ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.955.8

# ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОГРАНФУНКЦИЙ ДЛЯ БИСИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ В КРУГЕ

**Д. А. Турсунов**

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций. Работа посвящена построению полных асимптотических разложений решений бисингулярных краевых задач для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка. Особенности уравнения заключаются в присутствии малого параметра при операторе Лапласа и в том, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение имеет особенности на границе и внутри круга одновременно. Бисингулярные задачи Дирихле, Неймана и Робэна исследуются в круге. Полное асимптотическое разложение решения бисингулярных задач строится обобщенным методом пограничных функций. Предлагаемый обобщенный метод пограничных функций отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательных асимптотических рядов полностью вносятся во внутренние разложения. Полученные решения являются асимптотическими в смысле Эрдей. Асимптотические ряды также представляют собой ряды Пюизё. Причем главные члены асимптотических разложений решений имеют отрицательные дробные степени по малому параметру. Полученные асимптотические разложения решений краевых задач обоснованы принципом максимума.

Ключевые слова: асимптотическое разложение решения, бисингулярная задача, эллиптическое уравнение второго порядка, модифицированные функции Бесселя, задача Дирихле, задача Неймана, задача Робэна, обобщенный метод погранфункций, малый параметр, принцип максимума.

**D. A. Tursunov. The generalized boundary function method for bisingular problems in a disk.**

The aim of the research is the development of the asymptotic method of boundary functions. This work is devoted to constructing complete asymptotic expansions of the solutions of boundary value problems for a bisingular inhomogeneous linear second-order elliptic equation. The equation has the following singularities: there is a small parameter at the Laplace operator and the corresponding unperturbed (limit) equation has singularities both at the boundary of the disk and inside it. Bisingular Dirichlet, Neumann and Robin problems are studied in the disk. Complete asymptotic expansions of the solutions of the bisingular problems are constructed by the generalized method of boundary functions, which differs from the matching method in that the growing singularities of the outer expansion are actually removed from it and included in the inner expansions with the help of auxiliary asymptotic series. The resulting solutions are asymptotic in the sense of Erdelyi, and the asymptotic expansions are Puiseux series. The leading terms of the asymptotic expansions of the solutions are negative fractional powers of the small parameter. The obtained asymptotic expansions of the solutions of the boundary value problems are justified by means of the maximum principle.

Keywords: asymptotic expansion of the solution, bisingular problem, second-order elliptic equation, modified Bessel functions, Dirichlet problem, Neumann problem, Robin problem, generalized boundary function method, small parameter, maximum principle.

**MSC**: 35J15, 35J25, 35B25, 35B40, 35C20

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-239-249

## 1. Введение

Краевые задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных занимают в математике особое место. К ним непосредственно сводятся многие задачи естествознания. Различные задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовали многие авторы, и библиография по этому вопросу обширна и достаточно известна. Однако в последнее время внимание исследователей стали привлекать так называемые бисингулярные задачи, в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая заключается в том, что соответствующее невозмущенное уравнение имеет негладкое решение [1–3].

В работах [1;4–6] и в цитируемых в них работах методом согласования исследованы асимптотические поведения решений различных классов бисингулярных задач. А в [7;8] с помощью обобщенного метода пограничных функций были рассмотрены различные бисингулярные задачи Дирихле. Мы продолжаем исследование бисингулярных задач с помощью обобщенного метода пограничных функций.

В данной работе доказывается применимость данного метода к задачам Неймана и Робэна и обобщается результат работы [7].

## 2. Постановка задачи

Исследуем задачи, порожденные уравнением

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi)-(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)u_\varepsilon(\rho,\varphi)=f_\varepsilon(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

и одним из граничных условий вида

$$u_\varepsilon(1,\varphi)=\psi_{1,\varepsilon}(\varphi), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon(1,\varphi)}{\partial\rho}=\psi_{2,\varepsilon}(\varphi), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon(1,\varphi)}{\partial\rho}+h(\varphi)u_\varepsilon(1,\varphi)=\psi_{3,\varepsilon}(\varphi). \tag{4}$$

Здесь $u_\varepsilon(\rho,\varphi)$ — искомая функция; $\varepsilon>0$ — малый параметр, $0<\alpha<1$, $n,\ m\in\mathbb{N}$;
$\psi_\varepsilon(\varphi)$, $f_\varepsilon(\rho,\varphi)$, $p(\rho,\varphi)$ — заданные функции;
$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial}{\rho\partial\rho}+\dfrac{\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат $(\rho,\varphi)$;
$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,0<\rho<1,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, $p(\rho,\varphi)>0$, $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$, $p\in C^\infty(\overline{D})$;
$h(\varphi)\leqslant 0$, $h\in C^\infty[0,2\pi]$;
$\psi_{j,\varepsilon}(\varphi)=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\psi_{j,k}(\varphi)$, $\psi_{j,k}\in C^\infty[0,2\pi]$, $j=1,2,3$;
$f_\varepsilon(\rho,\varphi)=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi)$, $f_k\in C^\infty(\overline{D})$, $f_0(1,\varphi)\neq 0$, $f_0(\alpha,\varphi)\neq 0$.

В дальнейшем ряды, используемые в статье, являются асимптотическими разложениями соответствующих функций.

Задача (1), (2) — задача Дирихле (первая краевая задача), (1), (3) — задача Неймана (вторая краевая задача) и (1), (4) — задача Робэна (третья краевая задача).

