ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.948

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ[1]

А. И. Сидикова

Решается обратная граничная задача для уравнения теплопроводности. Эта задача сводится к интегральному уравнению первого рода, которое с использованием дискретизации по двум переменным сводится к конечномерному уравнению. К этому уравнению применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации по принципу невязки. Принцип невязки учитывает погрешность дискретизации. Показано, что для данной задачи не выполняется условие В.К. Иванова, позволяющее при оценке погрешности приближенного решения задачи использовать модуль непрерывности обратного оператора. Поэтому для оценки погрешности приближенного решения предложен численный подход, использующий дискретизацию задачи. Дано сравнение данной оценки с классической оценкой через модуль непрерывности. Предложенный в работе подход позволяет значительно расширить класс задач, к которым он применим.

Ключевые слова: некорректная задача, интегральное уравнение, оценка погрешности, регуляризующий алгоритм, конечномерная аппроксимация.

A. I. Sidikova. On the approximate solution of an inverse boundary value problem by the method of finite-dimensional approximation of the regularized solution.

We solve the inverse boundary value problem for the heat equation. The problem is reduced to an integral equation of the first kind, which in turn is reduced to a finite-dimensional equation by means of discretization in two variables. The latter equation is solved by means of A. N. Tikhonov's regularization method with the regularization parameter chosen according to the residual principle with discretization error taken into account. It is shown that the problem does not satisfy V. K. Ivanov's condition, which would allow to employ the modulus of continuity of the inverse operator. That is why, to estimate the error of the approximate solution, we propose a numerical approach using the discretization of the problem. The obtained estimate is compared with the classical estimate in terms of the modulus of continuity. The approach proposed in this paper makes it possible to considerably extend the class of problems to which it is applicable.

Keywords: ill-posed problem, integral equation, estimation of error, regularizing algorithm, finite-dimensional approximation.

MSC: 45B05, 45Q05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-210-219

Введение

К настоящему моменту получено большое число результатов, посвященных теории конечномерной аппроксимации (см., например, [1–3]) и др.

В данной работе обратная граничная задача для уравнения теплопроводности сводится к интегральному уравнению первого рода, к которому применяется конечномерная аппроксимация, позволяющая свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Получена оценка погрешности приближенного решения, учитывающая конечномерную аппроксимацию задачи. Для вычисления погрешности приближенного решения использован численный подход, заключающийся в выделении конечного числа допустимых точных решений и определении среди них максимально удаленного до приближенного решения задачи. Для получения оценки через модуль непрерывности $\omega(\tau, r)$, следуя работе [4], необходимо найти собственные

[1]Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (постановление № 211 от 16.03.2013 г., соглашение № 02.A03.21.0011).

функции и собственные значения операторов, используемых в задаче и требующих выполнения достаточно жестких условий, а оценка, приведенная в данной работе, не требует выполнения этих условий.

1. Постановка прямой задачи

Задачу определения функции $w(x,t) \in C([0,1] \times [0,T]) \cap C^{2,1}((0;1) \times (0,T])$ по известной функции $h(t)$ из соотношений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \\
w(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\
\frac{\partial w(1,t)}{\partial x} + \overline{k} w(1,t) = 0, \quad \overline{k} > 0, \quad 0 \le t \le T, \\
w(0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $h(t) \in C^2[0,T],\ h(0) = h'(T) = 0,\ h'(0) = a,\ a > 0$, будем называть *прямой задачей*.

