис. 2. Результаты применения итерационной процедуры (3.3). Нумерация кривых: 1 — результат выполнения 100 итераций, 2 — 500 итераций, 3 — 1000, 4 — 4000, 5 — 10 000, 6 — 30 000, 7 — 120 000 итераций. Кроме того, на рисунке представлены под номером 8 интегральная кривая задачи Коши (3.1), (3.2), т. е. кривая 8 рис. 1 с указанием точки срыва Н, и под номером 0 — линия корня уравнения (1.12). Буквами Р и Q отмечены точки, остающиеся неподвижными для первых 2 000 итераций.

На рис. 1 приведена интегральная кривая 8, полученная на 85-м шаге такого алгоритма при начальной скорости $\alpha = 0.0500159995213570833355675$, а также указаны интегральные кривые 1–7, найденные на некоторых предшествующих шагах (10–70). Важно подчеркнуть, что данные кривые хорошо приближают искомое решение задачи (1.10), (1.11) только до соответствующих точек срыва, обозначенных на рис. 1 буквами А–Н; части кривых, лежащие правее соответствующих точек срыва, не рассматриваются в дальнейших рассуждениях.

Использование данного метода приближения позволило за относительно небольшое количество шагов бинарного поиска получить точное представление о месте резкого скачка приближаемого решения, который происходит между абсциссами $x = 7.6$ и $x = 9.2$. Ограничения применимости этого подхода связаны с потенциальной неустойчивостью явного метода Рунге — Кутты — Фельберга (4,5) для уравнения второго порядка (1.10) с нелинейностью 5-го порядка в правой части и невозможностью его применения без знания начальной точки, что представляет затруднение при решении задачи (1.10), (1.11) для значений $z \neq 0$. Кроме того, построенные таким образом кривые хорошо приближают искомое решение лишь на небольшом интервале значений $0 < x < x_m$ и срываются вниз или вверх при $x > x_m$.

Поэтому наряду с данным методом применялась давно зарекомендовавшая себя как устойчивая схема простой итерации, не требующая знания такой начальной точки и позволяющая сразу строить кривую на широком интервале абсцисс. Была задана равномерная сетка $x[k] = k\Delta x$, $k = -K, -K + 1, \dots, K$, где $K = 3200$, $\Delta x = M^\Delta/R$, $M^\Delta = 28.7$, $R = 800$. Число M^Δ было выбрано так, чтобы, с одной стороны, при $x > M^\Delta$ функция $u = H_+(x)$ была глобально единственным корнем уравнения (1.12), а с другой — интервал $|x| < M^\Delta$ не слишком сильно превосходил зону всех основных изгибов линии корня (1.12), рядом с которыми можно было бы ожидать появления скачка решения. Начальные значения искомой функции

