ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.948

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СРАВНЕНИЮ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В. П. Танана

При нахождении приближенного решения некорректно поставленных задач методом регуляризации всегда возникает вопрос об оценках возникающей погрешности. Наиболее распространены равномерные оценки на всем классе корректности, которые выражаются через модуль непрерывности обратного оператора на этом классе. Значительно менее изучены локальные оценки погрешности, так называемые оценки погрешности в точке. Так как в реальных некорректных задачах искомое решение единственно, то, получая оценку погрешности на всем классе корректности, значительно загрубляют истинную оценку погрешности полученного приближенного решения. В настоящей статье для специального класса некорректных задач исследуется вопрос о том, на сколько оценка погрешности на классе корректности может быть больше оценки погрешности в точке. Предполагая, что точное решение является кусочно-гладкой функцией, доказано, что оценка погрешности в точке является величиной бесконечно малой по сравнению с точной оценкой на классе корректности.

Ключевые слова: некорректная задача, регуляризация, оценка погрешности в точке, оценка погрешности на множестве.

V. P. Tanana. One approach to the comparison of error bounds at a point and on a set in the solution of ill-posed problems.

The approximate solution of ill-posed problems by the regularization method always involves the issue of evaluating the error. It is a common practice to use uniform bounds on the whole class of well-posedness in terms of the modulus of continuity of the inverse operator on this class. Local error bounds, which are also called error bounds at a point, have been studied much less. Since the solution of a real-life ill-posed problem is unique, an error bound obtained on the whole class of well-posedness roughens to a great extent the true error bound. In the present paper we study the difference between error bounds on the class of well-posedness and error bounds at a point for a special class of ill-posed problems. Assuming that the exact solution is a piecewise smooth function, we prove that an error bound at a point is infinitely smaller than the exact bound on the class of well-posedness.

Keywords: ill-posed problem, regularization, evaluation of the error at a point, evaluation of the error on a set.

MSC: 65J20

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-230-238

Введение

Как правило, в постановке некорректной задачи требуется существование единственного решения, отвечающего точному значению правой части. При этом нужно, используя исходные данные задачи, определить некоторое приближение этого решения и оценить его уклонение от точного. Трудность такой оценки вызвана неопределенностью точного решения задачи.

Для решения этой проблемы в исходные данные задачи включали класс корректности, содержащий точное решение. Затем оценка погрешности определялась на этом классе [1]. При этом всегда стояла проблема сравнения оценок погрешности на классе корректности и в точке. В настоящей статье сделано такое сравнение при условии, что точное решение задачи является образом Фурье кусочно-гладкой функции.

Для специального класса некорректных задач доказано, что погрешность в точке является величиной бесконечно малой по сравнению с оценкой на классе корректности.

1. Постановка задачи

Пусть $L_2(-\infty,\infty)$ — комплексное пространство, а F — расширение на пространство $L_2(-\infty,\infty)$ преобразования Фурье.

Элемент $v(x)\in V$ тогда и только тогда, когда

$$v(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)+\sum_{j=1}^{m}\psi_j(x)+h(x)\quad x\in\mathbb{R},$$

где

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}a_i(x^2-x_i^2), & |x|\le x_i,\\ 0, & |x|>x_i,\end{cases}\qquad \psi_j(x)=\begin{cases}b_j\sin\dfrac{\pi x}{l_j}, & |x|\le l_j,\\ 0, & |x|>l_j,\end{cases}$$

$a_i,b_j\ne 0,\quad x_i,l_j>0$ и $h(x)\in W_2^2(-\infty,\infty)$.

