ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.977

К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ[1]

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Для системы уравнений Эйлера, описывающей установившееся движение идеального политропного газа, рассматривается задача об обтекании тела, поверхность которого известна, в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций. Используются подходы геометрического метода, развиваемого авторами. В первой части работы задача об обтекании заданного тела решается в специальном классе течений, для которого уравнение неразрывности выполняется тождественно. Показано, что класс решений не пуст. Получено одно точное решение. Во второй части статьи рассматривается общий случай стационарных течений идеального политропного газа. Система уравнений Эйлера сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой получено точное решение задачи при заданном на теле давлении. Рассмотрены примеры, демонстрирующие особенности полученных точных решений. Показано, что такие решения позволяют выделять на гладкой обтекаемой поверхности точки, в которых наблюдается обострение, сильные или слабые разрывы.

Ключевые слова: система уравнений Эйлера, политропный газ, задача об обтекании, установившееся движение, точные решения.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. On the problem of the flow of an ideal gas around bodies.

For Euler equations describing a steady motion of an ideal polytropic gas, we consider the problem of a flow around a body with known surface in the class of twice continuously differentiable functions. We use approaches of the geometric method developed by the authors. In the first part of the paper, the problem of a flow around a given body is solved in a special class of flows for which the continuity equation holds identically. We show that the class of solutions is nonempty and obtain one exact solution. In the second part of the paper we consider the general case of stationary flows of an ideal polytropic gas. The Euler equations are reduced to a system of ordinary differential equations, for which we obtain an exact solution for a given pressure on the body. Examples illustrating the properties of the obtained exact solutions are considered. It is shown that such solutions make it possible to find points of a smooth surface of a body where blowups or strong or weak discontinuities occur.

Keywords: Euler equations, polytropic gas, flow around bodies, stationary flows, exact solutions.

MSC: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-200-209

Введение

Авторы в ряде работ развивают геометрический метод решения нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных. Метод позволяет получать точные решения и сводить системы уравнений в частных производных к системам ОДУ, решать некоторые начальные и краевые задачи.

Цель этой статьи — продемонстрировать возможности геометрического метода на примере решения задачи об обтекании с использованием широко известной модели Эйлера для идеального газа. Эту модель нередко применяют при решении такой задачи [1–3].

При использовании в задачах обтекания модели Эйлера для идеального газа на теле обычно задается условие непротекания [4] в отличие от решения задачи обтекания, когда используются уравнения Навье — Стокса и на теле задают условия прилипания $u = v = w = 0$ (см. например, [5]). Как правило, задачи обтекания решаются численными методами. В этом случае особую трудность представляет достаточно точная аппроксимация уравнения неразрывности [6].

[1]Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-10).

В статье рассматривается модель идеального политропного газа [7] для установившегося движения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$\rho[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}] = -\nabla p, \quad \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{p}{p_0} = \Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^{\gamma}. \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — вектор скорости с компонентами $\{u, v, w\}$; p — давление; ρ — плотность; γ — показатель политропы; $\{x, y, z\}$ — независимые переменные; $p_0 = \mathrm{const}$; $\rho_0 = \mathrm{const}$.

В разд. 1 рассмотрен такой класс течений, для которого тождественно выполняются уравнение неразрывности и краевое условие непротекания на заданном обтекаемом теле. Для этого класса система уравнений Эйлера сводится к системе трех уравнений для трех неизвестных функций. В работе с использованием подходов геометрического метода показано, что даже в том случае, когда одна из этих функций выбрана специальным образом, переопределенная система оказывается совместной.

В разд. 2 разработанный ранее метод сведения системы уравнений в частных производных к системе ОДУ [8] используется для решения одной задачи об обтекании. Для сведения системы уравнений Эйлера к системе ОДУ предложен вид независимой переменной, включающий в себя две произвольные функции одного аргумента. В работе показано, что такие функции можно не только задавать произвольно, как в [8], но и подбирать так, чтобы они позволили решить поставленную краевую задачу.

1. Об одном классе течений идеального газа

Рассмотрим течения идеального газа, удовлетворяющие условию

$$\rho\mathbf{V} = \triangledown a \times \triangledown b, \tag{1.1}$$

где $a = a(x, y, z)$, $b = b(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Из (1.1) следует, что скалярные произведения $(\nabla a, \rho\mathbf{V}) = 0$, $(\nabla b, \rho\mathbf{V}) = 0$. Предположим, что $b(x, y, z)$ — известная функция. Пусть, например, $b(x, y, z) = z - \xi(x, y) = 0$ — поверхность обтекаемого тела. Если считать, что описанные выше функции — решения системы (0.1), то будет ли такой класс решений не пуст? В рамках этого класса система уравнений Эйлера сводится к переопределенной системе четырех уравнений для двух неизвестных функций $\rho(x, y, z)$ и $a(x, y, z)$. Отметим сразу, что несложно проверить, что уравнение неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$ на данном классе течений обращается в тождество, следовательно, достаточно показать, что система оставшихся трех уравнений для двух неизвестных функций совместна.