В работе [7] исследована задача Дирихле в случае $n=1$, $m=1$, $p(\rho,\varphi)\equiv 1$.

Если к вышеперечисленным задачам Дирихле, Неймана и Робэна применить преобразование

$$u_\varepsilon(\rho,\varphi)=z(\rho)\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi),\quad \text{где } z(\rho)=1-\rho^2/2>0,$$

то относительно $\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)$ получим задачи, порожденные уравнением

$$\varepsilon\Delta\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)-\frac{2\varepsilon\rho}{z(\rho)}\frac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-\Big((1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)+\frac{2\varepsilon}{z(\rho)}\Big)\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)=\frac{f_\varepsilon(\rho,\varphi)}{z(\rho)},\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

и одним из граничных условий вида, соответственно

$$\widetilde{u}_\varepsilon(1,\varphi)=2\psi_{1,\varepsilon}(\varphi),$$

$$\frac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon(1,\varphi)}{\partial\rho}-2\widetilde{u}_\varepsilon(1,\varphi)=2\psi_{2,\varepsilon}(\varphi),$$

$$\frac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon(1,\varphi)}{\partial\rho}-(2-h(\varphi))\widetilde{u}_\varepsilon(1,\varphi)=2\psi_{3,\varepsilon}(\varphi).$$

Заметим, что $(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)+2\varepsilon/z(\rho)>0$ при $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$ и $\varepsilon>0$. Поэтому решения этих задач существуют, единственны [9], и для решения задач Дирихле, Неймана, Робэна справедлива оценка $u_\varepsilon(\rho,\varphi)=O(1/\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0,\quad (\rho,\varphi)\in\overline{D}$.

*Особенности задач.* Первая сингулярность — решение предельного уравнения ($\varepsilon=0$)

$$u(\rho,\varphi,0)=-\frac{f_0(\rho,\varphi)}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)}$$

не удовлетворяет краевым условиям.

Вторая сингулярность — решение предельного уравнения не является гладкой функцией, внешнее разложение решения задач в виде степенных по $\varepsilon$ рядов имеют особенности вида

$$U_\varepsilon(\rho,\varphi)=\frac{1}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\varepsilon^k F_k(\rho,\varphi)}{(1-\rho)^{(n+2)k}(\rho-\alpha)^{(2m+2)k}},\quad \varepsilon\to 0,$$

где $F_k\in C^\infty(\overline{D})$.

Значит, данные задачи являются бисингулярными по терминологии А. М. Ильина [1; 2].

Требуется построить полные асимптотические разложения решений задач Дирихле, Неймана и Робэна. Для этого сначала построим формальные асимптотические разложения решений (ФАРР) этих задач, а потом приведем обоснования этих разложений.

## 3. Построение ФАРР

ФАРР для всех 3 задач ищем в виде

$$u_\varepsilon(\rho,\varphi)=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\chi_1(\rho)\sum_{k\geqslant -n}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+\chi_2(\rho)\sum_{k\geqslant -2m}\lambda^k q_k(\eta,\varphi),\quad \varepsilon\to 0, \tag{5}$$

Здесь $1-\rho=\mu\tau$; $\rho-\alpha=\lambda\eta$; $\mu=\sqrt[n+2]{\varepsilon}$; $\lambda=\sqrt[2m+2]{\varepsilon}$; $\chi_{1,2}(\rho)$ — функции срезки; $\chi_{1,2}(\rho)\in[0,1]$; $\chi_{1,2}\in C^\infty[0,1]$;

$$\chi_1(\rho)=1\quad \text{при}\quad 0\leqslant 1-\rho\leqslant\delta/3,\quad \text{и}\quad \chi_1(\rho)=0\quad\text{при}\quad 2\delta/3\leqslant 1-\rho;$$

$$\chi_2(\rho)=1\quad \text{при}\quad |\rho-\alpha|\leqslant\delta/3,\quad \text{и}\quad \chi_2(\rho)=0\quad\text{при}\quad 2\delta/3\leqslant|\rho-\alpha|,$$

$(0,\min\{\alpha/2,(1-\alpha)/2\})\ni\delta$ — достаточно малое число, независящее от $\varepsilon$.

Подставляя соотношение (5) в уравнение (1) получим

$$\Delta v_{k+1}(\rho,\varphi)+\widetilde{v}_{k+1}(\rho,\varphi)-(1-\rho)^n(\alpha-\rho)^{2m}p(\rho,\varphi)v_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi), \tag{6}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\mu^k\Big(\frac{\partial^2 w_{k-n}(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\frac{\mu}{1-\mu\tau}\frac{\partial w_{k-n}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(1-\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w_{k-n}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}$$
$$-\tau^n(1-\alpha-\mu\tau)^{2m}p(1-\tau\mu,\varphi)w_{k-n}(\tau,\varphi)\Big)=\sum_{k\geqslant 0}\mu^{(n+2)k}h_k^1(1-\tau\mu,\varphi), \tag{7}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\lambda^k\Big(\frac{\partial^2 q_{k-2m}(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}+\frac{\lambda}{\alpha+\lambda\eta}\frac{\partial q_{k-2m}(\eta,\varphi)}{\partial\eta}+\frac{\lambda^2}{(\alpha+\lambda\eta)^2}\frac{\partial^2 q_{k-2m}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}$$
$$-\eta^{2m}(1-\alpha-\lambda\eta)^n p(\alpha+\lambda\eta,\varphi)q_{k-2m}(\eta,\varphi)\Big)=\sum_{k\geqslant 0}\lambda^{(2m+2)k}h_k^\alpha(\alpha+\eta\lambda,\varphi). \tag{8}$$