Предположим, что $Z\subset L_2(-\infty,\infty)$ и $Z=F[V]$, а оператор T определим формулой

$$Tf(\xi)=t(\xi)f(\xi),\quad f(\xi)\in D(T),\tag{1.1}$$

где

$$D(T)=\big\{f(\xi)\colon f(\xi)\in L_2(-\infty,\infty),\ t(\xi)f(\xi)\in L_2(-\infty,\infty)\big\}.$$

Поставим задачу вычисления значений Tf оператора T, определяемого формулой (1.1) в точке $f\in D(T)$,

$$Tf=u.\tag{1.2}$$

Предположим, что при $f=f_0$ элемент $u_0=Tf_0\in Z$, но f_0 неизвестен, а вместо него даны $f_\delta\in L_2(-\infty,\infty)$ и $\delta>0$ такие, что

$$\|f_\delta-f_0\|\le\delta.\tag{1.3}$$

Требуется по f_δ,δ и Z определить приближенное решение $u_\delta\in L_2(-\infty,\infty)$ задачи (1.1)–(1.3) и оценить уклонение $\|u_\delta-u_0\|_{L_2}$.

2. Нелинейный метод проекционной регуляризации

В нелинейном методе проекционной регуляризации [2; 3] используется регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha\colon\alpha>0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha f(\xi)=\begin{cases}Tf(\xi), & |\xi|\le\alpha,\\ 0, & |\xi|>\alpha.\end{cases}\tag{2.1}$$

Используя (2.1), определим семейство регуляризованных решений $\{u_\delta^\alpha(\xi)\colon\alpha>0\}$ формулой

$$u_\delta^\alpha(\xi)=T_\alpha f_\delta(\xi),\tag{2.2}$$

а в (2.2) параметр регуляризации $\alpha(f_\delta,\delta)$, следуя формуле (2.3) работы [3], определим из уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{-\alpha}|f_\delta(\xi)|^2d\xi+\int\limits_{\alpha}^{\infty}|f_\delta(\xi)|^2d\xi=16\delta^2.\tag{2.3}$$

Наложим некоторые условия на оператор T. Предположим, что

$$t(\xi) \in C(-\infty,\infty), \quad t(-\xi) = t(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t(\xi) \to \infty \ \text{ при } \ \xi \to \infty$$

и

$$t(\xi) \ \text{ строго возрастает на } [0,\infty), \quad t(0) > 0. \tag{2.4}$$

В [4, лемма 1] доказано, что при условиях (2.4) и $\|f_\delta(\xi)\| > 4\delta$ уравнение (2.3) имеет решение $\alpha(f_\delta,\delta)$, которое однозначно определяет элемент $u_\delta(\xi)$:

$$u_\delta(\xi) = u_\delta^{\alpha(f_\delta,\delta)}(\xi).$$

Таким образом, формулы (2.2) и (2.3) определяют отображение пространства $L_2(-\infty,\infty)$ в себя

$$T_\delta f(\xi) = \begin{cases} T_{\alpha(f_\delta,\delta)} f(\xi), & \|f(\xi)\| > 4\delta, \\ 0, & \|f(\xi)\| \le 4\delta. \end{cases} \tag{2.5}$$

Из теоремы 5, доказанной в [4], следует, что при выполнении условий (2.4) на оператор T отображение T_δ, определяемое формулой (2.5), непрерывно на пространстве $L_2(-\infty,\infty)$.

О п р е д е л е н и е. Семейство $\{T_\delta\colon 0 < \delta \le \delta_0\}$ операторов T_δ, непрерывно отображающих пространство $L_2(-\infty,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$, будем называть методом решения задачи (1.2), (1.3), если для любого $u_0 \in Z$

$$\sup\bigl\{\|T_\delta f_\delta - u_0\|\colon f_\delta \in L_2(-\infty,\infty), \ \ \|f_\delta - T^{-1}u_0\| \le \delta\bigr\} \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to 0.$$

В дальнейшем будет доказано, что семейство операторов $\{T_\delta\colon 0 < \delta \le \delta_0\}$, определенное формулой (2.5), является методом решения задачи (1.2), (1.3), а величину

$$\Delta_\delta(u_0) = \sup\bigl\{\|T_\delta f_\delta - Tf_0\|\colon f_\delta \in L_2(-\infty,\infty), \ \ \|f_\delta - f_0\| \le \delta\bigr\},$$

где $u_0 = Tf_0$ назовем погрешностью $\Delta_\delta(u_0)$ метода $\{T_\delta\colon 0 < \delta \le \delta_0\}$ в точке $u_0 \in Z$.

