ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.977

РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ МАССИВНЫХ ТЕЛ КРУГОВЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

И. В. Першин

При математическом моделировании технологических процессов электрошлаковой и лазерной сварки, газопламенной закалки, плазменной обработки поверхностей деталей возникает задача о нагреве полубесконечного тела источником тепла малых размеров в трехмерном случае. Для определения полей температур, скоростей охлаждения, градиентов температур и потоков тепла часто возникает необходимость провести исследования в области, непосредственно прилегающей к источнику нагрева. Важно учитывать распределение плотности теплового потока по площади нагрева, которое может иметь весьма сложный характер. Практически не встречаются примеры исследования решения при произвольном распределении плотности теплового потока. В данной статье рассматривается задача при наличии кругового источника тепла.

Ключевые слова: краевые задачи для уравнений в частных производных, асимптотика решения.

I. V. Pershin. Calculation of thermal fields of massive bodies heated by a radial heat source in the three-dimensional case.

In the mathematical modeling of technological processes of electroslag welding, laser welding, gas-flame hardening, and plasma processing of surfaces, there arises the problem of heating a semi-infinite body by a small source in the three-dimensional case. To find the fields of temperatures, cooling rates, temperature gradients, and heat fluxes, it is often necessary to investigate the areas directly adjacent to the heat source. An important issue is the distribution of the heat flux density over the heating surface, which can be very complex. There are virtually no examples of studying the solutions for an arbitrary distribution of the heat flux density. In this paper the problem is considered in the presence of a circular heat source.

Keywords: boundary value problems for partial differential equations, asymptotics of a solution.

MSC: 35K20, 80A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-196-199

Задача о нагреве полубесконечного тела источником тепла малых размеров используется для анализа процессов электрошлаковой сварки, газопламенной закалки, плазменной обработки и др. Для определения полей температур, скоростей охлаждения, градиентов температур часто возникает необходимость провести исследования в области, непосредственно прилегающей к источнику нагрева. Важно учитывать распределение плотности теплового потока по площади нагрева, которое может иметь весьма сложный характер. Практически не встречаются примеры исследования решения при произвольном распределении плотности теплового потока.

Рассмотрим следующую задачу: на поверхности полубесконечного тела действует источник тепла, заданный на некоторой области (пятне) заданного размера. Не ограничивая общности, можно считать, что источник тепла задан в круге, радиус которого много меньше размеров нагреваемого тела. Распределение теплового потока по пятну определяется функцией, зависящей от физических характеристик источника тепла.

Предполагаются выполненными следующие условия:

— распространение тепла в теле происходит только с помощью теплопроводности, при этом теплофизические свойства материала не зависят от температуры;

— отсутствуют фазовые и структурные превращения;

— граничная поверхность теплоизолирована;

— источник нагрева распределен в круге заданного радиуса, эффективная мощность источника постоянна во времени и обратно пропорциональна величине пятна нагрева (радиусу круга).

Источник тепла действует на границе $x = 0$; так как мы будем исследовать поведение решения вблизи источника тепла, можно считать, что он неподвижен. Случай с подвижным источником тепла может быть получен тривиальной заменой переменных.

Задача описывается трехмерным уравнением теплопроводности в декартовых координатах и граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big), \\ \Big(-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = \varphi(y,z,t,\varepsilon), \\ T(x,y,z,0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области $0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty,\ t > 0$.

Здесь $a = \lambda/(c\rho)$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, ε — радиус пятна нагрева источника тепла.

Функция φ характеризует плотность распределения теплового потока по ширине полосы нагрева и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y,z,\varepsilon)\,dydz = Q, \quad \text{где} \quad Q = \text{const}.$$

Другими словами, функция $\varphi(y,z,\varepsilon)$ такова, что эффективная мощность источника тепла остается постоянной, когда радиус пятна источника тепла ε стремится к нулю, а удельный тепловой поток — к бесконечности.

Не теряя общности, для упрощения исследования можно считать коэффициенты температуропроводности и теплопроводности по величине равными 1, к чему их можно привести путем элементарной замены переменных. Также можно принять эффективную мощность источника $Q \equiv 1$.

Функцию $\varphi(y,z,\varepsilon)$ определим так:

$$\varphi(y,z,\varepsilon) = \frac{\psi(y,z,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Плотность распределения теплового потока $\psi(y,z,\varepsilon)$ задается в виде

$$\psi(y,z,\varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(y,z,\varepsilon), & y^2+z^2 \le \varepsilon^2\ , \\ 0, & y^2+z^2 > \varepsilon^2\ , \end{cases}$$

где функция $\psi_1(y,z,\varepsilon)$ — ограниченная гладкая функция. В предельном случае при $\varepsilon \equiv 0$ функция $\psi(y,z,\varepsilon)$ вырождается в дельта-функцию Дирака.

