

УДК 517.977

О ПОЛИЭДРАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ В МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМАХ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

Е. К. Костюсова

Работа посвящена решению задач синтеза управлений для линейных и билинейных многошаговых систем с неопределенностями и фазовыми ограничениями. Изучены два типа задач: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы. Для обеих задач рассмотрены случаи как без неопределенностей, так и с неопределенностями, включая аддитивные неопределенности и неопределенности в коэффициентах системы (матричные неопределенности) с заданными параллелопо-значными и интервальными ограничениями соответственно. В работе продолжено развитие методов “полиэдрального” синтеза управлений с использованием полиэдральных (параллелопо-значных) трубок разрешимости. А именно предложенная автором ранее техника для решения первой задачи развита на случай матричных неопределенностей. Далее для обеих задач разработана единообразная схема решения, развивающая для случая систем с фазовыми ограничениями другую предложенную ранее технику, позволяющую строить стратегии управления по явным формулам. Дано описание полиэдральных трубок разрешимости в виде систем нелинейных рекуррентных соотношений. Описаны стратегии управления, которые могут быть вычислены на основе этих трубок. Для первой задачи обе техники дают одинаковые полиэдральные трубки разрешимости, но стратегии управления оказываются разными; найдена взаимосвязь между управлениями обоих типов. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: синтез управлений, неопределенности, фазовые ограничения, трубки разрешимости, параллелопопы.

E. K. Kostousova. On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis in discrete-time systems with uncertainties and state constraints.

We consider control synthesis problems for linear and bilinear discrete-time systems under uncertainties and state constraints. Two types of problems are studied: when controls are additive and when they appear in the system's matrix. For both problems we consider cases without uncertainty and cases with uncertainty, including additive parallelotope-bounded uncertainties and interval uncertainties in the matrix of the system. We continue to develop the methods of “polyhedral” control synthesis with the use of polyhedral (parallelotope-valued) solvability tubes. Namely, the technique proposed by the author earlier for solving the first problem is extended to the case of matrix uncertainties. Further, for both problems, a uniform solution scheme is developed, which makes it possible to construct control strategies by explicit formulas; this scheme extends another technique proposed earlier to the case of systems with state constraints. We describe polyhedral solvability tubes in the form of systems of nonlinear recurrence relations as well as control strategies that can be constructed with the use of these tubes. For the first problem, these two techniques produce identical polyhedral solvability tubes, but the control strategies turn out to be different; the relation between the controls is specified. Computer simulation results are presented.

Keywords: control synthesis, uncertainties, state constraints, solvability tubes, parallelotopes.

MSC: 93C41, 93C55, 93B52, 93B40, 52B12

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-151-166

Введение

Работа посвящена решению задач терминального целевого управления по принципу обратной связи для линейных и билинейных многошаговых систем в условиях неопределенности. Известны подходы к решению задач такого рода, основанные на построении трубок разрешимости [1–3]. Практическое построение трубок траекторий, особенно для систем с фазовыми

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 15-01-02368а).

ограничениями (ФО) [3; 4], может быть достаточно затруднительным. Поэтому разрабатывались различные численные методы, в том числе методы, основанные на аппроксимации множеств политопами [5; 6] (здесь и ниже для примера даны только несколько ссылок из большого числа работ; см. также приведенную в ссылках библиографию). Такие методы предназначены для получения наиболее точных аппроксимаций, но могут потребовать большого объема вычислений, особенно для систем большой размерности. Другая группа методов основана на оценивании множеств областями фиксированной формы (в частности, эллипсоидами [2; 3; 7; 8], параллелотопами [9], в том числе брусами (интервальными векторами) [10]). Основное преимущество таких методов состоит в том, что они позволяют получать решения относительно простыми средствами. В целях более точных аппроксимаций А.Б. Куржанским было предложено использовать целые семейства таких простых оценок [2; 3; 9].