3. Об оценке погрешности нелинейного метода проекционной регуляризации на классе M_r

Оператор G, отображающий пространство $L_2(-\infty,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$, определим формулой

$$Gu(\xi) = g(\xi)u(\xi), \quad u(\xi) \in D(G), \tag{3.1}$$

где

$$D(G) = \bigl\{u(\xi)\colon u(\xi) \in L_2(-\infty,\infty), \ \ g(\xi)u(\xi) \in L_2(-\infty,\infty)\bigr\}.$$

Предположим, что функция $g(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$g(\xi) \in C(-\infty,\infty), \quad g(-\xi) = g(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad g(\xi) \to \infty \ \text{ при } \ \xi \to \infty;$$

$$g(0) > 0 \ \text{ и } \ g(\xi) \ \text{ возрастает на } \ [0,\infty). \tag{3.2}$$

Пусть

$$M_r = \{u\colon u \in R(T) \cap D(G), \ \ \|Gu\| \le r\}.$$

Тогда погрешность Δ_δ метода $\{T_\delta\colon 0 < \delta \le \delta_0\}$ на множестве M_r определим формулой

$$\Delta_\delta = \sup\bigl\{\|T_\delta f_\delta - Tf_0\|\colon Tf_0 \in M_r, \ \ \|f_\delta - f_0\| \le \delta\bigr\}. \tag{3.3}$$

Обозначим через $\omega(\delta, r)$ функцию, определяемую формулой

$$\omega(\delta, r) = \sup\big\{\|u(\xi)\|\colon u(\xi) \in M_r, \quad \|T^{-1}u(\xi)\| \le \delta\big\}, \tag{3.4}$$

и назовем ее модулем непрерывности в нуле оператора T на множестве $T^{-1}(M_r)$.

Из [5, лемма 2.1] следует, что если $\alpha(\delta, r)$ является решением уравнения

$$t(\alpha)g(\alpha) = \frac{r}{\delta}, \quad \alpha > 0, \tag{3.5}$$

а функции $t(\alpha)$ и $g(\alpha)$ удовлетворяют условиям (2.4) и (3.2) соответственно, то для функции, определенной (3.4), справедливо равенство

$$\omega(\delta, r) = \frac{r}{g[\alpha(\delta, r)]}. \tag{3.6}$$

Кроме того, из лемм 1.3 и 1.4, приведенных в работе [5], следует, что погрешность Δ_δ на множестве M_r, определенная (3.3), удовлетворяет соотношению

$$\Delta_\delta \ge \omega(\delta, r). \tag{3.7}$$

Сделаем еще одно полезное замечание относительно принадлежности элемента $u(\xi)$ множеству M_r. Из (3.1) и (3.2) следует, что $u(\xi) \in M_r$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(\xi)|u(\xi)|^2 d\xi \le r^2. \tag{3.8}$$

В теореме 1 из [6] говорится, что если функции $t(\xi)$ и $g(\xi)$ удовлетворяют условиям (2.4) и (3.2), соответственно, то

$$\Delta_\delta \le \frac{7r}{g[\alpha(\delta, r)]}, \tag{3.9}$$

где $\alpha(\delta, r)$ — решение уравнения (3.5).

4. О связи функций $g(\xi)$ и $\omega(\delta, r)$

Пусть $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$ удовлетворяют условию (3.2), а

$$\frac{g_1(\xi)}{g_2(\xi)} \to 0 \ \text{ при } \ \xi \to \infty. \tag{4.1}$$

Обозначим через $\omega^1(\delta, r_1)$ модуль непрерывности, порожденный функцией $g_1(\xi)$ и через $\omega^2(\delta, r_2)$ — порожденный функцией $g_2(\xi)$.

Приведем пример, иллюстрирующий, что условие (4.1) не влечет

$$\frac{\omega^2(\delta, r_2)}{\omega^1(\delta, r_1)} \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to 0. \tag{4.2}$$

Пусть $t_1(\xi) = t_2(\xi) = \xi, \ r_1 = r_2 = 1; \xi g_1(\xi) = e^{\xi}, \ \xi g_2(\xi) = e^{2\xi}$.