В равенствах (6)–(8) введены новые, пока неизвестные, “регуляризующие” асимптотические ряды

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)=\chi_1(\rho)\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k h_k^1(\rho,\varphi)+\chi_2(\rho)\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k h_k^\alpha(\rho,\varphi),$$

они конкретизируются ниже, а функции $\widetilde{v}_k(\rho,\varphi)$ в равенстве (6) имеют вид

$$\widetilde{v}_k(\rho,\varphi)=\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_1(\rho)+2\frac{\partial\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_1'(\rho)+\widetilde{q}_k(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_2(\rho)+2\frac{\partial\widetilde{q}_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_2'(\rho),$$

$$\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{(n+2)k}\frac{w_{j-n,(n+2)k+n-j}(\varphi)}{(1-\rho)^{(n+2)k+n-j}},\quad \widetilde{q}_k(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{(2m+2)k}\frac{q_{j-2m,(2m+2)k+2m-j}(\varphi)}{(\rho-\alpha)^{(2m+2)k+2m-j}},$$

$\widetilde{\chi}_j(\rho)=\chi_j''(\rho)+\dfrac{\chi_j'(\rho)}{\rho}$, функции $w_{j,k},\ q_{j,k}\in C^\infty[0,2\pi]$ определяются из асимптотических разложений

$$w_{(n+2)k-l}(\tau,\varphi)=\sum_{j\geqslant 0}\frac{w_{(n+2)k-l,(n+2)j+l}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j+l}},\quad l=1,2,\dots,n+2,\quad k\in N_0=\mathbb{N}\cup\{0\},\quad \tau\to+\infty,$$

$$q_{(2m+2)k-l}(\eta,\varphi)=\sum_{j\geqslant 0}\frac{q_{(2m+2)k-l,(2m+2)j+l}(\varphi)}{\eta^{(2m+2)j+l}},\quad l=1,2,\dots,2m+2,\quad \eta\to\pm\infty.$$

Справедливость этих асимптотических разложений доказывается ниже.

Для функции $v_k(\rho,\varphi)$, из равенства (6) получаем

$$v_k(\rho,\varphi)=-\frac{g_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)}+\frac{\widetilde{v}_{k-1}(\rho,\varphi)}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)},\quad k\in N_0,$$

где $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi),\ v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0,\ \widetilde{v}_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0$.

Определим теперь коэффициенты асимптотического ряда $h_k(\rho,\varphi)$ так, чтобы

$$v_k\in C^\infty(\overline{D}),\quad \lim_{\tau\to+\infty}w_k(\tau,\varphi)=0,\quad \lim_{\eta\to\pm\infty}q_k(\eta,\varphi)=0.$$

Отсюда $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, когда

$$h_k^1(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{n-1}g_{k,j}(\varphi)(1-\rho)^j+\sum_{j\geqslant n}h_{k,j}^1(\varphi)(1-\rho)^j,$$

$$h_k^\alpha(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{2m-1}\widetilde{g}_{k,j}(\varphi)(\rho-\alpha)^j+\sum_{j\geqslant 2m}h_{k,j}^\alpha(\varphi)(\rho-\alpha)^j,$$

где $g_{k,j}(\varphi)=(-1)^j\dfrac{\partial^j g_k(1,\varphi)}{j!\partial\rho^j}$, $\widetilde{g}_{k,j}(\varphi)=\dfrac{\partial^j g_k(\alpha,\varphi)}{j!\partial\rho^j}$, а $h_{k,j}^1(\varphi),\ h_{k,j}^\alpha(\varphi)$ конкретизируются ниже при определении $w_k(\tau,\varphi),\ q_k(\eta,\varphi)$.

Теперь перейдем к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k\geqslant -n}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$. Равенство (7) запишем в виде

$$\sum_{k\geqslant 0}\mu^k\Big(\frac{\partial^2 w_{k-n}(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\frac{\partial w_{k-n-1}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 w_{k-n-2}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}-\sum_{j=0}^{k}a_j(\varphi)\tau^{j+n}w_{k-n-j}(\tau,\varphi)\Big)$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}\mu^{(n+2)k}\sum_{j\geqslant 0}(\mu\tau)^j h_{k,j}^1(\varphi),$$

Здесь $a(\rho,\varphi):=(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)$; $a(\rho,\varphi)=\sum_{k\geqslant 0}a_k(\varphi)(1-\rho)^k$ — ее асимптотическое разложение по $\{(1-\rho)^k\}$; $a_k(\varphi)=(-1)^k\dfrac{\partial^k a(1,\varphi)}{k!\partial\rho^k}$; $a_0(\varphi)>0$; $h_{k,j}^1(\varphi)=g_{k,j}(\varphi)$, $j=0,1,\dots,n-1$.