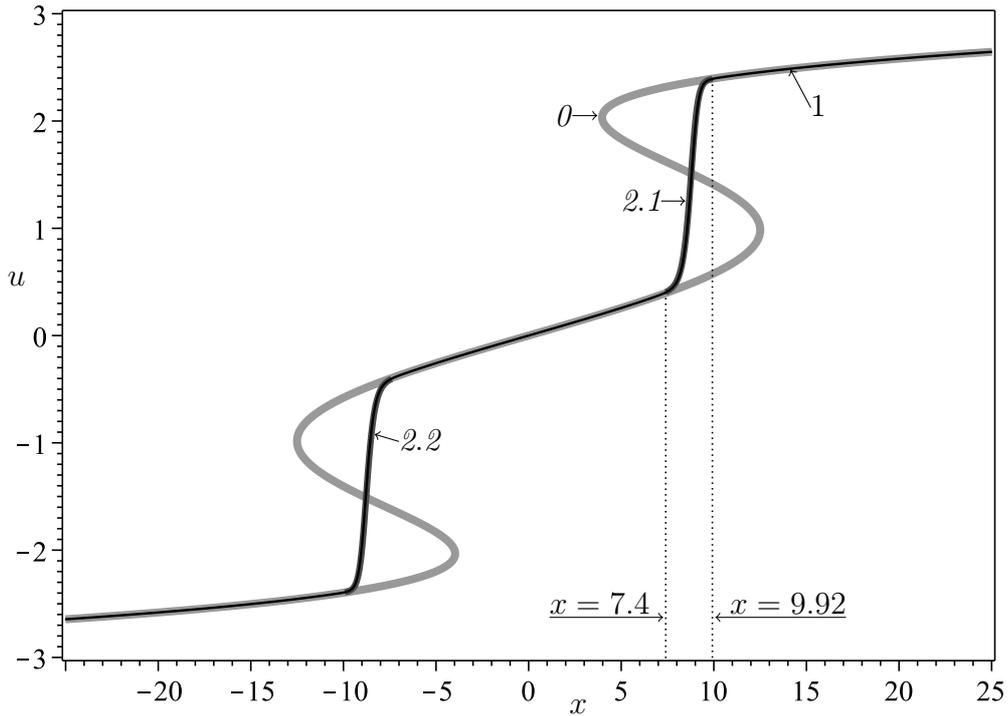


Рис. 3. Локализация ударного слоя и объединение результатов, полученных двумя методами. Здесь 1 – это линия 7 рис. 2; линия 2.1 – первый участок ударного слоя – представляет собой фрагмент кривой 8 рис. 1; линия 2.2 – второй участок ударного слоя – получена симметричным отражением линии 2.1; 0 – линия корня уравнения (1.12).

были заданы принадлежащими линии корня $u = H_{\pm}(x)$ при $|x| \geq M^{\Delta}$:

$$u[k, 0] = H_{-}(x[k]), \quad k = -K, \dots, -R, \quad u[k, 0] = H_{+}(x[k]), \quad k = R, \dots, K$$

и лежащими на соединительной прямой линии при $|x| < M^{\Delta}$:

$$u[k, 0] = k \left((u[R, 0] - u[-R, 0]) / (2R) \right) + u[-R, 0], \quad k = -R + 1, \dots, R - 1.$$

Итерационная процедура при переходе от i -го к $(i + 1)$ -му шагу была определена формулами

$$P[k, i + 1] = -f(x[k], u[k, i]) + \frac{(u[k - 1, i] - 2u[k, i] + u[k + 1, i])}{(\Delta x)^2}, \quad k = -K + 1, \dots, K - 1;$$

$$u[k, i + 1] = u[k, i] + 0.05 (\Delta x)^2 P[k, i + 1], \quad k = -K + 1 \dots, K - 1; \quad u[\pm K, i + 1] = u[\pm K, i]. \quad (3.3)$$

По этой схеме было произведено 120 000 итераций расчеты производились в системе Maple с повышенной до 80 десятичных знаков в мантиссе числа точностью вычислений; на рис. 2 выборочно представлены результаты этих вычислений. Как видно, в интервалах абсцисс, характеризующих глобальной единственностью корня уравнения (1.12), соответствующие участки кривых быстро приходят в стационарное положение, совпадающее в общих точках (и с учетом ограничения – только до точки срыва Н) с интегральной кривой 8 рис. 2.

Автору статьи представляется интересным следующее наблюдение. Для кривых, полученных на начальных (с номерами примерно до 2000) итерациях, отчетливо видны две симметрично расположенные общие точки (отмечены буквами Р и Q на рис. 2) всех этих кривых, в которых все они пересекают линию корня уравнения (1.12). При дальнейшем повторении итерационной процедуры точки пересечения кривых и линии корня перестают быть неподвижными точками Р и Q и начинают смещаться соответственно по направлениям к участкам 2.1 и 2.2, выделенным на рис. 3.

На рис. 3 произведено объединение результатов, полученных двумя методами. Под номером 1 здесь выступает линия 7 рис. 2, найденная при выполнении 120 000 итераций; она с большой точностью приближает решение задачи (1.10), (1.11) на всем рассматриваемом промежутке $|x| < 25$. Ударный слой здесь показан линиями 2.1 и 2.2, первая из которых представляет собой фрагмент кривой 8 рис. 1, являющейся интегральной кривой задачи Коши (3.1), (3.2); а линия 2.2 получена отражением по нечетности линии 2.1.

Итак двумя независимыми методами численного расчета было установлено, что ударный слой для решения задачи (1.10), (1.11) может иметь локализацию вне конечной окрестности точки $x = 0$. Для рассмотренного выше примера (3.1), согласно рис. 3, таких ударных слоев два, они расположены симметрично, приблизительно в интервалах $7.4 < x < 9.92$ и $-9.92 < x < -7.4$, и гарантированно не входят в пределы окрестности нуля $|x| < 6.5$.

4. Заключение

В работе рассмотрено трехмерное нелинейное волновое уравнение с плавным изменением источникового члена уравнения во времени и в пространстве за счет наличия малого параметра. В рамках метода согласования асимптотических разложений произведен анализ поведения решения этого УЧП около типичной точки катастрофы типа “бабочка”. Исследование было сфокусировано на нелинейном ОДУ второго порядка, зависящем от трех параметров, которому должен удовлетворять главный член внутреннего асимптотического разложения, построенного вблизи точки катастрофы. Была доказана теорема о равномерной на ограниченном множестве изменения параметров асимптотике на бесконечности по независимой переменной специального решения, описывающего быструю перестройку решения исходного УЧП в малой окрестности точки катастрофы, согласующегося с разложением во внешнем слое. Кроме того, в статье приведен пример значений параметров, при которых ударный слой локализуется вне конечной окрестности нуля. Возможность возникновения такой ситуации представляет собой существенное отличие катастрофы типа “бабочка” от исследованной ранее катастрофы типа “сборка”.

