Том 23 № 2 2017

УДК 517.956

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ С КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Е. Ф. Леликова

В работе исследуется асимптотическое поведение решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в случае, когда малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, а предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением. Рассматривается случай, когда граничная функция кусочно гладкая. При этом, точка нарушения гладкости есть точка разрыва первого рода и совпадает с точкой, в которой характеристика предельного уравнения касается границы внутренним образом. Несмотря на то, что порядок предельного уравнения тот же самый, что и у исходного уравнения, рассматриваемая задача является бисингулярной. В работе асимптотическое поведение решения этой задачи исследуется методом согласования асимптотических разложений.

Ключевые слова: сингулярные задачи, краевые задачи для уравнений в частных производных, асимптотические разложения, метод согласования.

E. F. Lelikova. On the asymptotics of a solution to a second-order elliptic equation with a small parameter and a piecewise smooth boundary function.

We study the asymptotic behavior of a solution to the first boundary value problem for a second-order elliptic equation in the case when the small parameter is a factor at only one of the highest derivatives and the limit equation is an ordinary differential equation. We consider the case when the boundary function is piecewise smooth. Moreover, the point where the smoothness is violated is a point of jump discontinuity and coincides with the point where a characteristic of the limit equation touches the boundary from inside. Although the limit equation has the same order as the original equation, the problem under consideration is bisingular. We investigate the asymptotic behavior of the solution to this problem using the method of matched asymptotic expansions.

Keywords: singular problems, boundary value problems for partial differential equations, asymptotic expansions, matching method.

MSC: 34E05, 34E10, 34K26, 35K15, 35K59

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-182-195

Введение

В данной работе исследуется поведение при $\varepsilon \to 0$ решения первой краевой задачи

$$\begin{gathered} \mathrm{L}_\varepsilon u = \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + b(x,y)u_y + a(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in D \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,y) = h(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \end{gathered} \tag{0.1}$$

в ограниченной области D с границей Γ, имеющей точку, в которой характеристика предельного уравнения (прямая, параллельная оси y) касается границы изнутри области. Предполагается, что параметр $\varepsilon > 0$, коэффициенты и правая часть уравнения (0.1) — достаточно гладкие функции, а граничная функция $h(x,y)$ — кусочно гладкая. Предполагается также, что существует ограниченное решение задачи (0.1), которое мы будем обозначать через $u_\varepsilon(x,y)$, и для него справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(x,y)| \leqslant M\Big(\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)| + \max_{(x,y)\in\Gamma}|h(x,y)|\Big),$$

где постоянная M не зависит от ε. (Это условие выполнено, например, при $a(x,y) \leqslant \alpha < 0$.)

Задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовали многие авторы, и библиография по этому вопросу достаточно известна (см., например, статьи [1; 2] и монографии [3–5].

Особенностью исследуемой задачи является то, что малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, так что порядок предельного уравнения тот же самый, что и исходного уравнения. Кроме того, рассматривается случай, когда предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением.

В случае, когда граничная функция $h(x, y)$ гладкая, задача (0.1) исследована в работах [6; 7] — точки внешнего касания и угловые точки границы, [8] — точки внутреннего касания границы, [9] — точки перегиба границы.

Задачи такого рода весьма сложны, в [5] они называются *бисингулярными*. Одним из методов их решения является метод согласования асимптотических разложений [4; 5]. Этот метод состоит из двух частей, не зависимых, вообще говоря, друг от друга. Сначала строятся формальные асимптотические решения (ФАР) исходной задачи в различных подобластях рассматриваемой области изменения независимых переменных, т. е. строятся согласованные между собой асимптотические ряды по некоторым последовательностям функций параметра ε, частичные суммы которых с достаточно высокой степенью точности (по ε) удовлетворяют исходному уравнению и граничному условию в этих подобластях. Далее из частичных сумм этих ФАР строится составное разложение, являющееся ФАР исходной задачи уже всюду в рассматриваемой области изменения переменных. Затем проводится обоснование построенного разложения. Для задач, аналогичных рассматриваемой, обоснование построенного ФАР не вызывает трудностей и достаточно подробно в аналогичных ситуациях описано в работе [5]. Поэтому основным содержанием данной работы является построение ФАР в окрестности рассматриваемой точки внутреннего касания.

Основные трудности в задачах описанного выше типа появляются именно при построении ФАР. Как правило, возникают ситуации, когда в окрестности “особого” подмножества существуют два “внутренних” (по отношению к исходным переменным x, y) асимптотических разложения, которые взаимно определяют друг друга, т. е. не могут быть построены независимо. Для того чтобы реализовать процедуру согласования, необходимо исследовать структуру координатной асимптотики одного из этих внутренних разложений.

Отличием данной работы от описанных выше является рассмотрение случая кусочно гладкой граничной функции. Оказывается, в случаях, когда точка разрыва совпадает с угловой точкой, либо с точкой касания извне области, либо с точкой перегиба, либо является точкой гладкой границы, исследование поведения решения проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано в указанных выше работах, и не требует дополнительных усилий.

Что же касается случая, когда точка разрыва граничной функции совпадает с точкой касания изнутри области, задача требует дополнительных исследований и новых построений.

В данной работе так же, как и в работе [8], методом согласования асимптотических разложений построено и обосновано асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ задачи (0.1) при $\varepsilon \to 0$ в окрестности отрезка прямой, параллельной оси y, касающейся границы Γ области D в точке разрыва граничной функции h изнутри области.

1. Внешнее разложение и его особенности

Будем считать, что точка касания совпадает с началом координат $(0, 0)$, порядок касания первый, а граница Γ области D в некоторой фиксированной окрестности начала координат совпадает с кривой $x = y^2$ и двумя гладкими кривыми $y = \gamma^-(x)$ и $y = \gamma^+(x)$, лежащими в нижней и верхней полуплоскостях соответственно ($\gamma^-(x) < -\sqrt{x}$, $\gamma^+(x) > \sqrt{x}$). Таким образом, рассматриваем область $D_\delta = \{(x, y) \in D,\ -\delta \leqslant x \leqslant \delta,\ \delta > 0\}$, ограниченную параболой $x = y^2$, кривыми $y = \gamma^\pm(x)$ и отрезками прямых $x = -\delta$, $x = \delta$. Будем строить асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \to 0$ в этой области D_δ.

Не ограничивая общности рассмотрений, будем предполагать, что граничная функция $h(x,y) \equiv 0$ при $(x,y) \in \gamma^{\pm}(x)$. Обозначим $h(x,y) = h^{+}(x,y)$ при $y > 0$, $h(x,y) = h^{-}(x,y)$ при $y < 0$. Отметим, что $h^{+}(0,0) \neq h^{-}(0,0)$.