Отсюда имеем

$$Lw_{-n} \equiv \frac{\partial^2 w_{-n}(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2} - \tau^n a_0(\varphi) w_{-n}(\tau,\varphi) = h^1_{0,0}(\varphi), \quad (\tau,\varphi)\in D_1; \tag{9}$$

$$Lw_{(n+2)k-n+j} = P_{(n+2)k-n+j}(\tau,\varphi),\ k\in N_0, \quad j=1,\dots,n+1,\ (\tau,\varphi)\in D_1, \tag{10}$$

где $D_1 = \{(\tau,\varphi)\,|\,0<\tau<+\infty, 0\leqslant\varphi<2\pi\}$;

$$P_{(n+2)k-n+j}(\tau,\varphi) = \sum_{s=1}^{(n+2)k+j} a_s(\varphi)\tau^{s+n} w_{(n+2)k+j-s-n}(\tau,\varphi)$$

$$+\sum_{s=0}^{k}\tau^{(n+2)(k-s)+j} h^1_{s,(n+2)(k-s)+j}(\varphi) + \frac{\partial w_{(n+2)(k-1)+j+1}(\tau,\varphi)}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 w_{(n+2)(k-1)+j}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}.$$

Равенства (2)–(4) порождают граничные условия соответственно

$$w_{(n+2)k}(0,\varphi) = \psi_{1,k}(\varphi) - v_k(1,\varphi), \quad k\in N_0, \quad w_s(0,\varphi)=0, \quad s\neq(n+2)k; \tag{11}$$

$$\frac{\partial w_{(n+2)k+1}(0,\varphi)}{\partial\tau} = \frac{\partial v_k(1,\varphi)}{\partial\rho} - \psi_{2,k}(\varphi), \quad k\in N_0, \quad \frac{\partial w_s(0,\varphi)}{\partial\tau}=0, \quad s\neq(n+2)k+1; \tag{12}$$

$$\frac{\partial w_{(n+2)k+1}(0,\varphi)}{\partial\tau} = h(\varphi)(v_k(1,\varphi)+w_{(n+2)k}(0,\varphi)) + \frac{\partial v_k(1,\varphi)}{\partial\rho} - \psi_{3,k}(\varphi), \quad k\in N_0,$$

$$\frac{\partial w_s(0,\varphi)}{\partial\tau}=0, \quad s\neq(n+2)k+1. \tag{13}$$

Разрешимость и единственность решений задач (9), (10) основаны на следующем утверждении.

**Лемма 1.** *Пусть* $F(\tau)\Phi(\varphi)\in C^\infty(\overline{D_1})$, $a(\varphi)>0$,

$$\frac{\partial^2 z(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2} - \tau^n a(\varphi) z(\tau,\varphi) = F(\tau)\Phi(\varphi), \quad (\tau,\varphi)\in D_1, \tag{14}$$

$$z(0,\varphi) = z^0(\varphi), \tag{15}$$

$$\frac{\partial z(0,\varphi)}{\partial\tau} = z^1(\varphi). \tag{16}$$

*Тогда задачи (14), (15) и (14), (16) имеют единственные решения* $z(\tau,\varphi)\in C^\infty(\overline{D_1})$ *в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени* $\tau$, *когда* $\tau\to+\infty$.

Доказательство. Положим $t = \sqrt[n+2]{a(\varphi)}\,\tau$, тогда уравнение (14) примет вид

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - t^n z(t,\varphi) = \frac{F(t)\Phi(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a^2(\varphi)}}.$$

Решения задач (14), (15) и (14), (16) ищем в виде $z(t,\varphi) = \widetilde{z}(t)\dfrac{\Phi(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a^2(\varphi)}}$, тогда относительно $\widetilde{z}(t)$ получим задачи соответственно

$$\widetilde{z}''(t) - t^n\widetilde{z}(t) = F(t), \quad \widetilde{z}(0)=\widetilde{z}^0, \quad t\in(0,+\infty);$$

$$\widetilde{z}''(t) - t^n\widetilde{z}(t) = F(t), \quad \widetilde{z'}(0)=\widetilde{z}^1, \quad t\in(0,+\infty).$$

Как известно [10], уравнение $\widetilde{z}''(t) - t^n\widetilde{z}(t) = 0$ имеет два независимых решения: $z_1(t) = \sqrt{t}I_{1/2p}(t^p/p)$, $z_2(t) = \sqrt{t}K_{1/2p}(t^p/p)$, где $2p=n+2$, $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$ — модифицированные функции Бесселя. Отметим известные важные свойства функций $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$, $0<\nu<1$:

a) $I_\nu(s) \sim \dfrac{e^s}{\sqrt{2\pi s}},\ K_\nu(s) \sim e^{-s}\sqrt{\dfrac{\pi}{2s}},\ s \to +\infty$; b) $I_\nu(0) = 0,\ K_\nu(s) = O(1/s^\nu),\ s \to 0$;

c) Вронскиан $W(I_\nu(s), K_\nu(s)) = -1/s$.