Автор выражает глубокую признательность Б. И. Сулейманову за полезные советы и обсуждение результатов работы, а также Р. Н. Гарифуллину за ценные замечания о процедуре метода простой итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Khachay O.Y., Nosov P.A.** On some numerical integration curves for PDE in neighborhood of “butterfly” catastrophe point // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 127–140.
<https://umjuran.ru/index.php/umj/article/view/66>. doi: 10.15826/umj.2016.2.011.
2. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.** Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // *Фундамент. и прикл. математика*. 1998. Т. 4, № 3. С. 799–851.
3. **Сулейманов Б.И.** Катастрофа сборки в медленно меняющихся положениях равновесия // *Журн. эксперимент. и теор. физики*. 2002. Т. 122, № 5 (11). С. 1093–1106.
4. **Ильин А.М., Сулейманов Б.И.** О двух специальных функциях, связанных с особенностью сборки // *Докл. РАН*. 2002. Т. 387, № 2. P. 156–158.
5. **Ильин А.М., Сулейманов Б.И.** Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки // *Мат. сб.* 2004. Т. 195, № 12. С. 27–46.
6. **Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А.** Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. Эволюция диссипативных структур. М.: Наука, 1987, 352 с.
7. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989, 336 с.
8. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф. Т.1 М: Мир, 1984. 350 с.
9. **Владимиров В.С., Жаринов В.В.** Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

10. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. 4-е, исправленное изд. М.: МЦНМО, 2002. 664 с.
11. Fehlberg E. Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control // NASA Technical Report R-315. 1969. 43 p.

Хачай Олег Юрьевич
канд. физ.-мат. наук,
доцент

Поступила 21.02.2017

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: khachay@yandex.ru

REFERENCES

1. Khachay O. Y., Nosov P.A. On some numerical integration curves for PDE in neighborhood of “butterfly” catastrophe point. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 127–140.
<https://umjuran.ru/index.php/umj/article/view/66>. doi: 10.15826/umj.2016.2.011.
2. Vasil’eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N. Contrast structures in singularly perturbed problems. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 799–851 (in Russian).
3. Suleimanov B.I. Cusp catastrophe in slowly varying equilibriums. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2002, vol. 95, no. 5, pp. 944–956. doi: 10.1134/1.1528687.
4. П’ин А.М., Сuleimanov B.I. On two special functions related to fold singularities. *Doklady Mathematics*, 2002, vol. 66, no. 3, pp. 327–329.
5. П’ин А.М., Сuleimanov B.I. *Birth of step-like contrast structures connected with a cusp catastrophe*. *Sbornik Mathematics*, 2004, vol. 195, no. 12, pp. 1727–1746. doi: 10.1070/SM2004v195n12ABEH000863.
6. Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. *Mathematical modelling of heat and mass transfer processes*. Ser. Mathematics and its Appl., vol. 348, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1995, 316 p. ISBN: 0-7923-3789-1. Transl. from the 1987 Russian original *Matematicheskoe modelirovanie protsessov teplomassoperenosa. Evolyutsiya dissipativnykh struktur*, Moscow, Nauka Publ., 1987, 352 p.
7. П’ин А.М. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Ser. Transl. Math. Monogr, vol. 102, Providence, Amer. Math. Soc., 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevykh zadach* Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
8. Gilmore R. *Catastrophe theory for scientists and engineers*. New York: Dover Publications, 1993, 666 p. ISBN: 0486675394. A reprint of the Wiley edition of 1981. Translated under the title *Prikladnaja teorija katastrof*. Vol. 1. M: Mir Publ., 1984. 350 p.
9. Vladimirov V.S., Jarinov V.V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 400 p. ISBN: 5-9221-0310-5.
10. Zorich Vladimir A. *Mathematical Analysis I*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2004, 574 p. ISBN: 978-3-540-87451-5. Original Russian text published in *Matematicheskij analiz. Ch. I*. Moscow Publ.: MCNMO, 2002, 664 p.
11. Fehlberg E. Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control. *NASA Technical Report R-315*, 1969, 43 p.

The paper was received by the Editorial Office on February 21, 2017.

Oleg Jur’evich Khachay, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: khachay@yandex.ru