Тогда из (3.5) следует, что $\alpha_1(\delta, 1) = -\ln^{-1}\delta, \ \alpha_2(\delta, 1) = -\dfrac{1}{2}\ln^{-1}\delta$.

Из (3.6) следует, что $\omega^1(\delta, 1) = \delta \ln \dfrac{1}{\delta}, \ \ \omega^2(\delta, 1) = \dfrac{\delta}{2}\ln\dfrac{1}{\delta}$.

Таким образом, в нашем примере функции $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$ удовлетворяют соотношению (4.1), а для любого $\delta > 0$

$$\frac{\omega^2(\delta, 1)}{\omega^1(\delta, 1)} = \frac{1}{2}.$$

В лемме 6 работы [2] сформулированы достаточные условия, при выполнении которых соотношение (4.1) влечет (4.2).

Лемма 1. *Если для любого* $k > 0$ *существуют* d_1, d_2 *и* $\xi_0 > 0$ *такие, что для любого* ξ *такого, что* $|\xi| > \xi_0$,

$$d_1 \leq \frac{g_1(\xi)}{g_1(k\xi)} \leq d_2,$$

а функция $g_2(\xi)$ *удовлетворяет условию* (4.1), *то*

$$\frac{\omega^2(\delta, r_2)}{\omega^1(\delta, r_1)} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о приведено в лемме 6 работы [2].

5. Сравнения оценок погрешностей $\Delta_\delta(u_0)$ в точке u_0 и Δ_δ на множестве M_r

Для сравнения оценок погрешностей $\Delta_\delta(u_0)$ в точке $u_0(\xi) \in Z$ и Δ_δ на множестве M_r для метода $\{T_\delta\colon 0 < \delta \leq \delta_0\}$, определенного формулой (2.5), введем условие

$$\{u_1(x), u_2(x)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nM_r, \tag{5.1}$$

где

$$u_1(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2}{\xi^2}\left[\cos\xi - \frac{\sin\xi}{\xi}\right], \tag{5.2}$$

а

$$u_2(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\xi}{\xi^2 - \pi^2}. \tag{5.3}$$

Лемма 2. *Если функция* $g(\xi)$, *определяющая множество* M_r, *удовлетворяет условиям* (3.2) *и* (5.1), *то*

$$\int\limits_0^\infty \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}d\xi < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.2) следует, что при $\xi > \dfrac{4}{\sqrt{2}}$ и $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k \leq \xi \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 3, 4, \ldots,$ $|u_1(\xi)| \geq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\xi^2}$. Откуда при $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k \leq \xi \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 3, 4, \ldots,$ $|u_1(\xi)| \geq \dfrac{1}{2\xi^2}$.

Из (5.1) следует существование n_0 такого, что $u_1(\xi) \in M_{n_0 r}$, а из (3.8) следует, что

$$\sum_{k=3}^{\infty}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}+\pi k}^{\frac{\pi}{4}+\pi k} \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}d\xi < \infty.$$

Теперь перейдем к функции $u_2(\xi)$.

Из (5.3) следует, что если $\xi \geq 2\pi$ и $\dfrac{\pi}{4} + \pi k \leq \xi \leq \dfrac{3\pi}{4} + \pi k$, $k = 2, 3, \ldots,$ то $|u_2(\xi)| \geq \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{\xi^2}$.

Тогда из (3.8) вытекает, что

$$\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{4}+\pi k}^{\frac{3\pi}{4}+\pi k} \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}d\xi < \infty.$$

Из доказанного выше следует, что $\displaystyle\int_0^\infty \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}d\xi < \infty$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. *Если выполнено условие* (5.1) *и* $\dfrac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}$ *убывает на* $[0,\infty)$, *то существует функция* $g_1(\xi)$, *удовлетворяющая* (3.2), *такая, что*

$$\int\limits_0^\infty \frac{g_1^2(\xi)}{1+\xi^4}d\xi < \infty \quad \textit{и} \quad \frac{g(\xi)}{g_1(\xi)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \xi \to \infty.$$

Доказательство. Так как функция $\dfrac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}$ убывает на $[0,\infty)$, то из того, что $\displaystyle\int_0^\infty \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}d\xi < \infty$, следует $\sum\limits_{n=0}^\infty \dfrac{g^2(n)}{1+n^4} < \infty$.