Сделав замену

$$v(x,t) = w(x,t) + \Big[\frac{\overline{k}}{\overline{k}+1}x - 1\Big]h(t),$$

перейдем к следующей задаче:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \Big[\frac{\overline{k}}{\overline{k}+1}x - 1\Big]h'(t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1.2}$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad v(0,t) = 0, \quad v'_x(1,t) + \overline{k}v(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{1.3}$$

Решая задачу (1.2), (1.3) методом разделения переменных, получим

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) \sin \lambda_i x, \tag{1.4}$$

где λ_i — положительные решения уравнения $\operatorname{tg} \lambda = -\lambda/\overline{k}$,

$$v_i(t) = 2b_i \int\limits_0^t e^{-\lambda_i^2(t-\tau)} h'(\tau) d\tau, \tag{1.5}$$

$$b_i = -\frac{4}{2\lambda_i - \sin 2\lambda_i}, \quad \lambda_i = \frac{2i+1}{2}\pi + \gamma_i,$$

$\gamma_i \to +0$ при $i \to \infty$ (см. формулы (2.6)–(2.10) в [5]).

Интегрируя (1.5) по частям, получим

$$v_i(T) = -\frac{2b_i a}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2 T} - \frac{2b_i}{\lambda_i^2} \int\limits_0^T e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} h''(\tau) d\tau. \tag{1.6}$$

В выражении (1.6) положим $g(\tau) := -h''(\tau)$.

2. Постановка обратной задачи

Пусть функция $h(t)$, используемая в условии (1.1), неизвестна, а вместо нее дана функция $f(x) = v(x,T)$.

Предположим, что при $f(x) = f_0(x)$ существует функция $g_0(t)$ такая, что $g_0(t) \in C[0,T]$, а решение $v(x,t)$ задачи (1.2), (1.3) с функцией $h_0(t) = -\int_0^t \int_T^s g_0(\xi)d\xi ds$ удовлетворяет условию

$$v(x,T) = f_0(x), \quad \|g_0(t)\|_{C[0,T]} \le r, \quad \int\limits_0^T g_0(\xi)d\xi = a > 0, \tag{2.1}$$

где r — известное число, но $f_0(x)$ нам неизвестна, а вместо нее даны функция $f_\delta(x) \in L_2[0,1]$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(x) - f_0(x)\|_{L_2[0,1]} \le \delta. \tag{2.2}$$

Требуется, используя исходные данные задачи (f_δ, δ, r), определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1.2), (1.3), (2.1) и оценить уклонение $\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2}$ приближенного решения $h_\delta(t)$ от точного $h_0(t)$.

Из формул (1.4), (1.5) следует, что обратную задачу (1.2), (1.3), (2.1) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма первого рода в том смысле, что если $h(\tau)$ — решение обратной задачи, то $u(\tau) := h'(\tau)$ есть решение уравнения

$$A[u(\tau)] := \int\limits_0^T P(x,\tau)u(\tau)d\tau = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.3}$$

где $P(x,\tau) = 2\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} \sin\lambda_i x, \ \ u(0) = a > 0.$

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[0,T]$ в $L_2[0,T]$, формулой

$$B[g(\tau)] = a - \int\limits_0^\tau g(\xi)d\xi \tag{2.4}$$

и оператор C — формулой $C[g(\tau)] = AB[g(\tau)],$ где $g(\tau) \in L_2[0,T],$ $C[g(\tau)] \in L_2[0,1].$

Тогда уравнение (2.3) при условии, что $g(\tau) := -u'(\tau)$, эквивалентно уравнению

$$C[g(\tau)] := \int\limits_0^T K(x,\tau)g(\tau)d\tau = \psi(x), \tag{2.5}$$

где $K(x,\tau) = 2\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} \sin\lambda_i x, \quad \psi(x) = f(x) + 2a\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2 T} \sin\lambda_i x.$

3. Конечномерная аппроксимация оператора C

Для численного решения уравнения (2.5) заменим оператор C конечномерным оператором $C_{n,m}$ и оценим величину $\|C_{n,m} - C\|$.

Разобьем отрезок $[0,T]$ на n равных частей точками $\tau_j = jT/n, \ \ j = 0,1,\dots,n-1$, а также отрезок $[0,1]$ — на m равных частей точками $x_k = k/m, \ k = 0,1,\dots,m-1.$

Обозначим через G_n конечномерное подпространство пространства $L_2[0,T]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[\tau_j,\tau_{j+1}),\ \ j=0,1,\dots,n-1$, а через X_m — подпространство пространства $L_2[0,1]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[x_k,x_{k+1}),\ \ k=0,1,\dots,m-1$.

