ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.583

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СИНУСА, СОДЕРЖАЩЕГО ТРИ ПЕРВЫХ ЧЛЕНА РАЗЛОЖЕНИЯ

А. А. Соловьев

В статье предлагается простой способ нахождения асимптотического разложения эллиптического синуса $z = \mathrm{sn}(u;k)$ по степеням (k^2-1). В литературных источниках выписаны только первые два члена разложения. Предлагаемый метод позволяет найти последующие члены разложения. Недостатком метода является большой объем вычислений. Для остаточного члена $R(u,k)$ асимптотического представления, содержащего три первых члена разложения, верно предельное равенство

$$\lim_{z\to 1}\lim_{k\to 1} R(u,k)\frac{(1-z)^2}{(1-k^2)^3} \neq 0\,.$$

Основным результатом работы является оценка остаточного члена. Доказывается, что

$$|R(u,k)| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{1}{\cosh^2 u}\,\frac{(1-k^2)^3}{(1-z)^3}.$$

Ключевые слова: эллиптический синус, асимптотическое разложение, гиперболические функции.

A. A. Solov'ev. A bound for the remainder term in the asymptotic expansion of the elliptic sine containing the first three terms.

We propose a simple method for finding an asymptotic expansion of the elliptic sine $z = \mathrm{sn}(u;k)$ in powers of k^2-1. In the literature only the first two terms of the expansion have been written. The proposed method makes it possible to find subsequent terms of the expansion. The disadvantage of this method is its computational intensity. We prove that the remainder term $R(u,k)$ in the asymptotic expansion containing the first three terms of the expansion satisfies the limit equality

$$\lim_{z\to 1}\lim_{k\to 1} R(u,k)\frac{(1-z)^2}{(1-k^2)^3} \neq 0\,.$$

The main result of this paper in an estimate for the remainder term. We prove that

$$|R(u,k)| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{1}{\cosh^2 u}\,\frac{(1-k^2)^3}{(1-z)^3}.$$

Keywords: elliptic sine, asymptotic expansions, hyperbolic functions.

MSC: 33E05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-220-229

1. Введение

Задача нахождения асимптотики эллиптического синуса $z = \mathrm{sn}(u,k)$ при $k \to 1$ представляет интерес для исследователя, так как эта функция давно уже стала неотъемлемой частью современной математики и полная асимптотическая формула в виде ряда с указанием его общего члена до сих пор является нерешенной задачей. В справочниках по специальным функциям [1; 2] выписаны только два первых члена разложения. Тем не менее ни в одном из источников не указан метод их нахождения. Вопрос о построении последующих членов разложения и обосновании асимптотики остается открытым.

Напомним, что *эллиптическим интегралом* I *рода в форме Якоби* [3;4] называется функция

$$u = u(z;k) = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

где k — параметр, $0 < k < 1$, и рассматривается одна из ветвей корня в верхней t–плоскости. Эллиптический интеграл $u(z;k)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $D = \{\mathrm{Im} z > 0\}$ на прямоугольник L с вершинами в точках $\{\mathbf{K}(k),\ \mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'),\ -\mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'),\ -\mathbf{K}(k)\}$ на u–плоскости, где

$$\mathbf{K}(k) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

— полный эллиптический интеграл и $k' = \sqrt{1-k^2}$—дополнительный модуль.

Таким образом, в прямоугольнике L определена однозначная функция $z = \mathrm{sn}(u;k)$, называемая эллиптическим синусом, обратная к функции $u(z;k)$, значения которой принадлежат полуплоскости D.

Требуется найти ее асимптотическое разложение при $k \to 1$ и исследовать его на равномерность по $u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$.

В статье предлагается простой метод нахождения первых трех членов разложения функции $\mathrm{sn}(u;k)$ по степеням (k^2-1). Найденный подход позволяет получить оценку остаточного члена.