В настоящей работе продолжается развитие для многошаговых систем методов, относящихся ко второй вышеупомянутой группе — методов “полиэдрального” синтеза управлений с использованием полиэдральных (параллелотопо-значных) трубок разрешимости. Для линейных и билинейных многошаговых систем с неопределенностями и с ФО исследуются два типа задач терминального целевого синтеза управлений: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы. Для обеих задач рассматриваются случаи как без неопределенностей, так и с таковыми, включая аддитивные неопределенности и неопределенности в коэффициентах системы (иначе говоря, матричные неопределенности) с заданными параллелотопо-значными и интервальными ограничениями соответственно. Напомним, что в [11] был предложен “полиэдральный” синтез управлений для первой задачи, в том числе для систем с ФО, но без неопределенностей в матрицах, а в [12; 13] для систем без ФО была разработана другая полиэдральная техника решения обеих задач, позволяющая строить стратегии управления по явным формулам. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию обеих техник: первой — для случая матричных неопределенностей, а второй — для систем с ФО. Представлены нелинейные системы рекуррентных соотношений, описывающие полиэдральные трубки разрешимости. Определены стратегии управления, которые могут быть вычислены на основе этих трубок. Указана взаимосвязь между решениями первой задачи, доставляемыми обеими вышеупомянутыми техниками. Приведены результаты численного моделирования.

В работе используются следующие обозначения: \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{n \times m}$ — линейные пространства вещественных n -векторов и $n \times m$ -матриц соответственно; \top — знак транспонирования; $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение для $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — разные нормы вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — единичный орт вдоль оси $0x_i$ (единица стоит на i -м месте); $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ (для простоты обозначений используем один и тот же символ e для векторов такого рода разной размерности); $A = \{a_i^j\} = \{a^j\}$ — матрица с элементами a_i^j и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов); 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; I — единичная матрица; E — матрица, все элементы которой — единицы; $\text{Abs } A$ — матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$; $\text{diag } \pi, \text{diag } \{\pi_i\}$ — диагональная матрица с компонентами π_i вектора π на диагонали; $\det A$ — определитель матрицы A ; $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_i^i$ — след матрицы A ; $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_i^j|$ — норма матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, индуцированная нормой $\|x\|_\infty$; $A * B = \{a_i^j b_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произведение $n \times n$ -матриц $A = \{a_i^j\}$ и $B = \{b_i^j\}$ в смысле Адамара (поэлементное произведение); $\text{int } \mathcal{X}$ — совокупность внутренних точек множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$; $\mathbf{E}(\mathcal{P})$ — совокупность вершин параллелепипеда $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$; $\text{Pr}_{[\underline{a}, \bar{a}]}(z)$ — проекция числа z на отрезок $[\underline{a}, \bar{a}] \subset \mathbb{R}^1$: равна \underline{a} , z , \bar{a} соответственно при $z < \underline{a}$, $\underline{a} \leq z \leq \bar{a}$, $z > \bar{a}$. Кроме того, используем для краткости обозначения типа $k = 1, \dots, n$ вместо $k = 1, 2, \dots, n$.

1. Постановка задач

Пусть состояние $x \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$x[k] = (A[k] + V[k] + U[k])x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], k = 1, \dots, N, \quad x[N] \in \mathcal{M}, \quad (1.1)$$

где $A[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$ — известные матричные функции; $U[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управления, удовлетворяющие одному из следующих ограничений (1.2) и (1.3):

$$U[k] \equiv 0, \quad u[k] \in \mathcal{R}[k] \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

$$U[k] \in \mathcal{U}[k] = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(U - \tilde{U}[k]) \leq \hat{U}[k]\}, \quad u[k] \equiv 0 \quad (1.3)$$

(т.е. считаем, что в системе может действовать только одно из управлений $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ или $U[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$). В системе присутствуют также неизвестные, но ограниченные возмущения: $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ и $V[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($V[k]$ — неопределенности в коэффициентах или, другими словами, матричные неопределенности), удовлетворяющие ограничениям

$$v[k] \in \mathcal{Q}[k] \subset \mathbb{R}^{n_v}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

$$V[k] \in \mathcal{V}[k] = \{V \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(V - \tilde{V}[k]) \leq \hat{V}[k]\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

Функции $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$, удовлетворяющие (1.4) и (1.5), будем называть *допустимыми*. Матричные и векторные неравенства ($\leq, <, \geq, >$) здесь и ниже понимаются покомпонентно; $\tilde{U}, \hat{U}, \tilde{V}, \hat{V}$ и \mathcal{R}, \mathcal{Q} — известные матричные и многозначные функции соответственно.