Утверждение 1. *Пусть компоненты скорости* (u, v, w) *в системе* (0.1) *удовлетворяют условиям* (1.1)*, где* $b(x, y, z) = z - \xi(x, y) = 0$ *— заданное уравнение обтекаемого тела. Тогда существует такое давление, при котором система уравнений* (0.1) *имеет решение на поверхности обтекаемого тела.*

Доказательство. Положим в (1.1) $a = a(r)$, где $r = \ln\rho$. Так как $b(x, y, z) = z - \xi(y, x) = 0$ — известное уравнение поверхности обтекаемого тела, (1.1) можно переписать в виде

$$u = a^{'}\alpha, \quad v = a^{'}\beta, \quad w = a^{'}\delta, \quad \alpha = r_y b_z - r_z b_y, \quad \beta = r_z b_x - b_z r_x, \quad \delta = b_y r_x - r_y b_x. \tag{1.2}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ρ. Подставив (1.2) в систему (0.1), получаем

$$\begin{gathered}\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z = f_1(r) r_x, \quad \alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z = f_1(r) r_y, \quad \alpha\delta_x + \beta\delta_y + \delta\delta_z = f_1(r) r_z, \\ f_1(r) = \frac{g(r)}{(a^{'}(r))^2}, \quad g(r) = -\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\Big)\exp\left[r(\gamma - 1)\right].\end{gathered} \tag{1.3}$$

Найдя r_x из соотношения для β в (1.3), а r_y — из соотношения для α в (1.3) и подставив эти выражения в соотношение для δ в (1.3), получим зависимость $\delta = -[\alpha(b_x/b_z) + \beta(b_y/b_z)]$. Из полученной зависимости найдем производные функции δ и, подставив их в третье уравнение системы (1.3), будем иметь

$$-\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)(\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z) - \Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)(\alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z) - \alpha\Big[\alpha\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)_x + \beta\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)_x\Big]$$
$$- \beta\Big[\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)_y + \beta\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)_y\Big] - \delta\Big[\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)_z + \beta\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)_z\Big] = f_1 r_z.$$

Подставляя в выписанное соотношение вместо $(\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z)$ и $(\alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z)$ правые части соответствующих уравнений из системы (1.3), а вместо α, β, δ — их выражения через производные функции r из (1.2), получим уравнение первого порядка относительно функции $r(x, y, z)$

$$\begin{aligned}
&(r_y b_z - r_z b_y)\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)_z\Big[(r_y b_z - r_z b_y)\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big) + (r_z b_x - r_x b_z)\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)\Big] \\
&+ (r_z b_x - r_x b_z)\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)_z\Big[(r_y b_z - r_z b_y)\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big) + (r_z b_x - r_x b_z)\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)\Big] \\
&- (r_y b_z - r_z b_y)^2\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)_x - (r_y b_z - r_z b_y)(r_z b_x - r_x b_z)\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)_x \\
&- (r_y b_z - r_z b_y)(r_z b_x - r_x b_z)\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)_y - (r_z b_x - r_x b_z)^2\Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)_y \\
&- f_1\Big[\Big(\frac{b_x}{b_z}\Big)r_x + \Big(\frac{b_y}{b_z}\Big)r_y + r_z\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Итак, решение системы (0.1) сведено к решению переопределенной системы трех уравнений для определения функции $r(x, y, z)$ — двух первых уравнений из системы (1.3) и уравнения (1.4).

Пусть на теле задано давление, тогда можно считать, что на теле задано $r(\xi(x, y), x, y) = q(x, y)$. Отсюда

$$r_x(\xi(x, y), x, y) = q_x - r_z(\xi(x, y), x, y)\xi_x, \quad r_y(\xi(x, y), x, y) = q_y - r_z(\xi(x, y), x, y)\xi_y.$$

Подставив эти значения r_x, r_y в (1.4), определим

$$r_z(\xi(x, y), x, y) = \frac{\xi_{xx} q_y^2 - 2\xi_{xy} q_x q_y + \xi_{yy} q_x^2 + f_1(q_x\xi_x + q_y\xi_y)}{f_1(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1)} = p(x, y, f_1).$$