Ранее (см. [1;2]) был оценен остаточный член для асимптотического представления, содержащего первые два члена разложения

$$\mathrm{sn}(u,k) = \tanh u - \frac{1}{4}\Big(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u}\Big)(k^2-1) + R(u,k)\,.$$

Было доказано, что вблизи $k = 1$ остаточный член $R(u,k)$ может принимать сколь угодно большие значения при $u \in \big(-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k)\big)$ и имеет место оценка

$$|R(u,k)| \leqslant \frac{(1-k^2)^2}{\cosh^2 u\,(1-z)^2}\,.$$

2. Асимптотическое разложение эллиптического синуса

Опишем формально метод нахождения членов асимптотического разложения эллиптического синуса по степеням (k^2-1).

Иногда для удобства изложения вместо k^2 будем писать τ и наоборот. Разложим функцию $u(z;k)$ по формуле Тейлора по степеням $(\tau-1)$:

$$u(z;k) = u(z;1) + (\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + \frac{1}{6}(\partial_\tau^3 u)(z;1)(\tau-1)^3 + \dots\,,$$

где через ∂_τ^m обозначена производная порядка m по переменной τ. Введем обозначения:

$$u^{(0)}(z) = u(z;1) = \int\limits_0^z \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}, \quad \text{тогда} \quad z = \tanh u^{(0)}(z)\,.$$

На втором шаге разложим функцию $z = \tanh u^{(0)}$ в ряд Тейлора по степеням $(u^{(0)} - u)$:

$$z = \tanh u^{(0)}(z) = \tanh u + \partial_u \tanh u\,(u^{(0)} - u) + \frac{1}{2}\partial_u^2 \tanh u\,(u^{(0)} - u)^2 + \frac{1}{6}\partial_u^3 \tanh u\,(u^{(0)} - u)^3 + \dots\,.$$

Заменим $(u^{(0)} - u)$ разложением

$$-(u^{(0)} - u) = (\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + \frac{1}{6}(\partial_\tau^3 u)(z;1)(\tau-1)^3 + \ldots$$

и соберем коэффициенты при одинаковых степенях $(\tau - 1)$. Получим

$$z = \tanh u + \sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{1}{m!}(\partial_u^m \tanh u)\big((\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + \ldots\big)^m .$$

Собирая выражения при одинаковых степенях $(\tau - 1)$, получим

$$z = \tanh u - (\partial_u \tanh u)(\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1)$$

$$+ \frac{1}{2}\big[-(\partial_u \tanh u)(\partial_\tau^2 u)(z;1) + (\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(z;1)\big](k-1)^2 + \ldots .$$

Переменную z в $(\partial_\tau u)^m(z;1)$, $m = 1, 2, \ldots$, заменим на $\tanh u^{(0)}$ и разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по степеням $(u^{(0)} - u)$.

Этот прием позволит выделить следующий член разложения функции $z = \mathrm{sn}(u;k)$ в ряд по степеням $(k^2 - 1)$. Указанным методом были найдены коэффициенты второго и третьего членов разложения.

3. Обоснование разложения эллиптического синуса

Предложенный метод получения последующих членов разложения позволяет оценить остаточные члены асимптотического представления разложения эллиптического синуса по степеням $(1 - k^2)$.

Теорема 1. *Имеет место разложение*

$$z = \mathrm{sn}(u;k) = u^{-1}(u;k) = \tanh u + \Big(\frac{\tanh u}{4} - \frac{u}{4\cosh^2 u}\Big)(1-k^2)$$

$$-\Big(\frac{1}{16}u^2\frac{\sinh u}{\cosh^3 u} + \frac{9}{64}\frac{u}{\cosh^2 u} + \frac{11}{64}\frac{\sinh u}{\cosh u} - \frac{1}{32}\sinh u\cosh u\Big)(1-k^2)^2 + R(u,k), \tag{3.1}$$