Внешнее разложение решения $u_\varepsilon(x,y)$ будем строить в виде

$$U(x,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x,y). \tag{1.1}$$

Подставляя ряд (1.1) в уравнение (0.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему рекуррентных соотношений

$$\mathrm{L}_0 u_0 = f(x,y), \quad \mathrm{L}_0 u_k = -\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x^2}, \quad k \geqslant 1, \tag{1.2}$$

где обозначено $\mathrm{L}_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + a(x,y)$.

При $x < 0$ прямые, проведенные через точки области D_δ параллельно оси y, пересекают границу области только в двух точках, принадлежащих Γ: $\gamma^{-}(x)$ и $\gamma^{+}(x)$.

Определим в этой части области D_δ коэффициенты внешнего разложения $u_k(x,y)$ как решения рекуррентной системы уравнений (1.2) при $\gamma^{-}(x) < y < \gamma^{+}(x)$, удовлетворяющие граничным условиям из (0.1), которые в рассматриваемой области принимают вид

$$u_k(x,\gamma^{-}(x)) = 0, \quad u_k(x,\gamma^{+}(x)) = 0. \tag{1.3}$$

При $x > 0$ прямая, проведенная через внутреннюю точку области D_δ параллельно оси y, пересекает границу области в четырех точках и состоит из двух отрезков, один из которых лежит между кривыми $y = \sqrt{x}$ и $\gamma^{+}(x)$, а второй — между кривыми $\gamma^{-}(x)$ и $y = -\sqrt{x}$.

При $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \gamma^{+}(x)$ (на первом из отрезков) определим коэффициенты $u_k(x,y)$ как решения рекуррентной системы (1.2), удовлетворяющие условиям

$$u_k(x,\sqrt{x}) = h^{+}(x,\sqrt{x}), \quad u_k(x,\gamma^{+}(x)) = 0. \tag{1.4}$$

При $\gamma^{-}(x) \leqslant y \leqslant -\sqrt{x}$ (на втором из отрезков) определим коэффициенты $u_k(x,y)$ как решения рекуррентной системы (1.2), удовлетворяющие условиям

$$u_k(x,\gamma^{-}(x)) = 0, \quad u_k(x,-\sqrt{x}) = h^{-}(x,-\sqrt{x}). \tag{1.5}$$

Построенное внешнее асимптотическое разложение — это по существу три различных асимптотических ряда, коэффициенты которых определяются как решения трех различных краевых задач: (1.2), (1.3); (1.2), (1.4) и (1.2), (1.5). Очевидно, что функции $u_k(x,y)$, вообще говоря, разрывны на прямой $x = 0$.

Функции $u_k(x,y)$ — это решения обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной y, бесконечно дифференцируемые по переменной y во всей области D_δ. Кроме того, они зависят от параметра x. По предположению, функции $\gamma^{\pm}(x)$ бесконечно дифференцируемы в окрестности начала координат, и, следовательно, функции $u_k(x,y)$ также бесконечно дифференцируемы и по параметру x слева от прямой $x = 0$ (т. е. при $x < 0$). При $x > 0$ функции $u_k(x,y)$ зависят еще и от параметра $\sqrt{x}$, и нетрудно предвидеть, что они могут иметь особенности по переменной x при $x \to +0$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *При $x \to +0$, $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \gamma^{+}(x)$ функции $u_k(x,y)$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$u_0(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/2} u_{0j}^{+}(y), \quad u_k(x,y) = x^{-2k} \sum_{j=1}^{\infty} x^{j/2} u_{kj}^{+}(y),$$

$k \geqslant 1$, *которые допускают почленное дифференцирование любого порядка.*

Теорема 2. *При* $x \to +0$, $\gamma^-(x) \leqslant y \leqslant -\sqrt{x}$ *функции* $u_k(x,y)$ *разлагаются в асимптотические ряды*

$$u_0(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/2} u_{0j}^-(y), \quad u_k(x,y) = x^{-2k} \sum_{j=1}^{\infty} x^{j/2} u_{kj}^-(y),$$

$k \geqslant 1$, *которые допускают почленное дифференцирование любого порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этих теорем полностью повторяет доказательство теорем 1.1, 1.2 работы [8]. $\square$

2. Внутреннее разложение в окрестности прямой $x = 0$

В окрестности оси $x = 0$ перейдем от переменной x к новой, "внутренней", переменной $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и будем строить "внутреннее" асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x,y)$ при $\varepsilon \to 0$ в виде

$$V(\zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} v_k(\zeta, y). \tag{2.1}$$

Стандартным образом, т. е. переходя в исходном уравнении (0.1) к переменной ζ, разлагая коэффициенты $b(x,y)$, $a(x,y)$ и правую часть $f(x,y)$ в ряды Тейлора в окрестности прямой $x = 0$, заменяя в получившихся разложениях x на $\sqrt{\varepsilon}\zeta$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, приходим к системе рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} \mathrm{L}_1 v_0 = f(0,y), \quad \mathrm{L}_1 v_1 = 0, \\ \mathrm{L}_1 v_2 = \zeta \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \zeta \dfrac{\partial b}{\partial x}(0,y) \dfrac{\partial v_0}{\partial y} - \zeta \dfrac{\partial a}{\partial x}(0,y) v_0, \quad \mathrm{L}_1 v_3 = -\zeta \dfrac{\partial b}{\partial x}(0,y) \dfrac{\partial v_1}{\partial y} - \zeta \dfrac{\partial a}{\partial x}(0,y) v_1, \\ \\ \mathrm{L}_1 v_{2j} = \dfrac{\zeta^j}{j!} \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(0,y) - \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \dfrac{\zeta^i}{i!} \Big[\dfrac{\partial^i b}{\partial x^i}(0,y) \dfrac{\partial v_{2j-2i}}{\partial y} + \dfrac{\partial^i a}{\partial x^i}(0,y) v_{2j-2i} \Big], \\ \mathrm{L}_1 v_{2j+1} = - \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \dfrac{\zeta^i}{i!} \Big[\dfrac{\partial^i b}{\partial x^i}(0,y) \dfrac{\partial v_{2j+1-2i}}{\partial y} + \dfrac{\partial^i a}{\partial x^i}(0,y) v_{2j+1-2i} \Big]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь обозначено $\mathrm{L}_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + b(0,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + a(0,y) = \Delta_{\zeta,y} + b(0,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + a(0,y)$.

В переменных ζ, y уравнения границ $y = \gamma^\pm(x)$ принимают вид $y = \gamma^\pm(x) = \gamma^\pm(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^\pm \varepsilon^{i/2} \zeta^i$, а уравнение параболы $y = \pm\sqrt{x}$ принимает вид $y = \pm\varepsilon^{1/4}\sqrt{\zeta}$, и таким образом при $\varepsilon \to 0$ окрестность прямой $x = 0$ в переменных ζ, y переходит в бесконечную полосу с разрезом вдоль положительной полуоси

$$\Omega = \big\{ (\zeta, y) \colon \gamma^-(0) < y < \gamma^+(0), \quad 0 < \theta < 2\pi \big\}, \tag{2.3}$$

где θ — полярный угол точки (ζ, y); $r = \sqrt{\zeta^2 + y^2}$.

Потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на ветвях параболы $y = \varepsilon^{1/4}\sqrt{\zeta}$ и $y = -\varepsilon^{1/4}\sqrt{\zeta}$, получаем

$$h^\pm(\varepsilon^{1/2}\zeta, \pm\varepsilon^{1/4}\sqrt{\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} v_k(\zeta, \pm\varepsilon^{1/4}\sqrt{\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \Big[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i v_k}{\partial y^i}(\zeta, \pm 0) \varepsilon^{i/4} (\pm\sqrt{\zeta})^i \Big].$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε, получаем на верхней и нижней сторонах разреза

$$\begin{cases} v_0(\zeta,\pm 0)=h^{\pm}(0,0), \quad v_1(\zeta,\pm 0)=\mp\dfrac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta,\pm 0)\sqrt{\zeta}+h_y^{\pm}(0,0)\sqrt{\zeta}, \\ v_2(\zeta,\pm 0)=\mp\dfrac{\partial v_1}{\partial y}(\zeta,\pm 0)\sqrt{\zeta}-\dfrac{1}{2!}\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}(\zeta,\pm 0)\zeta+\alpha_2^{\pm}\zeta,\ldots, \\ v_k(\zeta,\pm 0)=-\displaystyle\sum_{l=1}^{k}\dfrac{1}{l!}\dfrac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta,\pm 0)(\pm 1)^l\zeta^{l/2}+\alpha_k^{\pm}\zeta^{k/2}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $\alpha_k^{\pm}$ — некоторые константы, зависящие от значений производных функций $h^{\pm}(x,y)$ в точке (0.0).

Отметим, что здесь $h^+(0,0)\neq h^-(0,0)$ (в отличие от [8]).

Далее, потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на границах $y=\gamma^{\pm}(x)$, получим граничные условия для коэффициентов $v_k(\zeta,y)$ на прямых $y=\gamma^{\pm}(0)$:

$$\begin{cases} v_0(\zeta,\gamma^{\pm}(0))=0, \quad v_1(\zeta,\gamma^{\pm}(0))=0, \quad v_2(\zeta,\gamma^{\pm}(0))=-\zeta\gamma_1^{\pm}\dfrac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta,\gamma^{\pm}(0)), \\ v_3(\zeta,\gamma^{\pm}(0))=-\zeta\gamma_1^{\pm}\dfrac{\partial v_1}{\partial y}(\zeta,\gamma^{\pm}(0)),\ \ldots, v_k(\zeta,\gamma^{\pm}(0))=S_k^{\pm}(\zeta), \end{cases} \tag{2.5}$$

где граничная функция $S_k^{\pm}(\zeta)$ имеет вид $S_k^{\pm}(\zeta)=\sum\beta_{ljs}\dfrac{\partial^l v_{k-2j}}{\partial y^l}(\zeta,\gamma^{\pm}(0))\zeta^s$, $j\leqslant\left[\dfrac{k}{2}\right]$, $l+s\leqslant k-2$.

Итак, необходимо построить функции $v_k(\zeta,y)$ — решения эллиптических уравнений (2.2) в полосе Ω (см. (2.3)), удовлетворяющие на границах этой полосы условиям (2.4), (2.5).

Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с угловыми точками рассматривали многие авторы. Наиболее полно такие задачи исследованы в работе [10], где кроме вопросов существования решений в специальных классах функций было детально рассмотрено асимптотическое поведение решений в окрестностях самих угловых точек.

Воспользовавшись результатами работы [10], нетрудно установить, что решения $v_k(\zeta,y)$ задач (2.2), (2.4), (2.5), начиная с некоторого k, будут иметь особенности в начале координат. Следовательно, асимптотическое разложение (2.1) становится непригодным в окрестности начала координат и там необходимо строить другое асимптотическое разложение. Кроме того, так же, как в аналогичных задачах (см. например, [7; 8]), в классе неограниченных функций решения задач (2.2), (2.4), (2.5) определяются неединственным образом, и поэтому асимптотическое разложение (2.1) может быть построено только после исследования асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(x,y)$ в окрестности начала координат.

3. Внутреннее асимптотическое разложение в окрестности начала координат

В окрестности начала координат перейдем от переменных x, y к новым, “внутренним”, переменным $\xi=x\varepsilon^{-1}$, $\eta=y\varepsilon^{-1/2}$ и будем строить еще одно, “внутреннее”, асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x,y)$ при $\varepsilon\to 0$ в виде (который отличен от вида соответствующего разложения в [8])

$$W(\xi,\eta,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k/4}\sum_{j=0}^{[k/2]}\ln^j\varepsilon\, w_{kj}(\xi,\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}\ln^m\varepsilon\sum_{k=2m}^{\infty}\varepsilon^{k/4}w_{km}(\xi,\eta). \tag{3.1}$$

Парабола $x=y^2$ в новых переменных примет вид $\xi=\eta^2$, а область D_δ в окрестности начала координат перейдет в неограниченную область $\Omega_1=\mathbb{R}^2\setminus\{(\xi,\eta)\colon \xi>0,\ \eta^2<\xi\}$ — внешность области, расположенной в полуплоскости $\xi>0$ и ограниченной параболой $\xi=\eta^2$.

Для того чтобы получить рекуррентные соотношения для определения коэффициентов $w_k(\xi,\eta)$, разложим коэффициенты $b(x,y)$, $a(x,y)$ и правую часть $f(x,y)$ исходного уравнения (0.1) в ряды Тейлора в окрестности начала координат и перейдем в получившихся разложениях к внутренним переменным ξ, η:

$$b(x,y)=\sum_{i,j\geqslant 0} b_{ij}x^iy^j=\sum_{i,j\geqslant 0} b_{ij}\varepsilon^i\xi^i\varepsilon^{j/2}\eta^j=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}g_j^{(1)}(\xi,\eta),$$

$$a(x,y)=\sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij}x^iy^j=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}g_j^{(2)}(\xi,\eta),\quad f(x,y)=\sum_{i,j\geqslant 0} f_{ij}x^iy^j=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}g_j^{(3)}(\xi,\eta).$$