В дальнейшем при изучении системы будет удобно выделять следующие случаи:

- (A) *система без неопределенности*, когда функции v и $V \equiv 0$ известны, т.е. $\bar{Q} \equiv 0, \tilde{V} \equiv \hat{V} \equiv 0$;
- (B) *система в условиях неопределенности*, включая следующие возможности:
- (B, i) *имеется только аддитивная неопределенность* ($\tilde{V} \equiv \hat{V} \equiv 0$);
- (B, ii) *имеется также матричная неопределенность* ($\hat{V} \neq 0$).

Задано целевое терминальное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$.

На траектории системы могут быть наложены ФО

$$x[k] \in \mathcal{Y}[k] \subset \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1.6)$$

где $\mathcal{Y}[k]$ — замкнутые выпуклые множества.

Будем предполагать, что множества $\mathcal{M}, \mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{Q}[k]$ являются параллелепипедами, а $\mathcal{Y}[k]$ — полосами (при отсутствии ФО считаем $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$). Напомним соответствующие определения.

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \|\xi\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p_j^i\} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособая матрица ($\det P \neq 0$) со столбцами p^i единичной длины ($\|p^i\|_2 = 1$); $\pi \in \mathbb{R}^n, \pi \geq 0$. Условие нормировки $\|p^i\|_2 = 1$ может быть опущено в целях упрощения формул. Можно сказать, что p — центр параллелепипеда, P — матрица ориентации, p^i — направления, π_i — величины его “полуосей”. Называем параллелепипед *невырожденным*, если $\pi > 0$.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n, \bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}, m \leq n$ (p определяет центр параллелотопа, \bar{P} — форму). Называем параллелотоп \mathcal{P} *невырожденным*, если $m = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Полосой (или *m-полосой*) $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) \subset \mathbb{R}^n$ называем пересечение $m \leq n$ *гиперполос* Σ^i : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i, \Sigma^i = \Sigma(c_j, s^j, \sigma_j) = \{x \mid |(x, s^i) - c_i| \leq \sigma_i\}$ с линейно-независимыми векторами $s^i, \|s^i\|_2 = 1$ (условие нормировки может быть опущено для упрощения формул). Здесь $c \in \mathbb{R}^m; S = \{s^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица ранга m со столбцами $s^i; \sigma \in \mathbb{R}^m, \sigma \geq 0$.

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ — это параллелотоп $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$ с $\bar{P} = P \text{diag } \pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P} \text{diag } \{\|p^i\|_2^{-1}\}, \pi_i = \|p^i\|_2$ или, иначе, с $P = \bar{P}, \pi = e$, где $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Каждый параллелепипед является n -полосой; при $m = n$ полоса превращается в параллелепипед (формулы могут быть найдены в [14]).

Итак, везде ниже считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. \mathcal{M} — это невырожденный параллелепипед, $\mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{Q}[k]$ — параллелепипеды (удобно записывать их в виде параллелотопов), $\mathcal{Y}[k]$ — полосы (или $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{P}(p_f, P_f, \pi_f) = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f], \quad \bar{P}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det \bar{P}_f \neq 0, \\ \mathcal{R}[k] &= \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]], \quad \bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]], \quad \bar{Q}(t) \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}[k] = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i[k], \quad \Sigma^i[k] = \Sigma(c_j[k], s^j[k], \sigma_j[k]) = \{x \mid |(x, s^i[k]) - c_i[k]| \leq \sigma_i[k]\},$$

все матрицы $D[k] = A[k] + \tilde{V}[k] + \tilde{U}[k]$ — невырожденные ($\det D[k] \neq 0$).