где $u \in (-\mathbf{K}(\mathbf{k}), \mathbf{K}(\mathbf{k}))$. *Для остаточнго члена имеет место предельное равенство*

$$\lim_{z\to 1}\lim_{k\to 1} R(u,k)\frac{(1-z)^2}{(1-k^2)^3} \neq 0 .$$

В частности, асимптотическое разложение не является равномерным по u *на промежутке* $(-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ *при* $k \to 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что z, $0 < z < 1$, фиксировано. Рассмотрим

$$u = u(z;k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}} .$$

Следуя предложенной схеме, на первом шаге разложим функцию $u = u(z;k)$ по степеням $(\tau - 1)$:

$$u(z;k) = u(z;1) + (\partial_\tau^1 u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + R_2(z,k)(\tau-1)^3 . \tag{3.2}$$

При $\tau \to 1$ имеем

$$u(z;k) \to \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = u(z;1) = u^{(0)}(z),$$

в частности, $z \equiv \tanh u^{(0)}(z)$.

На втором шаге разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме по степеням $(u^{(0)}-u)$:

$$z = \tanh u^{(0)}(z) = \tanh u + \frac{u^{(0)}-u}{\cosh^2 u} + \frac{(u^{(0)}-u)^2}{2!}\,\frac{\tanh u}{\cosh^2 u} + T_2(z,k)(u^{(0)}-u)^3\,. \tag{3.3}$$

В (3.3) заменим $(u^{(0)}-u)$ разложением

$$(u^{(0)}-u) = -(\partial_\tau^1 u)(z;1)(\tau-1) - \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 - R_2(z,k)(\tau-1)^3\,.$$

Получим

$$z = \tanh u + \big(- (\partial_\tau^1 u)(z;1)(\tau-1) - \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 - R_2(z,k)(\tau-1)^3\big)\frac{1}{\cosh^2 u}$$

$$+ \frac{1}{2}\big(- (\partial_\tau^1 u)(z;1)(\tau-1) - R_1(u,k)(\tau-1)^2\big)^2 \frac{\tanh u}{\cosh^2 u} + T_2(z,u)(u^{(0)}-u)^3\,.$$

Выделим слагаемые, входящие в остаточный член. Позднее к ним добавятся остаточные компоненты разложения $(\partial_\tau^1 u)(z,1)$ и $(\partial_\tau^2 u)(z,1)$ по степеням $(u^{(0)}-u)$. Имеем

$$\Big[- R_2(z,k)\,\frac{1}{\cosh^2 u} + \frac{\tanh u}{\cosh^2 u}(\partial_\tau^1 u)(z;1)R_1(u,k)$$

$$+ R_1^2(u,k)\,\frac{\tanh u}{\cosh^2 u}(\tau-1) + T_2(u,k)\Big(\frac{u^{(0)}-u}{\tau-1}\Big)^3\Big](\tau-1)^3\,. \tag{3.4}$$

Устремим τ к 1, $0<\tau<1$. Получим

$$R_2(z,k) = \frac{5}{16}\int\limits_0^z \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}(1-m_2t^2)^{7/2}} \to \frac{5}{16}\int\limits_0^z \frac{t^6 dt}{(1-t^2)^4} = \gamma(z)\frac{1}{(1-z)^3}\,,$$

где $\tau < m_2 < 1$. Подобным образом находим

$$R_1(z,k) = \frac{3}{8}\int\limits_0^z \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}(1-m_1t^2)^{5/2}} \to \frac{3}{8}\int\limits_0^z \frac{t^4 dt}{(1-t^2)^3} = \frac{\beta(z)}{(1-z)^2}\,,$$

где $\tau < m_1 < 1$. Наконец, $T_2(u,k)$ представим в виде

$$T_2(u,k) = -\frac{1}{(u^{(0)}-u)^3}\int\limits_u^{u^{(0)}} (u^{(0)}-\nu)^2\,\frac{P_2(\tanh\nu)}{\cosh^2\nu}d\nu,$$

где $P_2(u) = 1-3\tanh^2 u$. При $\tau\to 1$ имеем $u\to u^{(0)}$. По правилу Лопиталя находим, что

$$T_2(z,k) \to -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}}\big(1-3\tanh^2 u^{(0)}\big) = -\frac{1}{3}(1-z^2)(1-3z^2) = \delta(z)(1-z)\,.$$