Тогда, продифференцировав по x и по y $r_x(\xi(x, y), x, y)$, $r_y(\xi(x, y), x, y)$, $r_z(\xi(x, y), x, y)$, получим

$$r_{zx} = p_x - \frac{dp}{df_1} f_1' q_x - r_{zz}\xi_x, \quad r_{zy} = p_y - \frac{dp}{df_1} f_1' q_y - r_{zz}\xi_y,$$

$$r_{xx} = q_{xx} - 2r_{zx}\xi_x - r_{zz}\xi_x^2 - r_z\xi_{xx}, \quad r_{xy} = q_{xy} - r_{zy}\xi_x - r_{xz}\xi_y - r_{zz}\xi_x\xi_y - r_z\xi_{xy},$$
$$r_{yy} = q_{yy} - 2r_{zy}\xi_y - r_{zz}\xi_y^2 - r_z\xi_{yy}.$$

Таким образом, все производные второго порядка на теле определятся, если будет известна $r_{zz}(\xi(x, y), x, y)$. Подставив все известные вторые производные в первое и второе соотношения (1.3), получим

$$q_x q_{xy} - q_y q_{xx} = f_1(q_y - r_z\xi_y), \quad q_y q_{xy} - q_x q_{yy} = f_1(q_x - r_z\xi_x).$$

Как видим, $r_{zz}(\xi(x,y),x,y)$ в эти выражения не вошла. Подставим сюда $r_z(\xi(x,y),x,y)$, выразим f_1 из каждого уравнения и приравняем полученные выражения. Тогда на заданном обтекаемом теле функция $q(x,y)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{(q_x q_{xy}-q_y q_{xx})(\xi_x^2+\xi_y^2+1)+\xi_y(\xi_{xx}q_y^2-2\xi_{xy}q_x q_y+\xi_{yy}q_x^2)}{q_y(\xi_x^2+1)-q_x\xi_x\xi_y}$$
$$=\frac{(q_y q_{xy}-q_x q_{yy})(\xi_x^2+\xi_y^2+1)+\xi_x(\xi_{xx}q_y^2-2\xi_{xy}q_x q_y+\xi_{yy}q_x^2)}{q_x(\xi_y^2+1)-q_y\xi_x\xi_y}. \tag{1.5}$$

Из этих же выражений получаем

$$f_1=\frac{(q_x\xi_x-q_y\xi_y)q_{xy}-q_y\xi_x q_{xx}+q_x\xi_y q_{yy}}{q_y\xi_x-q_x\xi_y}. \tag{1.6}$$

В уравнении (1.5) все члены, зависящие от производных первого порядка от функции $q(x,y)$, перенесем в правую часть уравнения. Обе части получившегося уравнения приравняем к пока произвольной функции $g(q)$. Получим

$$\begin{aligned}
&(\xi_x^2+\xi_y^2+1)\Big[\frac{q_x q_{xy}-q_y q_{xx}}{q_y(\xi_x^2+1)-q_x\xi_x\xi_y}-\frac{q_y q_{xy}-q_x q_{yy}}{q_x(\xi_y^2+1)-q_y\xi_x\xi_y}\Big]=g(q),\\
&(\xi_{xx}q_y^2-2\xi_{xy}q_x q_y+\xi_{yy}q_x^2)\Big[\frac{\xi_x}{q_x(\xi_y^2+1)-q_y\xi_x\xi_y}-\frac{\xi_y}{q_y(\xi_x^2+1)-q_x\xi_x\xi_y}\Big]=g(q).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Для второго уравнения системы (1.7) выпишем расширенную систему уравнений характеристик [9], выбрав в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристик, переменную q. Замкнем полученную систему ОДУ, потребовав, чтобы первое уравнение системы (1.7) было первым интегралом расширенной системы характеристик, и аналогично потребуем, чтобы уравнение (1.6) также было первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик. Получим систему ОДУ, решив которую, найдем $q(x,y)$, $g(q)$ и $f_1(q)$. Используя полученные $f_1(q)$ и $q(x,y)$, найдем сначала $a'(\rho)$, а затем u,v,w на теле (см. (1.2)). Так как при этом все три соотношения (два первых уравнения из системы (1.3) и уравнения (1.4)) обращаются в тождество, приходим к решению системы (0.1) с условиями (1.1).

Итак, на поверхности тела найдено решение задачи об обтекании в классе функций (1.1). Что и требовалось доказать. □

П р и м е р. Если $b(x,y,z)=x=0$, то $\rho u=0$, $\rho v=a_z$, $\rho w=-a_y$, $\alpha=0$, $\beta=r_z$, $\delta=-r_y$. Система уравнений Эйлера приводится к виду

$$r_x=0,\quad r_z r_{yz}-r_y r_{zz}=f_1 r_y,\quad r_y r_{yz}-r_z r_{yy}=f_1 r_z.$$