Стандартным образом, т. е. переходя в исходном уравнении (0.1) к внутренним переменным ξ, η, заменяя коэффициенты $b(x,y)$, $a(x,y)$ и правую часть $f(x,y)$ выписанными выше разложениями в окрестности начала координат и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим, что коэффициенты $w_{kj}(\xi,\eta)$ внутреннего разложения (3.1) должны удовлетворять в области Ω_1 системе рекуррентных соотношений

$$\begin{cases}\Delta w_{2m,0}=-\sum\limits_{j=0}^{m-1} g_j^{(1)}(\xi,\eta)\dfrac{\partial w_{2m-2-2j,0}}{\partial\eta}-\sum\limits_{j=0}^{m-2} g_j^{(2)}(\xi,\eta)w_{2m-4-2j,0}+g_{m-2}^{(3)}(\xi,\eta),\\ \Delta w_{2m+1,0}=-\sum\limits_{j=0}^{m-1} g_j^{(1)}(\xi,\eta)\dfrac{\partial w_{2m-1-2j,0}}{\partial\eta}-\sum\limits_{j=0}^{m-2} g_j^{(2)}(\xi,\eta)w_{2m-3-2j,0},\\ \Delta w_{2m+s,m}=-\sum\limits_{j=0}^{m-1} g_j^{(1)}(\xi,\eta)\dfrac{\partial w_{2m+s-2-2j,m}}{\partial\eta}-\sum\limits_{j=0}^{m-2} g_j^{(2)}(\xi,\eta)w_{2m+s-4-2j,m},\quad m>0.\end{cases}\tag{3.2}$$

Для нескольких “первых” функций w_{kj} соотношения (3.2) принимают вид $\Delta w_{00}=0$, $\Delta w_{10}=0$, $\Delta w_{20}=-b(0,0)\dfrac{\partial w_{00}}{\partial\eta}$, $\Delta w_{30}=-b(0,0)\dfrac{\partial w_{10}}{\partial\eta}$.

Кроме того, потребовав, чтобы асимптотический ряд (3.1) удовлетворял краевым условиям исходной задачи, получим краевые условия для функций $w_{km}(\xi,\eta)$:

$$w_{2n,0}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=h_n^{\pm}\xi^{n/2},\quad w_{2n+1,0}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=0,\quad w_{km}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=0,\quad m>0.\tag{3.3}$$

Здесь $h_k^{\pm}$ — некоторые константы, зависящие от производных функций $h^{\pm}(x,y)$ в начале координат, $h_0^{\pm}=h^{\pm}(0,0)$, $h_1^{\pm}=\pm h_y^{\pm}(0,0)$, $h_2^{\pm}=h_x^{\pm}(0,0)+1/2\,h_{yy}^{\pm}(0,0)$.

Соотношениями (3.2), (3.3) функции $w_k(\xi,\eta)$ — решения задач в неограниченной области Ω_1 вообще говоря, не определяются однозначно. Необходимо задать еще некоторые дополнительные условия для этих функций при $\xi^2+\eta^2\to\infty$, которые должны быть получены из условий согласования асимптотических разложений (2.1) и (3.1). Построение функций $w_k(\xi,\eta)$ и $v_k(\zeta,y)$ проводится одновременно. Эта ситуация типична для сингулярно возмущенных задач (см. [4; 5]).

4. Вспомогательные построения

Пусть (r,θ) — полярные координаты на плоскости (ζ,y). Для целых k будем рассматривать функции

$$U_{k,0}^{(1)}(\zeta,y)=r^{k/2}\sin\frac{k\theta}{2},\quad U_{k,0}^{(2)}(\zeta,y)=r^{k/2}\cos\frac{k\theta}{2}.\tag{4.1}$$

При $k=2n, n\geqslant 0$, функции $U_{k,0}^{(j)}$ — это гармонические полиномы.

Функции $U_k^{(j)}(\zeta,y)$ — сопряженные гармонические функции в плоскости (ζ,y) с разрезом вдоль положительной полуоси ζ:

$$\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial\zeta}=\frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial y},\quad \frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial y}=-\frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial\zeta}. \tag{4.2}$$

Из явных формул (4.1) легко получаются соотношения

$$\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial\zeta}=\frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial y}=\frac{k}{2}U_{k-2,0}^{(2)},\quad -\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial y}=\frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial\zeta}=\frac{k}{2}U_{k-2,0}^{(1)}, \tag{4.3}$$

а также соотношения

$$\begin{gathered}\zeta U_{k,0}^{(1)}=\frac12U_{k+2,0}^{(1)}+\frac12r^2U_{k-2,0}^{(1)},\quad \zeta U_{k,0}^{(2)}=\frac12U_{k+2,0}^{(2)}+\frac12r^2U_{k-2,0}^{(2)},\\ yU_{k,0}^{(1)}=-\frac12U_{k+2,0}^{(2)}+\frac12r^2U_{k-2,0}^{(2)},\quad yU_{k,0}^{(2)}=\frac12U_{k+2,0}^{(1)}-\frac12r^2U_{k-2,0}^{(1)},\end{gathered} \tag{4.4}$$

которые в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\zeta^my^pU_{k,0}^{(j)}=\sum_{s=0}^{m+p}\alpha_s^{(m,p)}U_{k+2m+2p-4s,0}^{(l)}r^{2s}, \tag{4.5}$$

где $l=j$ при четном p, $l\neq j$ при нечетном p. При этом в случае, когда $U_k^{(j)}$ — гармонический полином, т.е. когда $k=2n$, $n\geqslant 0$, те из коэффициентов $\alpha_s^{(m,p)}$ в соотношении (4.5), для которых $k+2m+2p-4s<0$, следует считать равными нулю.

Будем говорить, что функция $v(\zeta,y)$ вида $v(\zeta,y)=r^\alpha\Phi(\theta)$ имеет порядок α. Множество линейных комбинаций функций вида $v(\zeta,y)=\zeta^my^pU_{k,0}^{(j)}$, где m, p — целые неотрицательные, будем обозначать через $\mathcal{W}^{(0)}$. Подмножество множества $\mathcal{W}^{(0)}$, все элементы которого имеют фиксированный порядок $s/2$, будем обозначать через $\mathcal{W}_s^{(0)}$.

Поскольку $\zeta=U_{2,0}^{(2)}(\zeta,y)$, $y=U_{2,0}^{(1)}(\zeta,y)$, то в силу соотношений (4.5) любой многочлен $Q(\zeta,y)\in\mathcal{W}^{(0)}$, а любой однородный многочлен $Q_n(\zeta,y)$ степени n является элементом множества $\mathcal{W}_{2n}^{(0)}$.

Из соотношения (4.5) следует, что функция $v(\zeta,y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_q^{(0)}$, имеет вид

$$v(\zeta,y)=\sum_{m,k,j}\beta_{m,k,j}r^{2m}U_{k,0}^{(j)},$$

где $m\geqslant 0$, $1\leqslant j\leqslant 2$, $k+4m=q$.