Далее, воспользуемся равенством

$$(\partial_\tau^1 u)(z;1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^z \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = \alpha(z)\frac{1}{1-z} \ \text{ при } \ \tau\to 1\,,$$

и предельным соотношением при $\tau \to 1$

$$\frac{u^{(0)}-u}{1-\tau} = \frac{1}{1-\tau}\Big[\int\limits_0^z \frac{dt}{1-t^2} - \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}}\Big] \longrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^z \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = \frac{\alpha(z)}{1-z}. \tag{3.5}$$

В пределе при $\tau \to 1$ найдем значение выражения в скобках в (3.4):

$$\Big(-\gamma(z)\frac{1}{(1-z)^3\cosh^2 u^{(0)}} + \frac{\tanh u^{(0)}}{\cosh^2 u^{(0)}}\,\frac{\alpha(z)}{(1-z)}\,\frac{\beta(z)}{(1-z)^2} - \delta(z)(1-z)\frac{\alpha^3(z)}{(1-z)^3}\Big)$$

$$= \Big(-\gamma(z)\frac{1+z}{(1-z)^2} + z(1-z^2)\alpha(z)\frac{\beta(z)}{(1-z)^3} - \delta(z)\alpha^3(z)\frac{1}{(1-z)^2}\Big)$$

$$= \big[-\gamma(z)(1+z) + z(1+z)\alpha(z)\beta(z) - \delta(z)\alpha^3(z)\big]\frac{1}{(1-z)^2}\,.$$

Вычисляя пределы при $z \to 1$, например, с помощью правила Лопиталя, находим, что

$$\gamma(z) \to \frac{5}{3}\cdot 2^{-8}, \quad \beta(z) \to 3\cdot 2^{-7}, \quad \delta(z) \to \frac{4}{3}, \quad \alpha(z) \to \frac{1}{8} \ \text{ при } \ z \to 1.$$

Таким образом, предел выражения в квадратных скобках равен

$$-\frac{5}{3}\cdot 2^{-7} + 3\cdot 2^{-9} - \frac{1}{3}\cdot 2^{-7} \neq 0. \tag{3.6}$$

К ранее выделенным слагаемым остаточного члена добавятся остаточные слагаемые разложения по степеням $(u^{(0)}-u)$ выражений

$$\frac{1}{2}(\partial^1_\tau u)^2(z;1)\frac{\tanh u}{\cosh^2 u}(\tau-1)^2 = I_1(z,\tau)$$

и

$$\big(-(\partial^1_\tau u)(z;1)(\tau-1) + (\partial^2_\tau u)(z;1)(\tau-1)^2\big)\frac{1}{\cosh^2 u} = I_2(z,\tau) + I_3(z,\tau)\,.$$

Нас интересуют множители остаточных членов и их пределы при $\tau \to 1$.

Если $f(z)$ — функция вещественного переменного z, то применительно к $I_1(z,\tau)$ и $I_3(z,\tau)$ отношение

$$\frac{f(\tanh u^{(0)}) - f(\tanh u)}{\tau - 1}$$

перепишем в виде

$$\frac{f(\tanh u^{(0)}) - f(\tanh u)}{\tanh u^{(0)} - (\tanh u)}\cdot\frac{\tanh u^{(0)} - (\tanh u)}{u^{(0)} - u}\cdot\frac{u^{(0)}-u}{\tau-1}\,.$$

Так как при $\tau \to 1$ верно соотношение $u \to u^{(0)}$, то в пределе получим

$$f'_z(\tanh u^{(0)})\,\frac{1}{\cosh u^{(0)}}\,\frac{-\alpha(z)}{1-z} = -f'_z(z)\,\alpha(z)\,(1+z)\,.$$