Из этих свойств следует, что

$$z_1(t) \sim \sqrt{\frac{p}{2\pi}}t^{\frac{1-p}{2}}e^{t^p/p}, \quad z_2(t) \sim \sqrt{\frac{p\pi}{2}}t^{\frac{1-p}{2}}e^{-t^p/p},\ t \to +\infty;$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_1'(0) = O(1), \quad z_2(t) = O(1), \quad z_2'(t) = O(1),\ t \to 0, \quad W(z_1(t), z_2(t)) = -1.$$

Таким образом, решения задач (14), (15) и (14), (16) имеют вид соответственно

$$z(t,\varphi) = \frac{z^0(\varphi)}{z_2(0)}z_2(t) - \frac{\Phi(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a^2(\varphi)}}\left(z_2(t)\int_0^t F(s)z_1(s)ds + z_1(t)\int_t^{+\infty} F(s)z_2(s)ds\right)$$

и

$$z(t,\varphi) = \frac{c(\varphi)}{z_2'(0)}z_2(t) - \frac{\Phi(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a^2(\varphi)}}\left(z_2(t)\int_0^t F(s)z_1(s)ds + z_1(t)\int_t^{+\infty} F(s)z_2(s)ds\right),$$

где $c(\varphi) = \left(\dfrac{z^1(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a(\varphi)}} + \dfrac{z_1'(0)\Phi(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a^2(\varphi)}}\displaystyle\int_0^{+\infty} F(s)z_2(s)ds\right),\quad t = \sqrt[n+2]{a(\varphi)}\tau.$

Отсюда получим, что если $F(\tau) = O(\tau^k),\ \tau \to +\infty$, то $z(\tau,\varphi) = O(\tau^{k-n}),\ \tau \to +\infty$. □

С помощью леммы 1 стандартным образом доказаны существование и единственность решений задач (9), (10), (11); (9), (10), (12); (9), (10), (13) в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени $\tau$.

Асимптотическое разложение решений задач (9), (10) дает

**Лемма 2.** *Пусть $0 < a(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$ и функции $p_j(\tau,\varphi) \in C^\infty(\overline{D_1})$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$p_j(\tau,\varphi) = \tau^{n-1}\sum_{k\geqslant 0}\frac{p_{j,(n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad j = 0,1,\ldots,n+1, \quad \tau \to +\infty.$$

*Тогда в области $D_1$ существуют решения уравнений*

$$\frac{\partial^2 z_j(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2} - \tau^n a(\varphi)z_j(\tau,\varphi) = p_j(\tau,\varphi), \quad j = 0,1,\ldots,n+1, \quad \tau \to +\infty, \tag{17}$$

*которые разлагаются в асимптотические ряды*

$$z_j(\tau,\varphi) = \frac{1}{\tau}\sum_{k\geqslant 0}\frac{z_{j,(n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad j = 0,1,\ldots,n+1, \quad \tau \to +\infty. \tag{18}$$

*При этом ряды* (18) *можно многократно почленно дифференцировать, и они являются асимптотическими разложениями решений уравнений* (17).

Доказательство. Нетрудно заметить, что дифференцируемость рядов (18) вытекает непосредственно из уравнений (17). ФАРР ищем в виде (18), где $z_{j,k}(\varphi)$ — пока неизвестные функции.

Подставляя ряды (18) в уравнения (17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\tau$, получаем рекуррентные системы уравнений для $z_{j,k}(\varphi)$: $-z_{j,j}(\varphi)a(\varphi) = p_{j,j}(\varphi)$,

$$((n+2)k+j+1)((n+2)k+j+2)z_{j,(n+2)k+j}(\varphi) - z_{j,(n+2)(k+1)+j}(\varphi)a(\varphi) = p_{j,(n+2)(k+1)+j}(\varphi).$$

Отсюда найдем

$$z_{j,j}(\varphi) = -p_{j,j}(\varphi)/a(\varphi),$$

$$z_{j,(n+2)(k+1)+j}(\varphi) = ((n+2)k+j+1)((n+2)k+j+2)z_{j,(n+2)k+j}(\varphi) - p_{j,(n+2)(k+1)+j}(\varphi))/a(\varphi).$$

Теперь оценим остаточные члены рядов (18):

$$r_j(\tau,\varphi) = z_j(\tau,\varphi) - \frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{s}\frac{z_{j,(n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad \tau \to +\infty.$$

Для остаточных членов получим уравнения

$$\frac{\partial^2 r_j(\tau,\varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n a(\varphi) r_j(\tau,\varphi) = O(1/\tau^{(n+2)s+3+j}), \quad \tau \to +\infty.$$

Учитывая лемму 1, получаем оценку для остаточных членов

$$r_j(\tau,\varphi) = O(1/\tau^{(n+2)(s+1)+j+1}), \quad \tau \to +\infty.$$

Следовательно, ряды (18) действительно являются асимптотическими разложениями решений уравнений (17). □

Для получения асимптотик решений соответствующих задач справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** *Пусть*

$$h^1_{k,n+j}(\varphi) = -\sum_{s=1}^{(n+2)k+n} a_{s+j}(\varphi) w_{(n+2)k-s,s}(\varphi), \quad k,j \in N_0.$$

*Тогда при $\tau \to +\infty$ справедливы асимптотические разложения*

$$w_{(n+2)k+s}(\tau,\varphi) = \sum_{j\geqslant 1}\frac{w_{(n+2)k+s,(n+2)j-s}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j-s}}, \quad s = 0,1,\ldots,n+1, \quad k = -1,0,1,\ldots.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя лемму 2 для уравнения (9), получаем

$$w_{-n}(\tau,\varphi) = \sum_{j\geqslant 1}\frac{w_{-n,(n+2)j-2}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j-2}}, \quad \tau \to +\infty. \tag{19}$$

Здесь $w_{-n,n}(\varphi) = -\dfrac{h^1_{0,0}(\varphi)}{a_0(\varphi)}$, $w_{-n,(n+2)k+n}(\varphi) = \dfrac{((n+2)k-2)((n+2)k-1)w_{-n,(n+2)k-2}(\varphi)}{a_0(\varphi)}$, $k \in N$.