Оператор $C_{n,m}$ определим формулой

$$C_{n,m}[g(\tau)]=\int\limits_0^T K_{nm}(x,\tau)g(\tau)d\tau,\quad g(\tau)\in L_2[0,T],\quad C_{n,m}[g(\tau)]\in L_2[0,1],$$

где $K_{nm}(x,\tau)=K_{jk}$ при $\dfrac{k}{m}\le x\le\dfrac{k+1}{m},\quad \dfrac{jT}{n}\le\tau\le\dfrac{(j+1)T}{n},\quad k=0,1,\dots,m-1$, $j=0,1,\dots,n-1$.

Пусть $\overline{K}_{nm}(x,\tau)$ — метрическая проекция функции $K(x,\tau)$ на подпространство кусочно-постоянных функций $G_n\times X_m$, $\overline{K}_{nm}(x,\tau)=pr[K(x,\tau),G_n\times X_m]$,

$$\overline{K}_{ij}=\frac{nm}{T}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}K(x,\tau)dxd\tau,\quad \mu_{nm}^2=\int\limits_0^T\int\limits_0^1[K(x,\tau)-\overline{K}_{nm}(x,\tau)]^2dxd\tau.$$

4. Метод невязки

Пусть P_n — оператор метрического проектирования пространства $L_2[0,T]$ на G_n, а Q_m — оператор метрического проектирования пространства $L_2[0,1]$ на X_m, через $\overline{C}_m$ обозначим сужение оператора Q_mC на G_n, а через $\overline{C}_{n,m}$ — сужение оператора $C_{n,m}$ на G_n. Следующая лемма позволяет использовать величину $\|C-C_{n,m}\|$ для оценки нормы $\|Q_m\overline{C}_n-Q_m\overline{C}_{n,m}\|$, которая нужна для перехода от пространств $L_2[0,T],\ L_2[0,1]$, в которых действуют операторы C и $C_{n,m}$, к конечномерным пространствам G_n и X_m.

Лемма. *Пусть C и $C_{n,m}$ — линейные ограниченные операторы, отображающие пространство $L_2[0,T]$ в $L_2[0,1]$. Тогда $\|Q_m\overline{C}_n-Q_m\overline{C}_{n,m}\|\le\|C-C_{n,m}\|$.*

Доказательство. Используя то, что $\|Q_m\|=1$, имеем

$$\|Q_mCg-Q_mC_{n,m}g\|=\|Q_m\{Cg-C_{n,m}g\}\|\le\|Cg-C_{n,m}g\|.$$

Следовательно,

$$\sup_{\|g\|\le 1}\|Q_mCg-Q_mC_{n,m}g\|\le\sup_{\|g\|\le 1}\|Cg-C_{n,m}g\|. \tag{4.1}$$

Из (4.1) имеем $\|Q_mC-Q_mC_{n,m}\|\le\|C-C_{n,m}\|$.
Тогда

$$\|Q_m\overline{C}_m-Q_m\overline{C}_{n,m}\|\le\sup_{g\in G_n,\|g\|\le 1}\|Q_mCg-Q_mC_{n,m}g\|=\|Q_mC-Q_mC_{n,m}\|.$$

Окончательно получим $\|Q_m\overline{C}_m-Q_m\overline{C}_{n,m}\|\le\|C-C_{n,m}\|$.

Лемма доказана.

Пусть $g_0^n(\tau)\in G_n$ и $g_0^n(\tau_j):=-u_0'(\tau_j),\ \ j=0,1,\dots,n-1,\ \ \|\psi_0(x)-\psi_\delta(x)\|_{L_2}\le\delta$, $A[u_0(t)]=f_0(x)$.