Для $I_1(z,\tau)$ возьмем $f(z) = \dfrac{1}{2}(\partial^1_\tau u)^2(z;1)\dfrac{\tanh u}{\cosh^2 u}$. Тогда

$$-\lim_{z\to 1} f'_z(\tanh u^{(0)})\,\alpha(z)(1+z)(1-z)^2$$

$$= -\lim_{z\to 1}\frac{1}{4}\,\frac{\tanh u^{(0)}}{\cosh^2 u^{(0)}}\Big(\int\limits_0^z \frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt\Big)\frac{z^2}{(1-z^2)^2}\,\alpha(z)(1+z)(1-z)^2$$

$$= -\lim_{z\to 1}\frac{1}{2}z^3\alpha^2(z) = -\frac{1}{2^7}\,. \tag{3.7}$$

Аналогично поступим с $I_3(z,\tau)$, взяв $f(z) = -\frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)\frac{1}{\cosh^2 u}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}}\,\frac{z^4}{(1-z^2)^3}\,\alpha(z)(1+z)(1-z)^2 = \lim_{z\to 1}\frac{z^4}{(1+z)}\,\alpha(z) = \frac{1}{32}\,. \tag{3.8}$$

Наконец, рассмотрим $I_2(z,1)$, взяв $f(z) = -(\partial_\tau^1 u)(z;1)\frac{1}{\cosh^2 u}$. В этом случае потребуется слагаемое второго порядка относительно $(\tau-1)$ разложения функции $f(\tanh u^{(0)})$. С этой целью найдем предел

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{f(\tanh u^{(0)}) - f(\tanh u) - f_z'(\tanh u)(\tanh u^{(0)} - \tanh u)}{(\tau-1)^2}$$

$$= f''(\tanh u^{(0)})\lim_{\tau\to 1}\Big(\frac{\tanh u^{(0)} - \tanh u}{u^{(0)} - u}\Big)^2\Big(\frac{u^{(0)} - u}{\tau - 1}\Big)^2. \tag{3.9}$$

Так как

$$f''(z) = \frac{-z}{(1-z^2)^2}\,\frac{1+z^2}{1-z^2}\,\frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}}\,,$$

то в (3.9) при $\tau\to 1$ в пределе получим

$$-\frac{z}{(1-z^2)^2}\,\frac{1+z^2}{(1-z^2)}\Big(\frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}}\Big)^3\Big(\frac{u^{(0)}-u}{\tau-1}\Big)^2 = -z(1+z^2)\Big(\frac{\alpha(z)}{1-z}\Big)^2.$$

Поэтому

$$-\lim_{z\to 1}(\partial_\tau^1 u)(z,1)\frac{1}{\cosh^2 u}(1-z)^2 = -2\frac{1}{64} = -\frac{1}{32}\,. \tag{3.10}$$

Таким образом, из (3.6)–(3.8) и (3.10) следует, что предел остаточного члена сначала по $\tau\to 1$ и затем по $z\to 1$ равен

$$-\frac{5}{3}\cdot 2^{-7} + 3\cdot 2^{-9} - \frac{1}{3}\cdot 2^{-7} - 2^{-7} + 2^{-5} - 2^{-5} \neq 0\,.$$

Это доказывает, что разложение (3.1) не является равномерным по $u\in(-\mathbf{K}(k),\mathbf{K}(k))$ при $k\to 1$. Теорема доказана.

В следующей теореме получена оценка остаточного члена.

Теорема 2. *В обозначениях предыдущей теоремы для остаточного члена $R(u,k)$ верна оценка*

$$|R(u,k)| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{(1-k^2)^3}{\cosh^2 u(1-z)^3},$$

константа не зависит от z и k^2.