Точно так же, применяя лемму 2 для уравнений (10) при $k=0$, $j = 1,2,\ldots,n-1$, получим

$$w_{j-n}(\tau,\varphi) = \sum_{s\geqslant 0}\frac{w_{j-n,n-j+(n+2)s}(\varphi)}{\tau^{n-j+(n+2)s}}, \quad j = 1,2,\ldots,n-1, \quad \tau \to +\infty. \tag{20}$$

Теперь в остальных уравнениях (10) мы должны выбрать неизвестные функции $h^1_{k,j}(\varphi)$ так, чтобы максимальная степень разложения правых частей равенств (10) по $\tau$ не превышало $n-1$ при $\tau \to +\infty$. Подробно рассмотрим один конкретный случай выбора $h^1_{k,j}(\varphi)$, остальные выбираются аналогичным образом. Рассмотрим правую часть равенства (10) при $k=0$, $j=n$:

$$P_0(\tau,\varphi) = \sum_{s=1}^{n} a_s(\varphi)\tau^{s+n} w_{-s}(\tau,\varphi) + \tau^n h^1_{0,n}(\varphi) + \frac{\partial w_{-1}(\tau,\varphi)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{-2}(\tau,\varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Учитывая разложения (19), (20) и $h^1_{0,n} = -\sum_{s=1}^n a_s(\varphi)w_{-s,s}(\varphi)$, получаем

$$P_0(\tau,\varphi) = \sum_{j\geqslant 0} \frac{p_{0,(n+2)j+2}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j+2}}.$$

В силу леммы 2 имеем $w_0(\tau,\varphi) = \sum_{j\geqslant 1} \dfrac{w_{0,(n+2)j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j}}$. Аналогично доказываются и остальные случаи. □

Перейдем к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k\geqslant -2m} \lambda^k q_k(\eta,\varphi)$. Равенство (8) запишем в виде

$$\sum_{k\geqslant 0} \lambda^k \Big( \frac{\partial^2 q_{k-2m}(\eta,\varphi)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_{k-2m-1}(\eta,\varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 q_{k-2m-2}(\eta,\varphi)}{\partial \varphi^2} - \sum_{j=0}^{k} b_j(\varphi)\eta^{j+2m} w_{k-2m-j}(\eta,\varphi)\Big)$$
$$= \sum_{k\geqslant 0} \lambda^{(2m+2)k} \sum_{j\geqslant 0} (\mu\eta)^j h^\alpha_{k,j}(\varphi),$$

Здесь $b(\rho,\varphi) = (1-\rho)^n p(\rho,\varphi)$; $b(\rho,\varphi) = \sum_{k\geqslant 0} b_k(\varphi)(\rho-\alpha)^k$; $b_k(\varphi) = \dfrac{\partial^k b(\alpha,\varphi)}{k!\partial\rho^k}$; $b_0(\varphi) > 0$; $h^\alpha_{k,j}(\varphi) = \widetilde{g}_{k,j}(\varphi)$, $j = 0,1,\dots,2m-1$.

Отсюда имеем

$$\tilde{L}q_{-2m} \equiv \frac{\partial^2 q_{-2m}(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2} - \eta^{2m} b_0(\varphi) q_{-2m}(\eta,\varphi) = h^\alpha_{0,0}(\varphi), \quad (\eta,\varphi)\in D_2; \tag{21}$$

$$\tilde{L}q_{(2m+2)k-2m+j} = \widetilde{P}_{(2m+2)k-2m+j}(\eta,\varphi), \quad k\in N_0, \quad j = 1,\dots,2m+1, \quad (\eta,\varphi)\in D_2, \tag{22}$$

где $D_2 = \{(\eta,\varphi)\,|\,-\infty < \eta < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$;

$$\widetilde{P}_{(2m+2)k-2m+j}(\eta,\varphi) = \sum_{s=1}^{(2m+2)k+j} b_s(\varphi)\eta^{s+n} q_{(2m+2)k+j-s-2m}(\eta,\varphi)$$

$$+ \sum_{s=0}^{k} \eta^{(2m+2)(k-s)+j} h^\alpha_{s,(2m+2)(k-s)+j}(\varphi) + \frac{\partial q_{(2m+2)(k-1)+j+1}(\eta,\varphi)}{\partial\eta} - \frac{\partial^2 q_{(2m+2)(k-1)+j}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}.$$

Разрешимость и единственность решений задач (21), (22) основаны на следующем утверждении.