Из формулы Лагранжа следуют оценки

$$|u_0(\tau)-u_0(\tau_j)|\le\max_{\tau_j\le\tau\le\tau_{j+1}}|g(\tau)|\cdot(\tau-\tau_j)\le\max_{0\le\tau\le T}|g(\tau)|\cdot\frac{T}{n}\le\frac{rT}{n},\quad \tau_j\le\tau\le\tau_{j+1},$$

$$\|u_0(\tau)-u_0^n(\tau)\|^2_{L_2[0,T]}=\int\limits_0^T|u_0(\tau)-u_0^n(\tau)|^2d\tau\le\max_{0\le\tau\le T}|u_0(\tau)-u_0^n(\tau)|^2\cdot\int\limits_0^T d\tau\le\frac{r^2T^2}{n^2}T,$$

$$\|u_0(\tau)-u_0^n(\tau)\|_{L_2[0,T]}\le\frac{r\sqrt{T^3}}{n}.$$

Для приближенного решения уравнения (2.5) воспользуемся результатом леммы и конечномерным вариантом метода невязки, предложенным в работе [6]. Этот метод заключается в сведении уравнения (2.5) к вариационной задаче на условный экстремум:

$$\inf\Big\{\|g(\tau)\|^2\colon g(\tau)\in G_n,\quad \|C_{n,m}g(\tau)-\psi_\delta^m(x)\|\le r\sqrt{T}\mu_{n,m}+\frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n}+\delta\Big\},\tag{4.2}$$

где $\psi_\delta^m(x)=Q_m[\psi_\delta(x)],\quad \widehat{d}=\Big[\int_0^1dx\int_0^T P^2(x,\tau)d\tau\Big]^{1/2}$.

В работе [6, теорема 3] доказано, что при условии

$$\|\psi_\delta^m(x)\|>r\sqrt{T}\mu_{n,m}+\frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n}+\delta\tag{4.3}$$

вариационная задача (4.2) имеет единственное решение $\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)$, которое удовлетворяет равенству

$$\|C_{n,m}\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)-\psi_\delta^m(x)\|=r\sqrt{T}\mu_{n,m}+\frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n}+\delta.$$

Из работы [7, теорема 1] следует, что задача (4.2) сводится к вариационной задаче на безусловный экстремум

$$\inf\big\{\|C_{n,m}g(\tau)-\psi_\delta^m(x)\|^2+\alpha\|g(\tau)\|^2\colon g(\tau)\in G_n\big\},\quad \alpha>0.\tag{4.4}$$

Задача (4.4) имеет единственное решение $g^\alpha_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)$, в котором параметр α выбирается из принципа невязки [8, с. 173]

$$\|C_{n,m}g^\alpha_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)-\psi_\delta^m(x)\|^2=r\sqrt{T}\mu_{n,m}+\frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n}+\delta,\tag{4.5}$$

где $g^\alpha_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)$ — решение задачи (4.4).

Известно (см. [8, теорема 3]), что при выполнении условия (4.3) уравнение (4.5) относительно α имеет единственное решение $\alpha(n,m)$.

Таким образом, при выполнении условия (4.3) получим решение задачи (4.2)

$$g^{\alpha(n,m)}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau):=\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau),\quad \overline{u}_{\delta,\mu_{nm}}(\tau)=B\overline{g}_{\delta,\mu_{nm}}(\tau),\tag{4.6}$$

$$\overline{h}_{\delta\mu_{nm}}(t)=\int\limits_0^t\overline{u}_{\delta,\mu_{nm}}(\tau)d\tau.$$

5. Оценка погрешности приближенного решения $\overline{h}_{\delta\mu_{n,m}}(t)$ обратной задачи (1.2), (1.3), (2.1), (2.2)

Одним из подходов к численной оценке погрешности приближенного решения уравнения (2.5) являются выделение конечного числа допустимых точных решений уравнения (2.5) и определение максимального уклонения приближенного решения уравнения от этих решений.