Далее, из соотношений (4.3), (4.4) следует, что если функция $v(\zeta,y)\in\mathcal{W}_q^{(0)}$, то

$$\frac{\partial v}{\partial\zeta}\in\mathcal{W}_{q-2}^{(0)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}\in\mathcal{W}_{q-2}^{(0)},\quad \zeta^my^pv(\zeta,y)\in\mathcal{W}_{q+2m+2p}^{(0)}.$$

При $n\geqslant 1$ определим гармонические функции $U_{k,n}^{(j)}$ следующим образом:

$$U_{k,n}^{(j)}=\frac{\partial^n}{\partial k^n}U_{k,0}^{(j)}. \tag{4.6}$$

Воспользовавшись соотношениями (4.6), нетрудно получить рекуррентные соотношения для функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta,y)$ вида

$$U_{k,n}^{(1)}=\left(\frac12\right)^k[\ln r\,U_{k,n-1}^{(1)}+\theta U_{k,n-1}^{(2)}],\quad U_{k,n}^{(2)}=\left(\frac12\right)^k[\ln r\,U_{k,n-1}^{(2)}-\theta U_{k,n-1}^{(1)}].$$

Для этих функций справедливы соотношения (4.2), а также соотношения, аналогичные соотношениям (4.3):

$$-\frac{\partial U^{(2)}_{k,n}}{\partial y} = \frac{\partial U^{(1)}_{k,n}}{\partial \zeta} = \frac{k}{2}U^{(1)}_{k-2,n} + \frac{n}{2}U^{(1)}_{k-2,n-1}, \quad \frac{\partial U^{(2)}_{k,n}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U^{(1)}_{k,n}}{\partial y} = \frac{k}{2}U^{(2)}_{k-2,n} + \frac{n}{2}U^{(2)}_{k-2,n-1}$$

и соотношения, аналогичные соотношениям (4.4):

$$\zeta U^{(1)}_{k,n} = \frac{1}{2}U^{(1)}_{k+2,n} + \frac{1}{2}r^2 U^{(1)}_{k-2,n}, \quad \zeta U^{(2)}_{k,n} = \frac{1}{2}U^{(2)}_{k+2,n} + \frac{1}{2}r^2 U^{(2)}_{k-2,n},$$

$$yU^{(1)}_{k,n} = -\frac{1}{2}U^{(2)}_{k+2,n} + \frac{1}{2}r^2 U^{(2)}_{k-2,n}, \quad yU^{(2)}_{k,n} = \frac{1}{2}U^{(1)}_{k+2,n} - \frac{1}{2}r^2 U^{(1)}_{k-2,n}.$$

Выпишем явные формулы для нескольких “первых” функций $U^{(j)}_{k,n}$ при $n \geqslant 1$:

$$U^{(1)}_{0,0} \equiv 0, \quad U^{(2)}_{0,0} \equiv 1, \quad U^{(1)}_{0,1} = \theta, \quad U^{(2)}_{0,1} = \ln r, \quad U^{(1)}_{0,2} = 2\theta \ln r, \quad U^{(2)}_{0,2} = \ln^2 r - \theta^2.$$

При $k \neq 0$:

$$U^{(1)}_{k,0} = r^{k/2} \sin\frac{k\theta}{2}, \quad U^{(2)}_{k,0} = r^{k/2} \cos\frac{k\theta}{2},$$

$$U^{(1)}_{k,1} = \frac{1}{2}r^{k/2}\Big[\ln r \sin\frac{k\theta}{2} + \theta\cos\frac{k\theta}{2}\Big], \quad U^{(2)}_{k,1} = \frac{1}{2}r^{k/2}\Big[\ln r \cos\frac{k\theta}{2} - \theta\sin\frac{k\theta}{2}\Big].$$

Нетрудно выписать и общий вид функций $U^{(j)}_{k,n}$ для всех k, n. При $k \neq 0$ имеем

$$U^{(1)}_{k,n} = r^{k/2}\bigg(\sin\frac{k\theta}{2}\sum_{s=0}^{[n/2]}\gamma_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-2s}\theta^{2s} + \theta\cos\frac{k\theta}{2}\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\omega_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-1-2s}\theta^{2s}\bigg), \tag{4.7}$$

$$U^{(2)}_{k,n} = r^{k/2}\bigg(\cos\frac{k\theta}{2}\sum_{s=0}^{[n/2]}\gamma_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-2s}\theta^{2s} + \theta\sin\frac{k\theta}{2}\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\omega_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-1-2s}\theta^{2s}\bigg), \tag{4.8}$$

где $\gamma_0^{(k,n)} = 1$, $\omega_0^{(k,n)} = n$.
При $k = 0$:

$$U^{(1)}_{0,n} = \theta\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\gamma_s^{(0,n)}(\ln r)^{n-1-2s}\theta^{2s}, \quad U^{(2)}_{0,n} = \sum_{s=0}^{[n/2]}\gamma_s^{(0,n)}(\ln r)^{n-2s}\theta^{2s}. \tag{4.9}$$

Для функции $u(\zeta, y)$ вида

$$U(\zeta, y) = r^{k/2}\sum_{i=0}^{m}(\ln r)^{m-i}\Phi_i(\theta) \tag{4.10}$$

число $k/2$ будем называть *порядком* этой функции, а число m — ее *индексом*.

Очевидно, что представления (4.7)–(4.9) могут быть записаны в виде, аналогичном (4.10):

$$U^{(j)}_{k,n}(\zeta, y) = r^{k/2}\sum_{i=0}^{n}(\ln r)^{n-i}\Phi^{(k,n)}_{ij}(\theta), \quad k \neq 0,$$

$$U^{(1)}_{0,n}(\zeta, y) = \sum_{i=0}^{n}(\ln r)^{n-1-i}\Phi^{(0,n)}_{i1}(\theta), \quad U^{(2)}_{0,n}(\zeta, y) = \sum_{i=0}^{n}(\ln r)^{n-i}\Phi^{(0,n)}_{i2}(\theta),$$

т. е. при $k \neq 0$ функции $U^{(j)}_{k,n}(\zeta, y)$ имеют порядок $k/2$ и индекс n; при $k = 0$ функции $U^{(j)}_{0,n}$ имеют нулевой порядок, индекс функции $U^{(2)}_{0,n}$ равен n, но индекс функции $U^{(1)}_{0,n}$ равен $n - 1$.

Множество линейных комбинаций функций вида $w(\zeta, y) = \ln^s r\zeta^m y^p U_{k,n}^{(j)}$, где m, p, s — целые неотрицательные, n — целое положительное, будем обозначать через $\mathcal{W}$. Подмножество множества $\mathcal{W}$, все элементы которого имеют фиксированный порядок $k/2$, будем обозначать через $\mathcal{W}_k$. Для фиксированного $m \geqslant 0$ подмножество множества $\mathcal{W}_k$, индекс которого не превосходит m $(s + n \leqslant m)$, будем обозначать через $\mathcal{W}_k^{(m)}$.