**Лемма 4.** *Пусть $F(\eta)\Phi(\varphi) \in C^\infty(\overline{D_2})$, $b(\varphi) > 0$. Тогда задача*

$$\frac{\partial^2 z(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2} - \eta^{2m} b(\varphi) z(\eta,\varphi) = F(\eta)\Phi(\varphi), \quad (\eta,\varphi)\in D_2, \tag{23}$$

*имеет единственное решение $z(\eta,\varphi) \in C^\infty(\overline{D_2})$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени $\eta$, когда $\eta \to \pm\infty$.*

Доказательство. Пусть $t = \sqrt[2m+2]{b(\varphi)}\eta / \sqrt[m+1]{m+1}$, тогда задача (23) примет вид

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - (m+1)^2 t^{2m} z(t,\varphi) = \sqrt[m+1]{\frac{(m+1)^2}{b(\varphi)}} F(t)\Phi(\varphi). \tag{24}$$

Решение уравнения (24) ищем в виде $z(t,\varphi) = z(t)\sqrt[m+1]{\dfrac{(m+1)^2}{b(\varphi)}}\Phi(\varphi)$, тогда получаем

$$z''(t) - (m+1)^2 t^{2m} z(t) = F(t). \tag{25}$$

Как известно [10], фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - (m+1)^2 t^{2(m+1)-2} z(t,\varphi) = 0$$

имеет вид $\{U_{2(m+1)}(t), U_{2(m+1)}(-t)\}$, где $U_{2(m+1)}(t) = \sqrt{\dfrac{2t}{\pi}} K_{1/2(m+1)}(t^{m+1})$, $K_{1/2(m+1)}$ — функция Макдональда.

Приведем известные свойства фундаментальной системы решений $\{U_{2(m+1)}(t), U_{2(m+1)}(-t)\}$:

а) Вронскиан $W(U_{2(m+1)}(t), U_{2(m+1)}(-t)) = 2(m+1)\mathrm{cosec}(\pi/(2m+2))$;

б) $U_{2m+2}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[2m+2]{2^m}}\Gamma\Big(\dfrac{1}{2m+2}\Big)$, $\quad U'_{2m+2}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[2m+2]{2^{m+2}}}\Gamma\Big(-\dfrac{1}{2m+2}\Big)$;

в) $U_{2m+2}(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t^m} e^{t^{m+1}}}$, $\quad t \to +\infty$;

г) $U_{2m+2}(t) = \sqrt{\dfrac{2|t|}{\pi}}\Big(\pi \mathrm{cosec}\dfrac{\pi}{2m+2} I_{1/(2m+2)}(|t|^{m+1}) + K_{1/(2m+2)}(|t|^{m+1})\Big)$, $\quad t < 0$;

д) $U_{2m+2}(t) \sim \dfrac{e^{|t|^{m+1}}}{\sqrt{|t|^m}}$, $\quad t \to -\infty$.

С помощью фундаментальной системы решений можем записать явное решение уравнения (25), а из свойств а)–д) следует, что это решение находится в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени $t$, когда $t \to \pm\infty$.

Отсюда получим, что если $F(\eta) = O(\eta^k)$, $\eta \to \pm\infty$, то $z(\eta,\varphi) = O(\eta^{k-2m})$, $\eta \to \pm\infty$, $k$ — const. □

С помощью леммы 4 доказаны существование и единственность решений задач (21), (22) в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени $\eta$.

Для задач (21), (22) справедливы следующие леммы, аналогичные леммам 2, 3.

**Лемма 5.** *Пусть $0 < a(\varphi) \in C^\infty[0,2\pi]$ и функции $p_j(\eta,\varphi) \in C^\infty(\overline{D_2})$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$p_j(\eta,\varphi) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{p_{j,(2m+2)k-j}(\varphi)}{\eta^{(2m+2)k-j}}, \quad j = 0,1,\dots,2m-1, \quad \eta \to \pm\infty.$$

*Тогда в области $D_2$ существуют решения уравнений*

$$\frac{\partial^2 z_j(\eta,\varphi)}{\partial \eta^2} - \eta^{2m} a(\varphi) z_j(\eta,\varphi) = p_j(\eta,\varphi), \quad \eta \to \pm\infty, \tag{26}$$

*которые разлагаются в асимптотические ряды*

$$z_j(\eta,\varphi) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{z_{j,2m-j+(2m+2)k}(\varphi)}{\eta^{2m-j+(2m+2)k}}, \quad \eta \to \pm\infty. \tag{27}$$

*При этом ряды* (27) *можно многократно почленно дифференцировать, и они являются асимптотическими разложениями решений уравнений* (26).

**Лемма 6.** *Пусть* $h^\alpha_{k,2m+j}(\varphi) = -\sum\limits_{s=1}^{(2m+2)k+2m} b_{s+j}(\varphi) q_{(2m+2)k-s,s}(\varphi)$, $k, j \in N_0$.

*Тогда при $\eta \to \pm\infty$ справедливы асимптотические разложения*

$$q_{(2m+2)k+s}(\eta,\varphi) = \sum_{j\geqslant 1} \frac{q_{(2m+2)k+s,(2m+2)j-s}(\varphi)}{\eta^{(2m+2)j-s}}, \quad s = 0,1,\dots,2m+1, \quad k = -1,0,1,\dots.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о лемм 5 и 6 аналогично доказательствам лемм 2, 3 соответственно. □

Таким образом, нами построено формальное асимптотическое разложение решения бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робэна. Перейдем к обоснованию ФАРР.

## 4. Обоснование ФАРР

Пусть $R_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi) = u_\varepsilon(\rho,\varphi) - u_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi)$, где

$$u_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi) = \sum_{k=0}^{s} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \chi_1(\rho) \sum_{k=-n}^{(n+2)s+1} \mu^k w_k(\tau,\varphi) + \chi_2(\rho) \sum_{k=-2m}^{(2m+2)s+1} \lambda^k q_k(\eta,\varphi)$$

— частичная сумма построенных рядов.