Для выделения конечного числа допустимых точных решений разобьем отрезок $[-r,r]$ на $2l$ равных по длине отрезков точками

$$g_0 < g_1 < \ldots < g_{2l}, \quad g_0 = -r, \quad g_{2l} = r, \quad g_{p+1} - g_p = \frac{r}{l}, \quad p = 0, 1, \ldots, 2l-1.$$

Для определения конечного числа допустимых точных решений уравнения (2.5) рассмотрим множество $S_r^{n,l} \subset L_2[0,T]$:

$$S_r^{n,l} = \Big\{ g(\tau)\colon g(\tau) = g_{p_j},\ \tau_j \le \tau < \tau_{j+1},\ j \in \overline{0,n-1},\ p_j \in \overline{0,2l-1},\ \sum_{j=0}^{n-1} g_{p_j}^2 \le r^2 \Big\},\ g_{p_j} = \mathrm{const}.$$

Определим множество $M_r^{n,l} = B[S_r^{n,l}]$.

Далее введем множество $\Omega_r^{n,l} \subset M_r^{n,l}$.

$$\Omega_r^{n,l} = \Big\{ u(\tau)\colon u(\tau) \in M_r^{n,l},\ u(\tau) = Bg(\tau),\ \|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}\widehat{c}}{l} + \delta \Big\}, \tag{5.1}$$

где $\widehat{c} = \Big[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \overline{K}_{j,k}^2 \Big]^{1/2}$.

Введем функцию $\gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau))$ формулой

$$\gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)) = \max_{u(\tau)} \big\{ \|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u(\tau)\|_{L_2[0,T]} \colon u(\tau) \in \Omega_r^{n,l} \big\}, \tag{5.2}$$

где множество $\Omega_r^{n,l}$ определено формулой (5.1).

Из формулы (2.4) следует, что $u_0^n(\tau)$ для любого $j \in \overline{0,n-1}$ будет непрерывной кусочно-линейной функцией на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Непрерывную кусочно-линейную функцию достаточно определить в точках τ_j. Используя функцию $g_0^n(\tau)$, определим функцию

$$u_0^n(\tau) := B[g_0^n(\tau)]. \tag{5.3}$$

Из $u_0(\tau_j) := a - \int_0^{\tau_j} g_0^n(\xi) d\xi$ получим $u_0^n(\tau_j) = u_0(\tau_j),\ j = 0, 1, \ldots, n-1,\ u_0(\tau) = B[g_0(\tau)]$.

Теорема 1. *Пусть функция* $\overline{u}_{\delta,\mu_{nm}}(\tau)$ *определена* (4.6), $u_0^n(\tau)$ — *формулой* (5.3). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\overline{u}_{\delta,\mu_{nm}}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \le \gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)) + \frac{r\sqrt{T}}{l}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что $\Omega_r^{n,l} \ne \varnothing$. Для этого рассмотрим функцию $g_0(\xi) \in C[0,T]$ такую, что $C[g_0(\tau)] := \psi_0(x)$.

Из формулы Лагранжа следует, что для любого $j = \overline{0,n-1}$ существует $\theta_j \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ такое, что для любого $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ $\quad g_0^n(\tau) = g_0(\theta_j)$.

Тогда $\sup\limits_{0 \le t \le T} |g_0^n(\tau)| \le r$ и $\|g_0^n(\tau)\|_{L_2[0,T]} \le r\sqrt{T}$.

Так как $u_0(\tau) := B[g_0(\tau)]$ и $u_0^n(\tau) := B[g_0^n(\tau)]$, по формуле Лагранжа имеем для любого $\tau \in [0,T]$

$$|u_0^n(\tau) - u_0(\tau)| \le \frac{rT}{n}, \quad \|u_0^n(\tau) - u_0(\tau)\|_{L_2[0,T]} \le \frac{r\sqrt{T^3}}{n}. \tag{5.4}$$

Теперь оценим величину $\|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\|_{L_2[0,1]}$.