Решение задачи (1) явно выписывается в виде [1]

$$T(x,y,z,t) = \int\limits_0^t \frac{1}{8\pi(t-\omega)^{3/2}} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{x^2+(y-\eta_1)^2+(z-\zeta_1)^2}{4(t-\omega)}\Big)$$

$$\times\,\varphi\Big(\frac{\eta_1}{\varepsilon}, \frac{\zeta_1}{\varepsilon}\Big)\,d\eta_1\,d\zeta_1\,d\omega. \tag{2}$$

Ниже проведено исследование поведения решения (2) в случае, когда мощность источника тепла постоянна, а площадь нагрева стремится к нулю.

Известно, что вблизи источника тепла на небольшом участке пространства температура резко меняется (решение резко возрастает или убывает), возникают большие температурные градиенты (производные от решения по пространственным переменным также резко меняются, причем значительно сильнее, чем само решение). Другими словами, вблизи источника тепла возникает пограничный слой. Для того чтобы можно было правильно представить это быстрое изменение решения и его производных, в области, по размерам в несколько раз превосходящей ширину пограничного слоя, вводятся новые внутренние "растянутые" переменные.

Перейдем к новым переменным, тогда в этой области решение исходной задачи и его производные будут вести себя как гладкие функции. Размер внутренней области, а также параметры "растяжения" новых переменных зависят от параметров исходной задачи.

В поставленной задаче указанным параметром является линейный размер (ширина) источника тепла. Для представления решения (2) вблизи источника тепла введем новые переменные

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \eta = \frac{\eta_1 - y}{\varepsilon}, \quad \zeta = \frac{\zeta_1 - z}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{(t-\omega)}{\varepsilon^2}.$$

Сделав замену переменных в (2), получим внутреннее решение в виде

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{4\tau}\Big) \times \psi\Big(\eta+\frac{y}{\varepsilon}, \zeta+\frac{z}{\varepsilon}\Big)\, d\eta d\zeta d\tau.$$

Обозначим $s = \eta + u,\ u = \dfrac{y}{\varepsilon},\ r = \zeta + \nu,\ \nu = \dfrac{z}{\varepsilon},\ \vartheta = \dfrac{t}{\varepsilon^2}$, получим

$$w(\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{(\xi^2+(s-u)^2+(r-\nu)^2)}{4\tau}\Big)\psi(s,r)\, ds dr d\tau.$$

Представим это решение в виде

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\xi,s,r)\psi(s,r)\, ds dr,$$

где

$$H(s,r) = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \exp\Big(-\frac{(\xi^2+(s-u)^2+(r-\nu)^2)}{4\tau}\Big) d\tau = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \exp\Big(-\frac{\alpha^2}{4\tau}\Big),$$

а $\alpha^2 = \xi^2 + (s-u)^2 + (r-\nu)^2$.

Можно показать, что этот интеграл равен

$$H(s,r) = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \exp\Big(-\frac{\alpha^2}{4\tau}\Big) = \frac{\pi}{\alpha} - 2\sqrt{\pi}\, \frac{Erf\Big(\frac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}}\Big)}{\alpha}\ ,$$

здесь $Erf(z) = \displaystyle\int_0^z \exp(-t^2)dt$ — функция ошибок [2].

Тем самым, доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Решение* (2) *задачи* (1) *в окрестности источника тепла примет вид*

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(s,r)\frac{\Big(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}Erf\Big(\frac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}}\Big)\Big)}{\alpha}\, ds\, dr. \tag{3}$$

Для практического применения наиболее интересен случай стационарного решения (при больших временах), когда $\vartheta \gg \alpha$. Для этого случая справедливо утверждение

$$\frac{\pi}{\alpha} \gg 2\sqrt{\pi}\frac{Erf\Big(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}}\Big)}{\alpha},$$

и решение исходной задачи имеет вид

$$T(x,y,z) = \frac{1}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(s,r)}{\sqrt{\xi^2+(s-u)^2+(r-\nu)^2}}\,dsdr. \tag{4}$$

Таким образом, получены формулы (3) и (4), по которым определяется решение (температура) в непосредственной близости от источника тепла. Выбрав конкретный вид распределения мощности источника тепла по пятну нагрева, нетрудно получить соответствующие значения температуры. Получены точные аналитические формулы для решения при равномерном и линейном распределениях источника тепла. В том случае, когда непосредственно проинтегрировать полученную функцию невозможно (как, например, в случае нормально распределенного источника тепла), нетрудно получить результат с помощью стандартных методов численного интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полянин А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. 2-е изд. М.: Физматлит, 1963. 359 с.

Першин Игорь Викторович
Поступила 16.02.2017
математик 1-й кат.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: piv@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ. 2001. 575 p.
2. Lebedev N.N. *Special functions and their applications.* New York, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965, 308 p. Original Russian text published in *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya.* Moscow: Fizmatlit, 1963, 359 p.

The paper was received by the Editorial Office on 16 February, 2017.

Igor' Viktorovich Pershin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, piv@imm.uran.ru .