На теле имеем $r(0,y,z)=q(y,z)$, $r_z(0,y,z)=q_z$, $r_y(0,y,z)=q_y$, $r_{yz}(0,y,z)=q_{yz}$, $r_{zz}(0,y,z)=q_{zz}$, $r_{yy}(0,y,z)=q_{yy}$. Подставляя соответствующие значения в полученную систему уравнений Эйлера, имеем на теле $q_z q_{yz}-q_y q_{zz}=f_1 q_y$, $q_y q_{yz}-q_z q_{yy}=f_1 q_z$. Отсюда получаем уравнение для функции $q(y,z)$: $\dfrac{q_z q_{yz}-q_y q_{zz}}{q_y}=\dfrac{q_y q_{yz}-q_z q_{yy}}{q_z}$ и выражение для f_1: $f_1=\dfrac{q_z^2 q_{yy}-q_{zz}q_y^2}{q_y^2-q_z^2}$. Выберем частное решение уравнения для функции $q(z,y)$: $q(y,z)=y^2+z^2$; тогда $f_1=-2$, $a'=\pm\sqrt{-0.5g(q)}$, $v=2za'$, $w=-2ya'$. Следовательно, получаем

$$u=0,\quad v=\pm z\sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\exp\left[q(\gamma-1)\right]},\quad w=\mp y\sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\exp\left[q(\gamma-1)\right]},$$

$$\rho=\exp q,\quad p=p_0\Big(\frac{\exp q}{\rho_0}\Big)^\gamma,\quad q(y,z)=y^2+z^2.$$

Нетрудно проверить, что имеем решение системы (0.1), удовлетворяющее условию непротекания.

2. К построению решения задачи об обтекании

Рассмотрим общий случай стационарных течений идеального политропного газа. Пусть в системе уравнений Эйлера (0.1) $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $w = w(\psi)$, $\rho = \rho(\psi)$, где $\psi = \psi(x, y, z)$. Тогда система (0.1) приводится [8] к виду

$$\begin{aligned}
&(u + vf_1 + wf_2)u' + \frac{\gamma p_0}{\rho_0}^{\gamma} \rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0,\\
&(u + vf_1 + wf_2)v' + \frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}} f_1\rho^{(\gamma-2)})\rho' = 0,\\
&(u + vf_1 + wf_2)w' + \frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}} f_2\rho^{(\gamma-2)})\rho' = 0,\\
&(u + vf_1 + wf_2)\rho' + \rho(u' + f_1v' + f_2w') = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ — произвольные функции. Штрих обозначает дифференцирование по переменной ψ. Аналогично [8] $\psi_y/\psi_x = f_1(\psi)$, $\psi_z/\psi_x = f_2(\psi)$ (в предположении, что $\psi_x \neq 0$). Чтобы система (2.1), рассматриваемая как система алгебраических уравнений относительно u', v', w', ρ', имела нетривиальное решение, определитель при производных должен быть равен нулю. Приравнивая определитель нулю, получаем, что

$$a)\;\; \rho = \Big[\frac{\rho_0^{\gamma}(u + vf_1 + wf_2)^2}{\gamma p_0(1 + f_1^2 + f_2^2)}\Big]^{1/(\gamma-1)} \quad \text{или} \quad b)\;\; u + vf_1 + wf_2 = 0.$$

Отметим, что в случае b) из системы (2.1) имеем $\rho = \mathrm{const}$.

Нетрудно проверить, что $\psi = \psi(s)$, $s = x + f_1(s)y + f_2(s)z$ является решением системы $\psi_y/\psi_x = f_1(\psi)$, $\psi_z/\psi_x = f_2(\psi)$. Тогда можно считать, что $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$, $\rho = \rho(s)$, $f_1(s) = s_y/s_x$, $f_2(s) = s_z/s_x$. Задавая функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$, из выражения $s = x+f_1(s)y+f_2(s)z$ можно определить $s(x, y, z)$. Подставив это выражение в $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$, $\rho = \rho(s)$, сведем систему (0.1) к ОДУ (см. [8]).

Покажем, как такой подход может быть использован при решении одной задачи об обтекании тела. Рассмотрим последовательно каждый из случаев существования нетривиального решения системы (2.1).

Утверждение 2. *Если $u + vf_1 + wf_2 \neq 0$, а на поверхности обтекаемого тела известна плотность газа, то на поверхности тела существует течение, удовлетворяющее условиям непротекания.*

Доказательство. Так как $u + vf_1 + wf_2 \neq 0$, выполняется условие a). Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\rho)$, $\rho = \eta(y, z) - x$. Тогда система (0.1) примет вид

$$\begin{aligned}
&u' = \frac{-(p_0\gamma/\rho_0)\rho^{(\gamma-2)}}{u + vg_1 + wg_2},\\
&v' = \frac{-(p_0\gamma/\rho_0)g_1\rho^{(\gamma-2)}}{u + vg_1 + wg_2},\\
&w' = \frac{-(p_0\gamma/\rho_0)g_2\rho^{(\gamma-2)}}{u + vg_1 + wg_2},\\
&(u + vg_1 + wg_2) + \rho(u' + g_1v' + g_2w') = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной ρ, $g_1(\rho) = -\eta_y$, $g_2(\rho) = -\eta_z$, где g_1, g_2 удовлетворяют зависимости

$$\rho = \Big[\frac{\rho_0^{\gamma}(u + vg_1 + wg_2)^2}{\gamma p_0(1 + g_1^2 + g_2^2)}\Big]^{1/(\gamma-1)}. \tag{2.3}$$