Из соотношения (4.5) следует, что функция $w(\zeta, y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_s^{(q)}$, имеет вид $w(\zeta, y) = \sum_{m,k,j,l} P_l^{m,k,j}(\ln r) r^{2m} U_{k,n}^{(j)}$, где $m \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, $k + 4m = s$, $P_l(t)$ — полином от t степени не выше, чем q.

Далее, из соотношений (4.5), (4.7) следует, что если функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_q^{(n)}$, то

$$\frac{\partial(r^2 w)}{\partial \zeta} \in \mathcal{W}_{q+2}^{(n)}, \quad \frac{\partial(r^2 w)}{\partial y} \in \mathcal{W}_{q+2}^{(n)}, \quad \zeta^m y^p \ln^i r w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{q+2m+2p}^{(n+i)}.$$

В дальнейшем нам понадобится вид функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ на границах разреза $\zeta > 0, y = \pm 0$. Для этого воспользуемся соотношениями (4.7)–(4.9).

Рассмотрим сначала функции $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, y)$. Прежде всего, отметим, что эти функции при всех (допустимых в их определении) значениях k, n обращаются в нуль на верхней границе разреза $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = 0$, $\theta = 0$. Для $n = 0$ это следует из определения функций $U_{k,0}^{(1)}(\zeta, y)$ (см. (4.1)), а для $n \geqslant 1$ — из соотношения (4.7). При $\theta = 2\pi$ (на нижней стороне разреза) соотношение (4.7) принимает вид

$$U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = |\zeta|^{k/2} \big(Q_{n-1}^{(k,n;1)}(\ln|\zeta|)\big),$$

где $Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t)$ — полином степени $n-1$ вида

$$Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t) = \sum_{q=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \gamma_q^{(k,n;1)} t^{n-1-2q}, \quad \gamma_0^{(k,n;1)} = n.$$

Перейдем к функциям $U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y)$. Из соотношения (4.8) получаем, что при всех k

$$U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} \ln^n \zeta, \quad \theta = 0; \quad U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} S_n^{(k,n;2)}(\ln \zeta), \quad \theta = 2\pi,$$

где $S_n^{(k,n;2)}(t)$ — полином степени n.

Лемма 1. *Пусть k и n целые и $n \geqslant 0$. Тогда*

1. *Существует гармоническая функция $u(\zeta, y)$, удовлетворяющая условиям $u(\zeta, 0) = 0$, $\theta = 0$; $u(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} \ln^n \zeta$, $\theta = 2\pi$. Функция $u(\zeta, y)$ имеет вид*

$$u(\zeta, y) = \sum_{m=0}^{n} \gamma_m U_{k,q-m}^{(1)}(\zeta, y),$$

где $q = n$ при $k \neq 2s$, $q = n + 1$ при $k = 2s$.

2. *Существует гармоническая функция $u(\zeta, y)$, удовлетворяющая условиям $u(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} \ln^n \zeta$, $\theta = 0$; $u(\zeta, 0) = 0$, $\theta = 2\pi$. Функция $u(\zeta, y)$ имеет вид*

$$u(\zeta, y) = U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y) + \sum_{m=0}^{n} \tilde{\gamma}_l U_{k,m-l}^{(1)}(\zeta, y),$$

где $q = n$ при $k \neq 2s$, $q = n + 1$ при $k = 2s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы аналогично доказательствам лемм 4.1, 4.2 работы [11] и основано на использовании представлений (выписанных выше) функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ на границах разреза $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$. □

Доказательства следующих лемм также аналогичны доказательству соответствующих лемм из [11].

Лемма 2. *Пусть m, k, q целые, $m \geqslant 0$, $q > 0$.*

1. *Если $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(0)}_{k+4m+4}$, которая является решением уравнения $\Delta z = r^{2m} U^{(j)}_{k,0}$ и имеет вид*

$$z(\zeta, y) = \frac{1}{4(m+1)(m+1+k/2)} r^{2m+2} U^{(j)}_{k,0}.$$

2. *Если $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q)}_{k+4m+4}$, которая является решением уравнения $\Delta z = r^{2m} \ln^q r U^{(j)}_{k,0}$ и имеет вид $z = r^{2m+2} P_q(\ln r) U^{(j)}_{k,0}$, где $P_q(t)$ — полином степени q :*

$$P_q(t) = \sum_{i=0}^{q} \gamma_i(q, m) t^{q-i}, \quad \gamma_0(q, m) = \frac{1}{(m+1)(q+1)}.$$

3. *Если $k = -2(m+1)$, то существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q+1)}_{k+4m+4}$, которая является решением уравнения $\Delta z = r^{2m} \ln^q r U^{(j)}_{k,0}$ и имеет вид $z = r^{2m+2} U^{(j)}_{k,0} \ln r S_q(\ln r)$, где $S_q(t)$ — полином степени q :*

$$S_q(t) = \sum_{i=0}^{q} \tilde{\gamma}_i(q, m) t^{q-i}, \quad \tilde{\gamma_0}(q, m) = -\frac{3}{2qk}.$$

Лемма 3. *Пусть m, k, n целые, $m \geqslant 0$, $n > 0$.*

1. *Если $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(n)}_{k+4m+4}$, которая является решением неоднородного уравнения $\Delta w = r^{2m} U^{(j)}_{k,n}$ и имеет вид $w(\zeta, y) = \dfrac{\partial^n z}{\partial k^n}$, где функция $z(\zeta, y)$ — решение неоднородного уравнения, построенное в лемме 2 (п. 1).*

2. *Если $q \geqslant 0$ и $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q+n)}_{k+4m+4}$, которая является решением неоднородного уравнения $\Delta w = r^{2m} \ln^q r U^{(j)}_{k,n}$ и имеет вид*

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \sum_{s=0}^{n} P^{(s)}_q(\ln r) U^{(j)}_{k,n-s}(\zeta, y),$$

где $P^{(s)}_q(t)$ — полиномы от t степени q.

3. *Если $q \geqslant 0$ и $k = -2(m+1)$, то существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q+n+1)}_{k+4m+4}$, которая является решением неоднородного уравнения $\Delta w = r^{2m} \ln^q r U^{(j)}_{k,n}$ и имеет вид*

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \ln r \sum_{s=0}^{n} \tilde{P}^{(s)}_q(\ln r) U^{(j)}_{k,n-s}(\zeta, y),$$

где $\tilde{P}^{(s)}_q(t)$ — полиномы от t степени q.

Решения $w(\zeta, y)$ неоднородных уравнений строятся в соответствии с определением (4.6) функций $U^{(j)}_{k,n}(\zeta, y)$ при $n > 0$ как производные по параметру k от решений неоднородных уравнений, построенных в лемме 2.