Доказательство. Постоянные, не зависящие от z и k^2, будем обозначать как const. Далее будем пользоваться доказанным ранее неравенством

$$u^{(0)} - u \leqslant \alpha(z)\frac{1-\tau}{1-z},$$

где $\alpha(z)$ — ограниченная функция. Как и в теореме 1, на первом шаге рассмотрим разложение

$$u(z;k) = u(z;1) + (\partial_z u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_z^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + R_2(u,k)(\tau-1)^3\,. \tag{3.11}$$

На втором шаге функцию $\tanh u^{(0)}$ разложим по степеням $(u^{(0)} - u)$:

$$z = \tanh u^{(0)} = \tanh u + (\partial_u \tanh u)(u^{(0)} - u) + \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(u^{(0)} - u)^2 + T_2(u,k)(u^{(0)} - u)^3 \,. \quad (3.12)$$

Подставим (3.11) в (3.12). Получим

$$z = \tanh u - (\partial_u \tanh u)\Big[(\partial_z u)(z;1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}(\partial_z^2 u)(z;1)(\tau - 1)^2 + R_2(u,k)(\tau - 1)^3\Big]$$

$$+ \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(u^{(0)} - u)^2 + T_2(u,k)(u^{(0)} - u)^3 \,. \quad (3.13)$$

Оценим вклад каждого слагаемого в остаточный член разложения $\mathrm{sn}(z;k)$ по степеням $(\tau - 1)$, начиная с последнего слагаемого.

Так как

$$T_2(u,k) = \mathrm{const}\frac{1}{(u^{(0)} - u)^3}\int\limits_u^{u^{(0)}} (u^{(0)} - \nu)^2 (\partial_u^3 \tanh \nu) d\nu$$

$$= \mathrm{const}\frac{1}{(u^{(0)} - u)^3}\int\limits_u^{u^{(0)}} (u^{(0)} - \nu)^2 \frac{P(\tanh \nu)}{\cosh^2 \nu} d\nu \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\,,$$

где $P(t)$ — многочлен второго порядка. Поэтому последнее слагаемое имеет оценку

$$T_2(u,k)(u^{(0)} - u)^3 \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^3}\,.$$

В (3.13) слагаемое $\frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(u^{(0)} - u)^2$ перепишем в виде суммы

$$\frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(z;1)(\tau - 1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)\big[(u^{(0)} - u)^2 - (\partial_\tau u)^2(z;1)(\tau - 1)^2\big]\,. \quad (3.14)$$

Последнее слагаемое в этой сумме представим в виде

$$\frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)\big[(u^{(0)} - u) - (\partial_\tau u)(z;1)(\tau - 1)\big]\,\big[(u^{(0)} - u) + (\partial_\tau u)(z;1)(\tau - 1)\big]$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(-R_1(u,k)(1-\tau)^2)\big[(u^{(0)} - u) + (\partial_\tau u)(z;1)(\tau - 1)\big]\,. \quad (3.15)$$

Как следует из предыдущей теоремы, для $R_1(u,k)$ верна оценка

$$|R_1(u,k)| \leqslant \frac{\beta(z)}{(1-z)^2}\,.$$

Согласно ранее доказанному имеем

$$(u^{(0)} - u) \leqslant \mathrm{const}\frac{\alpha(z)}{1-z}(1-\tau), \quad (\partial_\tau u)(z;1)(1-\tau) \leqslant \mathrm{const}\frac{\alpha(z)}{1-z}(1-\tau), \quad |\partial_u^2 \tanh u| \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\,.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}|\partial_u^2 \tanh u|(u^{(0)} - u)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|\partial_u^2 \tanh u(\partial_\tau u)^2(z;1)\,|(1-\tau)^2 + \mathrm{const}\Big(\frac{1}{\cosh^2 u}\frac{\beta(z)}{(1-z)^2}(1-\tau)^2\frac{\alpha(z)}{1-z}(1-\tau)\Big)\,.$$

Последнее слагаемое не превосходит $\dfrac{\mathrm{const}}{\cosh^2 u}\dfrac{(1-\tau)^3}{(1-z)^3}$. Оценим первое слагаемое в (3.14):

$$\frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(z;1)(\tau-1)^2 = \frac{1}{8}(\partial_u^2 \tanh u)\Big(\frac{2z}{(1-z^2)} - \log\frac{1+z}{1-z}\Big)(\tau-1)^2\,.$$