Таким образом, в данном рассмотрении роль независимой переменной в системе ОДУ (2.2) играет переменная ρ (вместо ψ или s) и вместо призвольных функций $f_1(s)$, $f_2(s)$ рассматриваются произвольные функции $g_1(\rho)$, $g_2(\rho)$, которые ниже будут определены в зависимости от плотности, заданной на поверхности тела. Итак, решаем обратную задачу. В выражении $\rho = x + g_1(\rho)y + g_2(\rho)z$ известны ρ, x, y, z, требуется определить $g_1(\rho)$ и $g_2(\rho)$.

Зададим уравнение поверхности обтекаемого тела $b(x,y,z) = 0$ в параметрическом виде $x = x(q,r)$, $y = y(q,r)$, $z = z(q,r)$, тогда $b_x = y_q z_r - y_r z_q$, $b_y = x_r z_q - x_q z_r$, $b_z = x_q y_r - x_r y_q$. Так как предполагается, что плотность газа ρ на теле известна, пусть $\rho = \rho(q,r)$. Продифференцировав соотношение $\rho(q,r) = \rho(x(q,r), y(q,r), z(q,r))$ сначала по q, затем по r, найдем из полученных выражений $-\eta_y = g_1(q,r) = [(z_q\rho_r - z_r\rho_q) + (x_r z_q - x_q z_r)]/(y_q z_r - y_r z_q)$ и $-\eta_z = g_2(q,r) = [(y_r\rho_q - y_q\rho_r) + (x_q y_r - x_r y_q)]/(y_q z_r - y_r z_q)$.

Далее зафиксируем $r = r^*$ и подставим $\rho(q,r^*)$ в (2.3), тогда из этого выражения можно получить

$$u + vg_1(q,r^*) + wg_2(q,r^*) = \Big[\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\,[1 + g_1^2(q,r^*) + g_2^2(q,r^*)]\rho^{(\gamma-1)}(q,r^*)\Big]^{1/2}. \qquad (2.4)$$

Подставив (2.4) в (2.2), получим

$$\frac{du}{dq} = -\frac{d\rho}{dq}\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\,\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1+g_1^2+g_2^2}\Big)^{1/2}, \quad \frac{dv}{dq} = -g_1\frac{d\rho}{dq}\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\,\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1+g_1^2+g_2^2}\Big)^{1/2},$$
$$\frac{dw}{dq} = -g_2\frac{d\rho}{dq}\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\,\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1+g_1^2+g_2^2}\Big)^{1/2}. \qquad (2.5)$$

Умножим левые части системы (2.5) на компоненты вектора нормали к обтекаемому телу, получим

$$(y_q z_r - y_r z_q)\frac{du}{dq} + (x_r z_q - x_q z_r)\frac{dv}{dq} + (x_q y_r - x_r y_q)\frac{dw}{dq}$$
$$= -\frac{d\rho}{dq}\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\,\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1+g_1^2+g_2^2}\Big)^{1/2}[(y_q z_r - y_r z_q) + (x_r z_q - x_q z_r)g_1 + (x_q y_r - x_r y_q)g_2]. \qquad (2.6)$$

Выпишем условия непротекания $(y_q z_r - y_r z_q)u + (x_r z_q - x_q z_r)v + (x_q y_r - x_r y_q)w = 0$. Продифференцировав это выражение по q и учитывая зависимость (2.6), получим

$$(y_q z_r - y_r z_q)_q u + (x_r z_q - x_q z_r)_q v + (x_q y_r - x_r y_q)_q w$$
$$= \frac{d\rho}{dq}\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1+g_1^2+g_2^2}\Big)^{1/2}[(y_q z_r - y_r z_q) + (x_r z_q - x_q z_r)g_1 + (x_q y_r - x_r y_q)g_2]. \qquad (2.7)$$

Из соотношений (2.4), (2.7) и условия непротекания имеем на обтекаемой поверхности

$$u(q,r^*) = \frac{D_1}{D}, \quad v(q,r^*) = \frac{D_2}{D}, \quad w(q,r^*) = \frac{D_3}{D}, \qquad (2.8)$$