Ввиду того, что для любого $g(\tau) \in L_2[0,T]$ $C_{n,m}g(\tau) \in X_m$, будет иметь место следующее неравенство:

$$\|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le \|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta(x)\| \le \|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - C[g_0^n(\tau)]\| + \|C[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta(x)\|$$

$$\le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \|C[g_0^n(\tau)] - C[g_0(\tau)]\| + \|\psi_0(x) - \psi_\delta(x)\|. \tag{5.5}$$

Из (5.4) и (5.5) следует, что

$$\|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \delta. \tag{5.6}$$

Далее возьмем функцию $\widehat{g}(\tau) \in S_r^{n,l}$ такую, что для любого $\tau \in [0,T]$ $\quad |\widehat{g}(\tau)| \le r$ и

$$|\widehat{g}(\tau) - g_0^n(\tau)| \le \frac{r}{l}. \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что

$$\|C_{n,m}[\widehat{g}(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}}{l}\widehat{c} + \delta. \tag{5.8}$$

Учитывая (5.1), (5.8), получим $\widehat{u}(\tau) = B[\widehat{g}(\tau)] \in \Omega_r^{n,l}$.

Перейдем к оценке величины $\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\|$.

Заметим, что

$$\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \le \sup_{g(\tau)}\Big\{\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - Bg(\tau)\|_{L_2} \colon g(\tau) \in G_n \cap C[0,T],$$

$$\|g(\tau)\|_{C[0,T]} \le r, \quad \|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \delta\Big\}.$$

Ввиду компактности множества допустимых решений уравнения (2.5) найдется функция $\overline{g}_0^n(\tau) \in G_n \cap C[0,T]$, $\|\overline{g}_0^n(\tau)\|_{C[0,T]} \le r$ и $\|C_{n,m}[\overline{g}_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \dfrac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \delta$ такая, что

$$\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[\overline{g}_0^n(\tau)]\| = \sup\Big\{\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[g(\tau)]\|_{L_2} \colon g(\tau) \in G_n \cap C[0,T],$$

$$\|g(\tau)\|_{C[0,T]} \le r, \quad \|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \delta\Big\}. \tag{5.9}$$

Из (5.7) следует существование функции $\widehat{g}(\tau) \in S_r^{n,l}$ такой, что $B[\widehat{g}(\tau)] \in M_r^{n,l}$ и

$$\|C_{n,m}[\widehat{g}(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}}{l}\widehat{c} + \delta, \tag{5.10}$$

$$\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[\widehat{g}(\tau)]\| \le \|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[g_0^n(\tau)]\| + \frac{r\sqrt{T}}{l}. \tag{5.11}$$

Из (5.9)–(5.11) следует, что

$$\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \le \sup_{g(\tau)}\big\{\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[g(\tau)]\| \colon B[g(\tau)] \in M_r^{n,l}\big\},$$

$$\|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \le r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}}{l}\widehat{c} + \frac{r\sqrt{T}\widehat{c}}{l} + \delta.$$

Из (5.2) и (5.11) следует оценка $\|\overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \le \gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)) + \dfrac{r\sqrt{T}}{l}$.

Тем самым теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что $\|\overline{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t) - h_0^n(t)\| \le \gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)) + \dfrac{r\sqrt{T}}{l}$.

Хорошо известно, что одной из основных оценочных функций при определении погрешности методов является модуль непрерывности обратного оператора [4, с. 144]

$$\omega(\tau, r) = \sup\Big\{\|Bg\|_{L_2[0,T]} \colon g \in L_2[0,T],\ \|g\|_{L_2[0,T]} \le r,\ \|Cg\|_{L_2[0,T]} \le \tau\Big\}, \quad \text{где } \ r \ \text{ и } \ \tau > 0.$$

В связи с этим важную роль приобретает умение вычислять $\omega(\tau, r)$. В работе [9] предложена общая методика вычисления $\omega(\tau, r)$.

Одним из условий, позволяющих вычислить модуль непрерывности обратного оператора $\omega(\tau, r)$, является коммутируемость операторов $C_1 = C^*C$ и $B_1 = BB^*$ (см. [4, с. 144]).