При $z = \tanh u^{(0)}$ имеем $(\partial_\tau u)(\tanh u^{(0)};1) = \dfrac{1}{4}(2\sinh u^{(0)}\cosh u^{(0)} - u^{(0)})$. Поэтому для производной $\partial_\xi[(\partial_\tau u)(\tanh\xi;1)]$ верна оценка

$$|\partial_\xi[(\partial_\tau u)(\tanh\xi;1)]| \leqslant \mathrm{const}(\sinh^2\xi)\,.$$

По формуле Тейлора находим, что

$$\frac{1}{2}(\partial_\xi^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(\tanh^{(0)};1)(\tau-1)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(\tanh u;1)(\tau-1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)\partial_\xi(\partial_\tau u)^2(\tanh\xi;1)(u^{(0)}-u)(\tau-1)^2,$$

где $u < \xi < u^{(0)}$. Для остаточного слагаемого верна оценка

$$\mathrm{const}\,\frac{1}{\cosh^2 u}\ \sinh^2\xi\,\frac{\alpha(z)}{1-z}(1-\tau)^3 \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\ \sinh^2 u^{(0)}\,\frac{\alpha(z)}{1-z}\,(1-\tau)^3$$

$$\leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\ \frac{z^2}{(1-z^2)^2}\ \frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^2} \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\ \frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^3}\,.$$

Слагаемое $(\partial_u \tanh u)R_2(u,k)(1-\tau)^3$ не превосходит

$$\mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\,\gamma(z)\,\frac{1}{(1-z)^3}(1-\tau)^3 \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 u}\,\frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^3}\,.$$

Оценим вклад в остаточный член второго слагаемого в квадратных скобках в (3.13)

$$\frac{1}{2}(\partial_u \tanh u)(\partial_\tau^2 u)(z;1)(1-\tau)^2\,.$$

Имеем

$$(\partial_u^2 u)(\tanh u^{(0)};1) = \int\limits_0^z \frac{t^4}{(1-t^2)^3}dt = \frac{2z(5z^2-3)}{(1-z^2)^2} + 3\log\frac{1+z}{1-z} = I(z)\,.$$

Так как $(1-\tanh^2 u)^{-1} = \cosh^2 u$, то

$$I(\tanh u) = 2\sinh u\cosh u(2\sinh^2 u - 3) + 6u$$

$$= \sinh 2u(\cosh 2u - 4) + 6u = \Big(\frac{1}{2}\sinh 4u - 4\sinh 2u\Big) + 6u\,.$$

Производная $I(\tanh u)$ по переменной u равна

$$2\cosh 4u - 8\cosh 2u + 6 = 2(\cosh 4u - 1) - 8(\cosh 2u - 1) = 4\sinh^2 2u - 16\sinh^2 u$$

$$= 16\sinh^2 u\cosh^2 u - 16\sinh^2 u = 16\sinh^2 u(\cosh^2 u - 1) = 16\sinh^2 u\sinh^2 u = 16\sinh^4 u\,.$$

Таким образом, $\partial_u((\partial_\tau^2 u)(z;1)) = 16\sinh^4 u$. Тогда

$$\partial_u(\tanh u)(\partial_\tau^2 u)(z;1)(1-\tau)^2$$

$$= \partial_u(\tanh u)(\partial_\tau^2 u)(\tanh u;1)(1-\tau)^2 + 16\partial_u(\tanh u)\big(\sinh^4(\xi)\big)(1-\tau)^2(u^{(0)}-u),$$

где $u < \xi < u^{(0)}$. Для последнего слагаемого верна оценка

$$\frac{1}{\cosh^2 u}\sinh^3\xi\cosh\xi(1-\tau)^3\Big(\frac{u^{(0)}-u}{1-\tau}\Big)$$
$$\leqslant \frac{\sinh^3 u^{(0)}\cosh u^{(0)}}{\cosh^2 u}\,\frac{\alpha(z)}{1-z}\,(1-\tau)^3 \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\cosh^2 u(1-z)^3}\,(1-\tau)^3\,.$$