где $D = (x_r z_q - x_q z_r)(x_q y_r - x_r y_q)_q - (x_q y_r - x_r y_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q + g_1\big[(x_q y_r - x_r y_q)(y_q z_r - y_r z_q)_q - (y_q z_r - y_r z_q)(x_q y_r - x_r y_q)_q)\big] + g_2\big[(y_q z_r - y_r z_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q - (x_r z_q - x_q z_r)(y_q z_r - y_r z_q)_q\big]$,

$$D_1 = \Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\Big)^{1/2}\rho^{[(\gamma-3)/2]}\Bigg[\frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}}\big[g_1(x_q y_r - x_r y_q) - g_2(x_r z_q - x_q z_r)\big]$$
$$\times\big[(y_q z_r - y_r z_q) + g_1(x_r z_q - x_q z_r) + g_2(x_q y_r - x_r y_q)\big]$$
$$+\rho\big[(x_r z_q - x_q z_r)(x_q y_r - x_r y_q)_q - (x_q y_r - x_r y_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q\big]\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}\,\Bigg],$$

$$D_2 = \Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\Big)^{1/2}\rho^{[(\gamma-3)/2]}\Big[\frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}}\big[g_2(y_qz_r-y_rz_q)-(x_qy_r-x_ry_q)\big]$$

$$\times\big[(y_qz_r-y_rz_q)+g_1(x_rz_q-x_qz_r)+g_2(x_qy_r-x_ry_q)\big]$$

$$+\rho\big[(x_qy_r-x_ry_q)(y_qz_r-y_rz_q)_q-(y_qz_r-y_rz_q)(x_qy_r-x_ry_q)_q\big]\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}\;\Big],$$

$$D_3 = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2}\rho^{[(\gamma-3)/2]}\Big[\frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}}\big[(x_rz_q-x_qz_r)-g_1(y_qz_r-y_rz_q)\big]$$

$$\times\big[(y_qz_r-y_rz_q)+g_1(x_rz_q-x_qz_r)+g_2(x_qy_r-x_ry_q)\big]$$

$$+\rho\big[(y_qz_r-y_rz_q)(x_rz_q-x_qz_r)_q-(x_rz_q-x_qz_r)(y_qz_r-y_rz_q)_q\big]\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}\;\Big].$$

Аналогично получаются значения компонент скорости при всех r. Итак, найдено искомое течение на заданной поверхности тела.

Что и требовалось доказать. □

Формулы (2.8) позволяют выделять особые точки на поверхности обтекаемого тела (обострение, если $D=0$, $D_i\neq 0$ $(i=1,2,3)$, или неопределенности, когда и числитель, и знаменатель стремятся к нулю).

Например, рассмотрим обтекание сферы $x=a\cos q\sin r$, $y=a\sin q\sin r$, $z=a\cos r$, $a=\mathrm{const}$ — радиус сферы, когда на сфере задана плотность $\rho=\eta(y)-x$ (при таком распределении плотности $g_2=0$). Тогда

$$D=-a^4\sin^3 r\cos r(g_1\sin q+\cos q),$$

$$D_1=\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\Big)^{1/2}\rho^{(\gamma-3)/2}\sin^3 r\cos r\Big[\frac{a^4\rho_qg_1}{\sqrt{1+g_1^2}}(\cos q+g_1\sin q)-\rho a^4\cos q\sqrt{1+g_1^2},\Big],$$

$$D_2=-\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\Big)^{1/2}\rho^{[(\gamma-3)/2]}\sin^3 r\cos r\Big[\frac{a^4\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2}}(\cos q+g_1\sin q)-\rho a^4\sin q\sqrt{1+g_1^2}\Big],$$

$$D_3=\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\Big)^{1/2}\rho^{[(\gamma-3)/2]}\sin^4 r\left[\frac{a^4\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2}}(\sin q-g_1\cos q)\times(\cos q+g_1\sin q)+a^4\rho\sqrt{1+g_1^2}\right],$$

$$\rho_q=a\sin r(g_1\cos q+\sin q).$$

При подстановке полученных значений D, D_i, $(i=1,2,3)$ в (2.8) имеем, что $D=0$, если $-g_1\cos r\sin q-\cos r\cos q=0$. В частности, если $z=0$ $(\cos r=0,\ x^2+y^2=a^2)$, то $D=0$, $D_1=0$, $D_2=0$. Раскрывая неопределенности, получаем

$$\lim_{z\to 0}u=\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\Big)^{1/2}\rho^{(\gamma-3)/2}\Big(\frac{\rho\cos q}{g_1\sin q+\cos q}\sqrt{1+g_1^2}-\frac{\rho_qg_1}{\sqrt{1+g_1^2}}\Big),$$

$$\lim_{z\to 0}v=\Big(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\Big)^{1/2}\rho^{(\gamma-3)/2}\Big(\frac{\rho\sin q}{g_1\sin q+\cos q}\sqrt{1+g_1^2}+\frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2}}\Big),\quad \lim_{z\to 0}w=\infty,$$

следовательно, в точке $z=0$ при обтекании сферы наступает обострение.