Рассмотрим следующую задачу, подобную задачам, исследованным в [2; 15; 16].

З а д а ч а 1. Дана система (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6). Для любого i , $0 \leq i \leq N - 1$, найти множество разрешимости $\mathcal{W}[i]$ и такую позиционную стратегию управления $u = u[k, x]$, $u[k, x] \in \mathcal{R}[k]$, чтобы всякое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + V[k])x[k - 1] + B[k]u[k, x[k - 1]] + C[k]v[k], \quad k = i + 1, \dots, N,$$

с начальным условием $x[i] \in \mathcal{W}[i]$ удовлетворяло включению $x[N] \in \mathcal{M}$ и фазовым ограничениям (1.6), каковы бы ни были допустимые функции $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$.

Мнозначную функцию $\mathcal{W}[k]$, $k = 0, \dots, N$, называют *трубкой разрешимости* $\mathcal{W}[\cdot]$.

Решение задачи 1 для случаев (А), (В,і) (т.е. без матричной неопределенности) известно (см. [11], а также [15] для случая (А)) и может быть описано следующими соотношениями:

$$\mathcal{W}[k - 1] = A[k]^{-1}((\mathcal{W}[k] \dot{-} C[k]Q[k]) + (-B[k])\mathcal{R}[k]) \cap \mathcal{Y}[k - 1], \quad k = N, \dots, 1, \quad \mathcal{W}[N] = \mathcal{M}, \quad (1.7)$$

$$u[k, x] \in \mathcal{U}[k, x] = \mathcal{R}[k] \cap \{u \mid B[k]u \in (\mathcal{W}[k] \dot{-} C[k]Q[k]) - A[k]x\}, \quad (1.8)$$

где $u[k, x]$ — произвольная функция со значениями в $\mathcal{U}[k, x]$. Здесь приведены рекуррентные соотношения для $\mathcal{W}[\cdot]$, включающие следующие операции с множествами: *сумму Минковского* ($\mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 = \{y \mid y = x^1 + x^2, x^k \in \mathcal{X}^k\}$), *разность Минковского* ($\mathcal{X}^1 \dot{-} \mathcal{X}^2 = \{y \mid y + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1\}$), *аффинное преобразование* и *пересечение множеств*. Точное нахождение множеств $\mathcal{W}[k]$ по этим формулам может быть достаточно затруднительно. Поэтому разрабатывались эллипсоидальные методы решения задачи 1 (см. [15] для случая (А) и [16] для случаев (А), (В,і) без ФО).

Разрабатывались также методы “полиэдрального” синтеза управлений [11; 12]. В [11] для случаев (А), (В,і) были введены семейства внешних $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и внутренних $\mathcal{P}^-[\cdot]$ параллелепипедозначных и параллелотопозначных (короче, *полиэдральных*) оценок для трубки $\mathcal{W}[\cdot]$ из (1.7) ($\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{W}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$) и предложены стратегии управления $u[k, x]$, которые могут быть построены путем решения систем линейных неравенств. Заметим, что если начальная точка $x[0]$ лежит вне по крайней мере одной из внешних оценок $\mathcal{P}^+[0]$, то нет гарантии, что состояние системы может быть переведено на целевое множество \mathcal{M} (с соблюдением фазовых ограничений) при любых допустимых возмущениях. Если же $x[0]$ принадлежит хотя бы одной из внутренних оценок $\mathcal{P}^-[0]$, то с использованием вышеупомянутой стратегии управления можно достичь \mathcal{M} . В [12] для случаев (А), (В,і), (В,іі) без фазовых ограничений была разработана другая полиэдральная техника синтеза управлений (входящих либо аддитивно, либо в матрицу системы), позволяющая строить стратегии управления по явным формулам.