Рассмотрим оператор C_1:

$$C_1 g(\tau) = C^*Cg(\tau) = \int\limits_0^T K_1(t,\tau) g(\tau) d\tau, \quad C_1 \colon L_2[0,T] \to L_2[0,T], \tag{5.12}$$

где $K_1(t,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} e^{-\lambda_i^2[2T-(\tau+t)]}$, и оператор B_1:

$$B_1 g(\tau) = B^*Bg(\tau), \quad B_1 \colon L_2[0,T] \to L_2[0,T]. \tag{5.13}$$

Покажем, что для операторов B_1 и C_1, определенных в данной статье формулами (5.12) и (5.13), это условие не выполняется.

Утверждение. *Пусть операторы C_1 и B_1 определены формулами* (5.12), (5.13), *а $T > 3/2$. Тогда $B_1 C_1 \ne C_1 B_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. У оператора B_1 существует система собственных чисел $\left\{\dfrac{2T}{\pi(2j+1)}\right\}$ кратности 1 и соответствующих им собственных функций $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{T}} \sin \dfrac{\pi(2j+1)\tau}{2T}\right\}$.

Положим $j = 1$ и обозначим $\sqrt{\dfrac{2}{T}} \sin \dfrac{3\pi\tau}{2T}$ через $\varphi_0(\tau)$. Покажем, что $\varphi_0(\tau)$ не является собственной функцией оператора C_1. Имеем

$$C_1 \sin \frac{3\pi\tau}{2T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \int\limits_0^T e^{-\lambda_i^2(2T-(\tau+t))} \sin \frac{3\pi\tau}{2T} d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \frac{6T\pi e^{-\lambda_i^2(2T-t)} - 4T^2 e^{-\lambda_i^2(T-t)}\lambda_i^2}{9\pi^2 + 4T^2\lambda_i^4}. \tag{5.14}$$

Возьмем значение $\tau_0 = 2T/3$ и проверим, что для любого $\lambda \ne 0$ $C_1\varphi_0(\tau_0) \ne \lambda\varphi_0(\tau_0)$. При $t = \tau_0$ и $T > 3/2$ из того, что $|b_i| \le \dfrac{4}{\lambda_i}$, $\lambda_i > \pi i \ge \pi$, и условия (5.14) получим

$$C_1\varphi_0(\tau_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \frac{6T\pi e^{-\lambda_i^2 \frac{4T}{3}} - 4T^2 e^{-\lambda_i^2 \frac{T}{3}}\lambda_i^2}{9\pi^2 + 4T^2\lambda_i^4} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4b_i\pi\left(4T^2 - 6T\right) e^{-\lambda_i^2 \frac{T}{3}}}{\lambda_i^5\left(9\pi^2 + 4T^2\lambda_i^4\right)} < 0.$$

Так как $\varphi_0(\tau_0) = 0$, то для любого $\lambda \ne 0$

$$C_1\varphi_0(\tau) \ne \lambda\varphi_0(\tau). \tag{5.15}$$

Для доказательства некоммутируемости операторов B_1 и C_1 предположим противное, т. е.

$$B_1C_1 = C_1B_1, \tag{5.16}$$

тогда

$$B_1\varphi_0(\tau) = \frac{2T}{3\pi}\varphi_0(\tau), \quad C_1B_1\varphi_0(\tau) = \frac{2T}{3\pi}C_1\varphi_0(\tau). \tag{5.17}$$

Из (5.16), (5.17) получим

$$B_1C_1\varphi_0(\tau) = C_1B_1\varphi_0(\tau) = \frac{2T}{3\pi}C_1\varphi_0(\tau). \tag{5.18}$$

Так как спектр оператора B_1 простой, то из (5.17) и (5.18) следует существование $\lambda \neq 0$ такого, что

$$C_1\varphi_0(\tau) = \lambda\varphi_0(\tau). \tag{5.19}$$

Равенство (5.19) противоречит (5.15). Утверждение доказано.

Следующая теорема показывает связь полученной оценки с модулем непрерывности обратного оператора.