Теорема 3. *Пусть m, k, q, n целые, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $j = 1, 2$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(l(k,m))}_{k+4m+4}$, которая является решением краевой задачи*

$$\Delta w = r^{2m} \ln^q r U^{(j)}_{k,n}, \quad 0 < \theta < 2\pi; \quad w(\zeta, +0) = w(\zeta, -0) = 0, \quad \zeta > 0.$$

Здесь $l(k, m) = q + n$ при $k \neq -2(m+1)$, $l(k, m) = q + n + 1$ при $k = -2(m+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы при различных комбинациях показателей m, k, q, n вытекает из лемм 1–3. □

5. Построение ФАР для внутренних разложений

Как уже было отмечено во введении, целью настоящей работы является построение формальных асимптотических решений внутренних краевых задач (3.2), (3.3) при $\xi^2+\eta^2\to\infty$, т. е. таких асимптотических рядов, частичные суммы которых с достаточно высокой степенью точности удовлетворяют уравнениям (3.2) и граничным условиям (3.3). Существование ФАР позволит построить "настоящие" решения задач (3.2), (3.3) и одновременно с этим построить и решения задач (2.2), (2.4) таким образом, что асимптотические разложения (2.1) и (3.1) будут согласованы в соответствующих областях. Для задач, аналогичных рассматриваемой, такая процедура разработана в монографии [5].

Процедура построения ФАР в настоящей работе несколько отличается от аналогичных процедур в рассматриваемых ранее задачах (см., например, [7; 8]) и была применена в работе [11]. Сначала с помощью доказанных в предыдущем разделе лемм строятся ФАР при $\zeta^2+y^2\to 0$ задач (2.2), (2.4), а затем проводится стандартная процедура: берется ряд (2.1), функции $v_k(\zeta,y)$ заменяются на их ФАР при $\zeta^2+y^2\to 0$, получившееся представление переписывается в переменных ξ,η, и в результате получаются ряды, которые являются ФАР задач (3.2), (3.3) при $\xi^2+\eta^2\to\infty$. Одновременно с этим станет понятным и выбор асимптотической последовательности в разложении (3.1).

Перейдем к реализации этого плана. Прежде всего отметим, что $\zeta=\xi\varepsilon^{1/2}$, $y=\eta\varepsilon^{1/2}$, $r=\rho\varepsilon^{1/2}$. Полярный угол θ в переменных ξ,η не меняется.

В предыдущем разделе рассматривались декартовы координаты (ζ,y) и были введены множества $\mathcal{W}_k^{(q)}$, "порожденные" гармоническими функциями $U_{k,0}^{(j)}(\zeta,y)$. В этом разделе будут рассматриваться и другие декартовы координаты (ξ,η) и соответствующие множества, "порожденные" гармоническими функциями $U_{k,0}^{(j)}(\xi,\eta)$. Поэтому будем использовать обозначения $\mathcal{W}_k^{(q)}(\zeta,y)$ или $\mathcal{W}_k^{(q)}(\xi,\eta)$ в зависимости от того, какие координаты в данный момент рассматриваются.

Отметим далее, что для любой функции $z(\zeta,y)\in\mathcal{W}_s^{(n)}(\zeta,y)$ справедливо соотношение

$$z(\zeta,y)=\varepsilon^{s/4}\sum_{l=0}^{n}\left[\ln^{n-j}\varepsilon\,\omega_s^{(j)}(\xi,\eta)\right],\quad\text{где}\quad \omega_s^{(j)}(\xi,\eta)\in\mathcal{W}_s^{(j)}(\xi,\eta). \tag{5.1}$$

В справедливости этого утверждения нетрудно убедиться, если учесть, что для функции $z(\zeta,y)\in\mathcal{W}_s^{(n)}$ имеет место представление $z(\zeta,y)=r^{s/2}\sum_{l=0}^{n}\ln^{n-i}r\Phi_i(\theta)$.

Теорема 4. *Существуют асимптотические ряды*

$$Y_{kj}=\sum_{m=0}^{\infty}\omega_{k-m,m}^{(n(k)-j)}(\xi,\eta),\quad \omega_{k-m,m}^{(n(k)-j)}(\xi,\eta)\in\mathcal{W}_{k-m}^{(n(k)-j)},\quad n(k)=\left[\frac{k}{2}\right],$$

которые при $\xi^2+\eta^2\to\infty$ *являются* ФАР *задач* (3.2), (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $v_0(\zeta,y)$. Она является решением первой из задач (2.2), (2.4): $\mathrm{L}_1v_0=f(0,y)$, $v_0(\zeta,\pm0)=h^{\pm}(0,0)$. Будем строить ФАР задачи для функции $v_0(\zeta,y)$ при $r\to0$ в виде $v_0(\zeta,y)=z_{0,0}(\zeta,y)+z_{1,0}(\zeta,y)+z_{2,0}(\zeta,y)+\cdots$.

Заменим в уравнении для функции $v_0(\zeta,y)$ коэффициенты $b(0,y)$, $a(0,y)$ и правую часть $f(0,y)$ рядами Тейлора и определим функции $z_{s,0}(\zeta,y)$ как решения задач

$$\Delta_{\zeta,y}z_{0,0}=0,\quad z_{0,0}(\zeta,+0)=h^{+}(0,0),\quad z_{0,0}(\zeta,-0)=h^{-}(0,0),\quad \Delta_{\zeta,y}z_{1,0}=0,$$

$$z_{1,0}(\zeta,\pm0)=0,\quad \Delta_{\zeta,y}z_{2,0}=-b(0,0)\frac{\partial z_{0,0}}{\partial y},\quad z_{2,0}(\zeta,\pm0)=0,$$

$$\Delta_{\zeta,y} z_{j,0} = -\sum_{i=1}^{j} \frac{y^i}{i!}\Big[\frac{\partial^i b}{\partial y^i}(0,0)\frac{\partial z_{j-1-i,0}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial y^i}(0,0)\Big] + \frac{y^{j-2}}{(j-2)!}\frac{\partial^{j-2} f}{\partial y^{j-2}}(0,0), \quad z_{j,0}(\zeta,\pm 0) = 0.$$

Нетрудно проверить, что $z_{0,0}(\zeta,y) = h^+(0,0) + \dfrac{h^-(0,0) - h^+(0,0)}{2\pi}\theta$ или, что то же самое (см. (4.1), (4.7)), $z_{0,0}(\zeta,y) = h^+(0,0)U_{00}^{(2)}(\zeta,y) + \delta(h)U_{01}^{(1)}$. Здесь обозначено $\delta(h) = \dfrac{h^-(0,0) - h^+(0,0)}{2\pi}$. Очевидно, что $z_{0,0}(\zeta,y) \in \mathcal{W}_0^{(0)}(\zeta,y)$.