Завершив рассмотрение случая a) и иллюстрирующего примера, обратимся к случаю b).

Утверждение 3. *Если на поверхности обтекаемого тела $u+vf_1(q)+wf_2(q)=0$, то существуют компоненты скорости, удовлетворяющие условию непротекания.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если на поверхности тела ($x = x(q,r)$, $y = y(q,r)$, $z = z(q,r)$) выполнено условие $u + vf_1(q) + wf_2(q) = 0$, то из системы (2.1) следует, что $\rho(q,r) = \mathrm{const}$, $u' + v'f_1 + w'f_2 = 0$. Зафиксируем некоторую линию на поверхности тела, положив $r = r^*$. Продифференцируем соотношение $u + vf_1(q) + wf_2(q) = 0$ по q (считаем $r = r^*$ и учтем, что $u' + v'f_1 + w'f_2 = 0$). Получим $vf_1' + wf_2' = 0$. Добавив к имеющимся соотношениям условие непротекания, получим систему алгебраических уравнений для определения компонент скорости на теле

$$\begin{gathered} u(y_q z_r - y_r z_q) + v(x_r z_q - x_q z_r) + w(x_q y_r - x_r y_q) = 0, \\ u + vf_1((q) + wf_2(q) = 0, \quad vf_1' + wf_2' = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Если определитель системы (2.9) отличен от нуля, то на теле выполняются условия прилипания $u(q,r^*) = 0$, $v(q,r^*) = 0$, $w(q,r^*) = 0$. Приравнивая определитель нулю, получаем

$$(f_1 f_2' - f_2 f_1')(y_q z_r - y_r z_q) - f_2'(x_r z_q - x_q z_r) + f_1'(x_q y_r - x_r y_q) = 0.$$

Сравнивая это соотношение с условием непротекания, полагаем, что $u = \lambda(f_1 f_2' - f_2 f_1')$, $v = -\lambda f_2'$, $w = \lambda f_1'$, $\lambda = \mathrm{const}$. С другой стороны, компоненты скорости можно представить в виде $u = f_1(x_q y_r - x_r y_q) - f_2(x_r z_q - x_q z_r)$, $v = f_2(y_q z_r - y_r z_q) - (x_q y_r - x_r y_q)$, $w = (x_r z_q - x_q z_r) - f_1(y_q z_r - y_r z_q)$ (см. (1.1) и вид $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ в системе (2.1)). При таком представлении первые два уравнения системы (2.9) выполняются, а так как определитель системы равен нулю, то выполнено и третье уравнение системы. Учитывая два представления компонент скорости, получаем

$$-\lambda f_2' = f_2(y_q z_r - y_r z_q) - (x_q y_r - x_r y_q), \quad \lambda f_1' = (x_r z_q - x_q z_r) - f_1(y_q z_r - y_r z_q). \tag{2.10}$$

Отсюда определим функции $f_1(q)$ и $f_2(q)$ при каждом r, а затем искомое течение.

Что и требовалось доказать. □

Например, пусть $x = q \sin r$, $y = q \cos r$, $z = q^2$. Тогда, подставляя соответствующие производные в (2.10), получим

$$-\lambda f_2' = 2q^2 f_2 \sin r + q, \quad \lambda f_1' = 2q^2 \cos r - 2q^2 f_1 \sin r. \tag{2.11}$$

Из второго и третьего соотношения (2.11) найдем $f_2(q)$, $f_1(q)$ и получим, что на заданной поверхности вектор скорости имеет вид $u = \lambda(f_1 f_2' - f_2 f_1'),\ v = -\lambda f_2',\ w = \lambda f_1'$, где

$$f_1 = \zeta(r) \exp\left(-2q^3 \sin r/3\right) + \operatorname{ctg} r, \quad f_2 = \exp\left(-2q^3 \sin r/3\right) \left(\eta(r) - \int q \exp\left(2q^3 \sin r/3\right) dq\right).$$

Здесь произвольные функции $\zeta(r)$, $\eta(r)$ и $\lambda = \mathrm{const}$ могут быть использованы для стыковки полученного течения с течениями в соседних областях.

3. Заключение

Подавляющую часть физических процессов и явлений, которые происходят в сплошных средах, можно описать с помощью нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Надежное количественное описание тех эффектов, которые заключает в себе именно нелинейность модели и которые теряются при линеаризации, особенно важно при создании новой техники. Поскольку современные ЭВМ и численные методы не всегда улавливают такие особенности, необходимо сочетание вычислительных методов с применением аналитических конструкций и результатов исследований качественных особенностей нелинейных задач механики сплошной среды [10].