Теорема 2. *Пусть функция* $\gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau))$ *определена* (5.2). *Тогда справедлива оценка*

$$\gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)) \leq 2\omega\Big(2r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{2r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}\widehat{c}}{l} + \delta, r\sqrt{T}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\|\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)\| \leq r\sqrt{T}$, а $B[g(\tau)] \in \Omega_r^{n,l}$, то $\|g(\tau)\| \leq r\sqrt{T}$ и

$$\|C_{n,m}[\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)] - C_{n,m}[g(\tau)]\| \leq 2r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{2r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}\widehat{c}}{l} + 2\delta.$$

Пусть $g(\tau) \in S_r^{n,l}$,

$$\|C_{n,m}[\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)] - C[g(\tau)]\| \leq \|C - C_{n,m}\|\|\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)\| + \|C_{n,m}[\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)] - C[g(\tau)]\|,$$

$$\|C_{n,m}[\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)] - C[g(\tau)]\| \leq \|C_{n,m}[\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)] - C_{n,m}[g(\tau)]\| + \|C - C_{n,m}\|\|\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)\|.$$

Учитывая вышесказанное, получим следующее неравенство:

$$\|C_{n,m}[\overline{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)] - C[g(\tau)]\| \leq 4r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{4r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{2r\sqrt{T}\widehat{c}}{l} + 2\delta.$$

Тогда $\gamma(\delta, r, \overline{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)) \leq 2\omega\Big(2r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \dfrac{2r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \dfrac{r\sqrt{T}\widehat{c}}{l} + \delta, r\sqrt{T}\Big)$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Танана В.П.** Об одном оптимальном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1279–1282.
2. **Васин В.В.** Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 11–21.
3. **Данилин А.Р.** Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 8. С. 1123–1130.
4. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

5. **Танана В.П., Сидикова А.И.** О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 238–252.
6. **Иванов В.К.** О приближенном решении операторных уравнений первого рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 6. С. 1089–1094.
7. **Васин В.В.** О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 3. С. 265–272.
8. **Морозов В.А.** О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 1. С. 170–175.
9. **Иванов В.К., Королюк Т.И.** Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.

Сидикова Анна Ивановна Поступила 10.12.2015
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры вычислительной математики
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: 7413604@mail.ru

REFERENCES

1. Tanana V.P. On an optimal algorithm for operator equations of the first kind with a perturbed operator. *Soviet Math. Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 292–295.
2. Vasin V.V. Discrete convergence and finite-dimensional approximation of regularizing algorithms. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 8–19. doi: 10.1016/0041-5553(79)90062-4 .
3. Danilin A.R. Order-optimal estimates of finite-dimensional approximations of solutions of ill-posed problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1985, vol. 25, no. 4. P. 102–106. doi: 10.1016/0041-5553(85)90152-1 .
4. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Berlin: Walter de Gruyter, 2002, 294 p., ISBN: 9783111826141. Original Russian text published in *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p.
5. Tanana V.P., Sidikova A.I. On the guaranteed accuracy estimate of an approximate solution of one inverse problem of thermal diagnostics. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 238–252 (in Russian).
6. Ivanov V.K. The approximate solution of operator equations of the first kind. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 197–205. doi: 10.1016/0041-5553(66)90171-6 .
7. Vasin V.V. Relationship of several variational methods for the approximate solution of ill-posed problems. *Math. Notes*, 1970, vol. 7, pp. 161–165. doi: 10.1007/BF01093105 .
8. Morozov V.A. Regularization of incorrectly posed problems and the choice of regularization parameter. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 1, pp. 242–251. doi: 10.1016/0041-5553(66)90046-2 .
9. Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1969, vol. 9, no. 1, pp. 35–49. doi: 10.1016/0041-5553(69)90005-6 .

The paper was received by the Editorial Office on December 10, 2015.

Anna Ivanovna Sidikova, Cand. Sci. (Phys.-Math.) South Ural state university (national research university), Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: 7413604@mail.ru .