Обозначим выражение $\dfrac{g^2(n)}{1+n^4}$ через a_n.

Тогда

$$\sum_{n=0}^\infty a_n < \infty. \tag{5.4}$$

Если положим

$$b_n = \sqrt{\sum_{k=n}^\infty a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^\infty a_k}, \tag{5.5}$$

то из (5.4) и (5.5) будет следовать, что

$$\sum_{n=0}^\infty b_n < \infty \tag{5.6}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0. \tag{5.7}$$

Из (3.2), (5.7) и того, что для любого $n \quad a_n > 0$, следует существование N такого, что для любого $n \ge N$

$$a_n \le b_n. \tag{5.8}$$

Из (5.8) следует, что для любого $n \ge N$

$$a_n(1+n^4) \le b_n(1+n^4). \tag{5.9}$$

Так как для любого n

$$g(n) = a_n(1+n^4), \tag{5.10}$$

то из (5.10) вытекает, что последовательность $\{a_n(1+n^4)\}$ возрастает и

$$a_n(1+n^4) \to \infty \;\text{ при }\; n \to \infty. \tag{5.11}$$

Из (5.9) и (5.11) следует, что

$$b_n(1+n^4) \to \infty \;\text{ при }\; n \to \infty. \tag{5.12}$$

Теперь проверим возрастание последовательности $\{b_n(1+n^4)\}$:

$$[1+(n+1)^4]b_{n+1} = \frac{[1+(n+1)^4]a_{n+1}}{\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=n+2}^{\infty} a_k}}, \tag{5.13}$$

$$(1+n^4)b_n = \frac{(1+n^4)a_n}{\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}}. \tag{5.14}$$

Так как для любого n $(1+n^4)a_n \le [1+(n+1)^4]a_{n+1}$, а

$$\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k} < \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k},$$

то из (5.13) и (5.14) вытекает, что $(1+n^4)b_n \le [1+(n+1)^4]b_{n+1}$.

Далее последовательность $\{(1+n^4)b_n\}$ четным образом, кусочно-линейно продолжим до функции $g_1(\xi) \in C(-\infty,\infty)$ такой, что $g_1(0) > 0$ и для любого n $g_1(n) = (1+n^4)b_n$.

Ввиду соотношения (5.6) следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Если функция $g(\xi)$ удовлетворяет условиям* (3.2) *и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4} d\xi < \infty,$$

а множество M_1 порождено этой функцией, то для любой функции $u_0(\xi) \in Z$ следует, что

$$u_0(\xi) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} nM_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы аналогично доказательству леммы 2.

Теорема. *Если выполнены условия лемм* 1–3, *то для любой функции $u_0(\xi) \in Z$ и любой функции $g(\xi)$, удовлетворяющей условию* (3.2) *и определяющей множество M_r, справедливо соотношение*

$$\frac{\Delta_\delta(u_0)}{\Delta_\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $u_0(\xi) \in Z$, а

$$\int_0^{\infty} \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4} d\xi < \infty, \tag{5.15}$$

то на основании леммы 4 существует $r > 0$ такое, что $u_0(\xi) \in M_r$, где M_r определено функцией $g(\xi)$.