Предложенные методы построения течения газа вблизи тела, поверхность которого задана аналитически, позволяют сводить задачу, которая описывается нелинейной моделью Эйлера, к решению краевой задачи для системы ОДУ в случае, если известна плотность газа. Для гладких кусков поверхности обтекаемого тела данные решения могут использоваться в качестве тестов.

Даже при обтекании гладких поверхностей могут возникать особенности, требующие внимания. В работе рассмотрен пример, когда знаменатель в формулах (2.8) обращается в ноль. Формулы (2.8) для каждой обтекаемой поверхности позволяют определять места на поверхности, где могут наблюдаться обострения, для которых $D \to 0$, а числители дробей при этом не обращаются в ноль, а также слабые и сильные разрывы, когда знаменатель и числитель в формуле (2.8) обращаются в ноль одновременно.

В работе также рассмотрен специальный класс течений (см. (1.1)). Для этого класса течений при заданной поверхности обтекаемого тела получено нелинейное уравнение в частных производных (1.5), которому должно удовлетворять давление на заданном обтекаемом теле, и показано, как, используя решение такого уравнения, получить решение системы Эйлера, удовлетворяющее условию непротекания на обтекаемом теле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лифшиц Ю.Б.** Об обтекании тел вращения звуковым потоком идеального газа // Ученые записки ЦАГИ. 1973. Т. 4, № 6. С. 1–7.
2. **Крайко А.Н., Пьянков К.С., Яковлев Е.А.** Обтекание клина сверхзвуковым потоком идеального газа со "слабыми" и "сильными" скачками // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 451–470.
3. **Луцкий А.Г., Меньшов И.С., Ханхасаева Я.В.** Использование метода свободной границы для решения задач обтекания движущихся тел // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 93. С. 1–16.
4. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. **Galdi G.P.** On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Amsterdam, 2002. Vol. I. P. 653–791.
6. **Рубина Л.И.** Расчет обтекания осесимметричных тел методом крупных частиц с использованием оптимальных криволинейных сеток // Моделирование в механике. 1989. Т. 3 (20), № 6. С 136–140.
7. **Руденко О.В., Солуян С.И.** Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
8. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении некоторых уравнений нелинейной акустики // Акустический журн. 2015. Т 61, № 5. С. 576–582.
9. **Rubina L.I., Ulyanov O.N.** On some method for solving a nonlinear heat equation // Sib. Math. J. 2012. Vol. 53, no. 5. P. 872–881.
10. **Сидоров А.Ф.** Аналитические методы математической физики и математический эксперимент // Число и мысль: сб. ст. М.: Знание, 1987. Вып. 10. С. 75–100.

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила 16.06.2016

Ульянов Олег Николаевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
ученый секретарь института
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: secretary@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lifshits Yu.B. On the flow around the bodies of revolution by the sound flow of an ideal gas. *Uchenye Zapiski TsAGI*, 1973, vol. 4, no. 6, pp. 1–7.
2. Kraiko A.N., P'Yankov K.S., Yakovlev Y.A. The flow of a supersonic ideal gas with “weak” and “strong” shocks over a wedge. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 318–330. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.12.002 .
3. Lutsky A. E., Men'shov I. S., Khankhasaeva Y.V. The use of free boundary method for solving the problem of the flow past moving bodies. *Keldysh Institute Preprints*, 2014, no. 093, pp. 1–16 (in Russian).
4. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ia., Kraiko A.N., Prokopov G.P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 400 p.
5. Galdi G.P. On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications. *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, Amsterdam, 2002, vol. I, pp. 653–791.
6. Rubina L.I. Calculation of the flow around axisymmetric bodies by the large-particle method using optimal curvilinear grids. *Modelirovanie v Mekhanike*, Novosibirsk, 1989, vol. 3 (20), no. 6, pp. 136–140.
7. Rudenko O.V., Soluyan S.I. *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*. Plenum, Consultants Bureau, 1977, Ser. Studies in Soviet Science, 274 p. doi: 10.1002/jcu.1870060222 . Original Russian text published in *Teoreticheskie osnovy nelineinoi akustiki*, Moscow, Nauka Publ., 1975, 274 p.
8. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On solving certain nonlinear acoustics problems *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, no. 5, pp. 527-533. doi:10.1134/S1063771015050152 .
9. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some method for solving a nonlinear heat equation. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 872–881. doi:10.1134/S0037446612050126 .
10. Sidorov A.F. Analiticheskie metody matematicheskoi fiziki i matematicheskii eksperiment *Chislo i mysl'*, Moskow: Znanie, 1987, iss. 10, pp. 75–100.

The paper was received by the Editorial Office on June 16, 2016.

Lyudmila Il'inichna Rubina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: rli@imm.uran.ru .

Oleg Nikolaevich Ul'yanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: secretary@imm.uran.ru .