Оценим остаточную составляющую слагаемого $(\partial_u\tanh u)(\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1)$ в (3.13). Имеем

$$(\partial_u\tanh u)(\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1)$$
$$=\frac{\tau-1}{\cosh^2 u}\,\frac{1}{2}\int\limits_0^z\frac{t^2}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}(\sinh u^{(0)}\cosh u^{(0)}-u^{(0)})\,\frac{\tau-1}{\cosh^2 u}$$
$$=\frac{1}{2}(\sinh u\cosh u-u)\,\frac{\tau-1}{\cosh^2 u}+\sinh^2 u\,\frac{\tau-1}{\cosh^2 u}\,(u^{(0)}-u)+\sinh\xi\cosh\xi\frac{\tau-1}{\cosh^2 u}(u^{(0)}-u)^2,$$

где $u < \xi < u^{(0)}$. Последнее слагаемое, обозначим его через $U_2(\xi,\eta)$, оценивается следующим образом:

$$|U_2(\xi,\eta)| \leqslant \mathrm{const}\tanh\xi\cosh^2\xi\,\frac{(1-\tau)^3}{\cosh^2 u}\,\frac{(u^{(0)}-u)^2}{(1-\tau)^2}$$
$$\leqslant \frac{z}{1-z^2}\,\frac{\alpha^2(z)}{(1-z)^2}\,\frac{(1-\tau)^3}{\cosh^2 u} \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^3}{\cosh^2 u}\,\frac{1}{(1-z)^3}\,.$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

4. Заключение

В данной работе исследовалось асимптотическое поведение эллиптического синуса при $k\to 1$. Ранее были найдены два первых члена разложения. Их можно найти в справочнике [1] и статье [2] (без указания метода вычисления). В работе выписан третий член разложения. Справедливости ради следует отметить, что указанные члены разложения могут быть получены в пакете Mathematica.

Доказано, что на промежутке $(-\mathbf{K}(\mathbf{k}),\mathbf{K}(\mathbf{k}))$ найденное асимптотическое разложение не является равномерным по u. Основным результатом работы является оценка остаточного члена

$$\frac{\mathrm{const}}{\cosh^2 u}\frac{(1-k^2)^3}{(1-z)^3}$$

с константой, не зависящей от z и k. Из предельного равенства, доказанного в теореме 1, следует, что оценка не может быть улучшена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abramowitz M., Stegun I.A.** Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Washington: Tenth Printing, December 1972. 1046 p.
2. **Арефьева И.Я. Волович И.В. Писковский Е.В.** Скатывание в модели Хиггса и эллиптические функции // Теорет. мат. физика. 2012. Т. 172, № 1. P. 138–154. doi: 10.4213/tmf6925 .
3. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т. 1. 486 с.
4. **Ахиезер Н.И.** Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

Соловьев Александр Артемович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Челябинский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: alsol@csu.ru

Поступила 6.12.2016

REFERENCES

1. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington: Tenth Printing, December 1972, 1046 p.
2. Arefeva I.Ya., Volovich I.V., and Piskovskiy E.V. Rolling in the Higgs model and elliptic functions. *Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 172, no. 1, pp. 1001–1016. doi:10.1007/s11232-012-0091-9 .
3. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsii* [The theory of analytical functions]. M.: Nauka, 1967, 486 p.
4. Akhiezer N.I. *Elements of the theory of elliptic functions*. Providence: AMS, 1990. Ser. Thranslations of Mathematical Monographs, vol. 79, 237 p. Original Russian text published in *Elementy teorii ellipticheskikh funktsii*, M.: Nauka, 1970, 304 c. ISBN-10: 0821809008 .

The paper was received by the Editorial Office on December 12, 2016.

Aleksandr Artemovich Solov'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: alsol@csu.ru .