Из (5.12) и (5.15) на основании леммы 3 следует существование функции $g_1(\xi)$, удовлетворяющей (3.2), такой, что $\dfrac{g(\xi)}{g_1(\xi)} \to 0$ при $\xi \to \infty$, а

$$\int_0^{\infty} \frac{g_1^2(\xi)}{1+\xi^4} d\xi < \infty. \tag{5.16}$$

Из (5.16) следует существование числа r_1 такого, что

$$u_0(\xi) \in M^1_{r_1}, \tag{5.17}$$

где

$$M^1_{r_1} = \left\{ u(\xi)\colon u(\xi) \in L_2(-\infty,\infty), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1^2(\xi)|u(\xi)|^2 d\xi \le r_1^2 \right\}. \tag{5.18}$$

Из (5.17) и (5.18) вытекает, что

$$\Delta_\delta(u_0) \le \Delta^1_\delta, \tag{5.19}$$

где

$$\Delta^1_\delta = \sup\{\|T_\delta f_\delta - Tf_0\|\colon Tf_0 \in M^1_{r_1},\ \|f_\delta - f_0\| \le \delta\}. \tag{5.20}$$

Из (3.4)–(3.6), (3.9), (5.18) и (5.20) получаем, что

$$\Delta^1_\delta \le 7\,\overline{\omega}(\delta, r_1), \tag{5.21}$$

где

$$\overline{\omega}(\delta, r_1) = \sup\{\|Tf\|\colon Tf \in M^1_{r_1},\ \|f\| \le \delta\}. \tag{5.22}$$

Из леммы 6, доказанной в [2], и леммы 3 следует, что

$$\frac{\overline{\omega}(\delta, r_1)}{\omega(\delta, r)} \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to 0. \tag{5.23}$$

Так как $u_0 \in M^1_{r_1}$, то из (3.6), (3.9) и (5.19) следует, что

$$\Delta_\delta(u_0) \le 7\,\overline{\omega}(\delta, r_1). \tag{5.24}$$

Из (3.7) вытекает, что

$$\Delta_\delta \ge \omega(\delta, r). \tag{5.25}$$

Из (5.21)–(5.25) следует, что

$$\frac{\Delta_\delta(u_0)}{\Delta_\delta} \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Заключение. В настоящей статье рассмотрено приближенное решение нелинейным методом проекционной регуляризации специального класса некорректных задач. В предположение, что точное решение является образом Фурье кусочно-гладкой функции, доказано, что оценка погрешности в точке является величиной бесконечно малой по сравнению с оценкой на классе корректности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
2. **Танана В.П.** О новом подходе к оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 4. С. 150–163.
3. **Танана В.П., Бредихина А.Б., Камалтдинова Т.С.** Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 281–288.
4. **Танана В.П., Япарова Н.М.** Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 353–368.
5. **Tanana V.P., Rudakova T.N.** The optimum of the M.M. Lavrent'ev method // Inverse Ill-Posed Problems. 2011. V.18, pp. 935–944. doi: 10.1515/JIIP.2011.012 .
6. **Бредихина А.Б.** Нелинейный метод проекционной регуляризации // Вестн. ЮУРГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. №37 (254). P. 4–10.

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой вычислительной математики
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Поступила 10.11.2015

REFERENCES

1. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Utrecht: VSP, 2002, 281 p.
2. Tanana V.P. On a new approach to error estimation for methods for solving ill-posed problems. Sib. Zh. Ind. Mat., 2002, vol. 5, no. 4, pp. 150–163 (in Russian).
3. Tanana V.P., Bredikhina A.B., Kamaltdinova T.S. On an error estimate for an approximate solution for an inverse problem in the class of piecewise smooth functions. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 281–288 (in Russian).
4. Tanana V.P., Yaparova N.M. The optimum in order method of solving conditionally-correct problems. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 4, pp. 353–368 (in Russian).
5. Tanana V.P., Rudakova T.N. The optimum of the M.M. Lavrent'ev method. *Inverse Ill-Posed Problems*, 2011, vol. 18, pp. 935–944. doi: 10.1515/JIIP.2011.012 .
6. Bredikhina A.B. The nonlinear projection regularization method. *Vestnik Yuzhno Ural'skogo Gos. Universiteta. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2011, no. 10, pp. 4–11 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on November 10, 2015.

Vitalii Pavlovich Tanana , Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, 454080 Russia e-mail: tvpa@susu.ac.ru .