Положим далее $z_{1,0}(\zeta,y) = U_{10}^{(1)}(\zeta,y) = r^{1/2}\sin\dfrac{\theta}{2} \in \mathcal{W}_1^{(0)}(\zeta,y)$. Перейдем к функции $z_{2,0}(\zeta,y)$. Правая часть уравнения для определения этой функции имеет вид

$$F_2(\zeta,y) = -b(0,0)\frac{\partial z_{0,0}}{\partial y} = -b(0,0)\delta(h)\frac{\partial U_{0,1}^{(1)}}{\partial y}.$$

В соответствии с соотношением (4.3) перепишем правую часть в виде $F_2(\zeta,y) = -b(0,0)\delta(h)\times U_{-2,0}^{(2)}(\zeta,y)$ и обратимся к п. 3 леммы 2, где $k=-2$, $m=0$, $j=2$, $q=0$. Согласно этой лемме решение неоднородного уравнения $\Delta z = F_2$ имеет вид $z_1(\zeta,y) = A\delta(h)r^2\ln r U_{-2,0}^{(2)}(\zeta,y)$, где константа $A \neq 0$ и определяется соотношением из этой леммы.

Функция $z_1(\zeta,y)$ не удовлетворяет нулевым граничным условиям на границах $y = \pm 0$: $z_1(\zeta,\pm 0) = A\delta(h)\zeta\ln\zeta$. В соответствии с леммой 1 построим гармоническую функцию

$$z_2(\zeta,y) = -A\delta(h)U_{2,1}^{(2)}(\zeta,y) = -A\delta(h)r(\ln r\cos\theta - \theta\sin\theta).$$

Функцию $z_{2,0}(\zeta,y)$ определим как сумму $z_{2,0}(\zeta,y) = z_1(\zeta,y) + z_2(\zeta,y)$. Очевидно, что $z_{2,0}(\zeta,y) \in \mathcal{W}_2^{(1)}(\zeta,y)$.

Продолжая этот процесс далее, последовательно используя леммы 1–3, построим функции $z_{l,0}(\zeta,y) \in \mathcal{W}_l^{(n(l))}(\zeta,y)$, где $n(l) = \Big[\dfrac{l}{2}\Big]$. Все функции $z_{l,0}(\zeta,y)$ могут быть выписаны явно с помощью соотношений из лемм.

Аналогичным образом строятся ФАР при $r \to 0$ и для любой функции $v_k(\zeta,y)$ при $k > 0$. Можно проверить, что $v_k(\zeta,y) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} z_{l,k}(\zeta,y), \quad z_{l,k}(\zeta,y) \in \mathcal{W}_{-k+l}^{(n(l))}(\zeta,y)$.

Отметим, что согласно соотношению (5.1) $z_{l,k}(\zeta,y) = \varepsilon^{(-k+l)/4}\sum\limits_{j=0}^{n(l)} \ln^{n(l)-j}\varepsilon\,\omega_{-k+l,k}^{(j)}(\xi,\eta)$, где $\omega_{-k+l,k}^{(j)}(\xi,\eta) \in \mathcal{W}_{-k+l}^{(j)}(\xi,\eta)$, $n(l) = \Big[\dfrac{l}{2}\Big]$.

В соответствии с методом согласования [5] для того, чтобы получить ФАР при $\xi^2+\eta^2 \to \infty$ задач (3.2), (3.3), рассмотрим ряд $V(\zeta,y)$ (см. (2.1)), заменим в нем функции $v_j(\zeta,y)$ их ФАР при $\zeta^2+y^2 \to 0$ и перейдем в получившемся соотношении от переменных ζ, y к переменным ξ,η. Воспользовавшись равенством (5.1) и представлением функции $z_{l,k}(\zeta,y)$, получим

$$V(\zeta,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/4}v_k(\zeta,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/4}\sum_{l=0}^{\infty} z_{l,k}(\zeta,y)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/4}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{(-k+l)/4}\sum_{j=0}^{n(k)}(\ln\varepsilon)^{n(k)-j}\sum_{m=0}^{\infty}\omega_{k-m,m}^{(j)}(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/4}\sum_{j=0}^{n(k)}(\ln\varepsilon)^j\sum_{m=0}^{\infty}\omega_{k-m,m}^{n(k)-j}(\xi,\eta),$$

где $\omega_{k-m,m}^{n(k)-j}(\xi,\eta) \in \mathcal{W}_{k-m}^{n(k)-j}(\xi,\eta)$.

Обозначим $Y_{k,j}(\xi,\eta) = \sum_{m=0}^{\infty}\omega_{k-m,m}^{n(k)-j}(\xi,\eta)$. По построению асимптотический ряд $Y_{k,j}(\xi,\eta)$ является ФАР задачи (3.2), (3.3) для функции $w_{k,j}(\xi,\eta)$ при $\xi^2+\eta^2 \to \infty$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
2. **Треногин В.А.** Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника — Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 4(154). С. 123–156.
3. **Найфэ А.** Метод возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. **Леликова Е. Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 107–119.
7. **Леликова Е. Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 10. С 93–108.
8. **Леликова Е. Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных. // Тр. Моск. мат. об-ва. 2010. Т. 71. С. 162–199. ISBN: 978-5-397-01447-2 .
9. **Леликова Е. Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Докл. РАН, 2012. Т. 447, № 2. С 136–139.
10. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. // Тр. Моск. мат. об-ва. 1967. Т.16. С. 209–292.
11. **Леликова Е. Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 197–211.

Леликова Елена Федоровна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: lef@imm.uran.ru

Поступила 20.02.2017

REFERENCES

1. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Uspechi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5(77), pp. 3–122 (in Russian).
2. Trenogin V.A. The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik. *Russian Math. Surveys*, 1970, vol. 25, no. 4, pp. 119–156. doi: 10.1070/RM1970v025n04ABEH001262 .
3. Nayfeh Ali H. *Perturbation methods.* New York, John Wiley and Sons, 1973, 425 p. ISBN: 0471630594. Translated under the title *Metod vozmushchenii*, Moscow, Mir Publ., 1976, 455 p.
4. Dyke M. van *Perturbation methods in fluid mechanics.* New York, London, Academic Press, 1964, 229 p. ISBN: 0127130500. Translated under the title *Metody vozmushchenii v mekhanike zhidkosti*, Moscow, Mir Publ., 1967, 310 p.
5. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence, American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in "Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach", Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
6. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with small parameter at a higher derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2003. Suppl. 1, pp. S129–S143.
7. Lelikova E.F. The asymptotics of the solution of an equation with a small parameter in a domain with angular points. *Sbornik: Math.*, 2010, vol. 201, no. 10, pp. 1495–1510. doi: 10.1070/SM2010v201n10ABEH004119 .
8. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with a small parameter multiplying one of the highest order derivatives. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2010, vol. 71, pp. 141–174. ISSN: 1547-738X .

9. Lelikova E.F. On the asymptotic behavior of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a boundary inflection point. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 756–759.
10. Kondrat'ev V.A. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, vol. 16, 1967, pp. 209–292 (in Russian).
11. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a point of inflexion. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 197–211 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on February 20, 2017.

Elena Fedorovna Lelikova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: lef@imm.uran.ru .