Тогда для остаточных функций $R_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi)$ получим задачи

$$\varepsilon\Delta R_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi) - (1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m} p(\rho,\varphi) R_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi) = O(\varepsilon^{s+1}), \quad (\rho,\varphi) \in D, \quad \varepsilon \to 0; \tag{28}$$

$$R_{\varepsilon,s}(1,\varphi) = O(\varepsilon^{s+1}); \tag{29}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon,s}(1,\varphi)}{\partial\rho} = O(\varepsilon^{s+1}); \tag{30}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon,s}(1,\varphi)}{\partial\rho} + h(\varphi) R_{\varepsilon,s}(1,\varphi) = O(\varepsilon^{s+1}). \tag{31}$$

После применения к задачам (28), (29); (28), (30); (28), (31) преобразования $R_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi) = z(\rho)\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)$, где $z(\rho) = 1 - \rho^2/2 > 0$, и принципа максимума, имеем

$$\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi) = O(\varepsilon^s), \quad (\rho,\varphi) \in \overline{D}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что $R_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi) = O(\varepsilon^s)$, $(\rho,\varphi) \in \overline{D}$, $\varepsilon \to 0$ для всех бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робэна.

Следовательно, справедлива

**Теорема**. *Для решения бисингулярных задач Дирихле* (1), (2), *Неймана* (1), (3) *и Робэна* (1), (4) *при* $\varepsilon \to 0$ *справедливо асимптотическое разложение* (5) *с соответствующими функциями* $w_k(\tau,\varphi)$, *так как* $v_k(\rho,\varphi)$, $q_k(\eta,\varphi)$ *не зависят от граничных условий.* □

З а к л ю ч е н и е. Обобщенным методом пограничных функций построены полные равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робэна для круга. Асимптотическое разложение решения обосновано с помощью принципа максимума. Отметим, что методом дифференциальных неравенств его тоже можно обосновать, т. е. получить оценку для остаточной функции $R_{\varepsilon,s}(\rho,\varphi)$.

Аналогично исследуется асимптотическое поведение решений задач Дирихле, Неймана и Робэна для уравнения

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi) - (1-\rho)^n(\rho-\alpha_1)^{2m_1}\dots(\rho-\alpha_k)^{2m_k} p(\rho,\varphi) u_\varepsilon(\rho,\varphi) = f_\varepsilon(\rho,\varphi), \quad (\rho,\varphi) \in D,$$

где $\alpha_i \in (0,1)$, $m_i \in N$.

Исследованные задачи можно обобщить на многомерный шар или на многомерную ограниченную область с достаточно гладкой границей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 336 с.
2. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
3. **Розов Н.Х.** Некоторые замечания о бисингулярных краевых задачах // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 35, Ч. 2. С. 44–47.
4. **Данилин А.Р.** Асимптотика решений системы сингулярных эллиптических уравнений в прямоугольнике // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 1. С. 31–60. doi: 10.4213/sm705 .

5. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 197–211.
6. **Хачай О.Ю.** Асимптотическое разложение решения одной бисингулярной задачи Коши для нелинейного обыкновенного уравнения первого порядка. Деп. в ВИНИТИ. 2005. Т. 16, № 174-В2005. С. 1–46.
7. **Турсунов Д.А., Эркебаев У.З.** Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями // Уфим. мат. журн. 2016. Т. 8, № 1. С. 102–112.
8. **Турсунов Д.А., Эркебаев У.З.** Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2015. Т. 25, №. 4. С. 517–525.
9. **Олейник О.А.** О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Мат. сб. 1952. Т. 30(72), №. 3. С. 695–702.
10. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры информатики
Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан
e-mail: tdaosh@gmail.com

Поступила 09.06.2016

## REFERENCES

1. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence, RI: AMS, 1992, Ser. Transl. Math. Monogr., 102, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5.
2. Il'in A. M., Danilin, A. R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3.
3. Rozov N.Kh. Some remarks on bisingular boundary-value problems. *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2007, vol. 144, no. 4, pp. 4241–4245. doi: 10.1007/s10958-007-0266-3 .
4. Danilin A.R. Asymptotic behaviour of solutions of a singular elliptic system in a rectangle. *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 1, pp. 31–61. doi: 10.1070/SM2003v194n01ABEH000705 .
5. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a point of inflexion. *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 197–211 (in Russian).
6. Khachai O.Yu. Asymptotic expansion of the solution of the bisingular Cauchy problem for nonlinear first-order ordinary differential equation. *Dep. VINITI*, 2005, vol. 16, no. 174-V2005, pp. 1–46 (in Russian).
7. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities. *Ufa Math. J.*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 97–107. doi: 10.13108/2016-8-1-97 .
8. Tursunov D.A. Erkebaev U.Z. Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed equation in the ring. *Vestnik Udmurtskogo Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 517–525 (in Russian).
9. Oleinik O.A. On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type. *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30(72), pp. 695–702 (in Russian).
10. Fedoryuk M.V. *Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations.* Berlin, Springer-Verlag, 1993, 363 p. doi: 10.1007/978-3-642-58016-1 . Original Russian text published in *Asimptoticheskie metody dlja linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij*, Moscow, Nauka Publ., 1983, 352 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 9, 2016.

*Dilmurat Abdillazhanovich Tursunov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Osh State University, Osh, 723500 Kyrgyzstan, e-mail: tdaosh@gmail.com