Статья посвящена решению нижеприведенных задач 2 и 3 двух типов: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы; обе задачи касаются всех упомянутых случаев неопределенностей (А)–(В,іі) и учитывают наличие фазовых ограничений.

З а д а ч а 2. Пусть $U[k] \equiv 0$. Для системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$, удовлетворяющую условиям $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$, $k = 0, \dots, N - 1$, и соответствующую стратегию управления $u = u[k, x]$, удовлетворяющую ограничению $u[k, x] \in \mathcal{R}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + V[k])x[k - 1] + B[k]u[k, x[k - 1]] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.9)$$

с $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ не выходило из трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$: $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были допустимые реализации $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$. Более того, ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

Заметим, что трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, дающие решения задачи 2, будут представлять собой внутренние оценки для трубки разрешимости в задаче 1 ($\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{W}[k]$).

З а д а ч а 3. Пусть $u[k] \equiv 0$. Для системы (1.1), (1.3)–(1.6) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$, удовлетворяющую условиям $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$, $k = 0, \dots, N-1$, и соответствующую стратегию управления $U = U[k, x]$, удовлетворяющую ограничению $U[k, x] \in \mathcal{U}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + U[k, x[k-1]] + V[k])x[k-1] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.10)$$

с $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ не выходило из трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$: $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были допустимые реализации $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$. Ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

2. Вспомогательные результаты: элементарные полиэдральные оценки

Первый способ решения задачи 2 основан на использовании свойств операций с параллелотопами (в частности, участвующих в (1.7), (1.8)) и построении элементарных оценок для результатов таких операций. Называем \mathcal{P}^+ (\mathcal{P}^-) *внешней* (*внутренней*) *оценкой для множества* $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{P}^+ \supseteq \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}^- \subseteq \mathcal{Q}$). Для удобства напомним вкратце некоторые результаты относительно упомянутых элементарных оценок.

Результат аффинного преобразования параллелотопа — это параллелотоп: $A\mathcal{P}[p, \bar{P}] + a = \mathcal{P}[Ap + a, A\bar{P}]$.

Внутренние параллелотопозначные оценки для суммы Минковского $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2$ двух параллелотопов $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}[p^k, \bar{P}^k]$, $k = 1, 2$, $\bar{P}^1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{P}^2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, могут быть найдены [9] в виде $\mathcal{P}_\Gamma^-(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}[p^1 + p^2, \bar{P}^1 + \bar{P}^2\Gamma]$, где $\Gamma \in \mathcal{G}^{m \times n} = \{\Gamma = \{\gamma_\alpha^\beta\} \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \|\Gamma\| \leq 1\}$, $\|\Gamma\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |\gamma_i^j|$. Матричный параметр Γ определяет целое семейство оценок.

Разность Минковского $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^1 - \mathcal{P}^2$ двух параллелотопов при условии $\det \bar{P}^1 \neq 0$ представляет собой либо параллелепипед, либо пустое множество [9]: если $\pi^* = e - \text{Abs}((\bar{P}^1)^{-1}\bar{P}^2)e \geq 0$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}[p^1 - p^2, \bar{P}^1 \text{diag } \pi^*]$; иначе $\mathcal{Q} = \emptyset$. Напомним, что два вектора e в формуле для π^* могут, вообще говоря, быть разных размерностей (точнее, n и m соответственно).

Если имеем дело с матричной неопределенностью, возникает еще одна операция, а именно *умножение интервальной матрицы* $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(A - \hat{A}) \leq \hat{A}\}$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$: $\mathcal{A} \circ \mathcal{X} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax, A \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}\}$. Известно, что множество $\mathcal{A} \circ \mathcal{X}$ может быть невыпукло для выпуклого множества \mathcal{X} (см., например, [17; 18]).

Результат умножения интервальной матрицы на одноточечное множество — это параллелепипед вида $\mathcal{A} \circ x = \mathcal{P}(\tilde{A}x, I, \hat{A}(\text{Abs } x)) = \mathcal{P}[\tilde{A}x, \text{diag}(\hat{A}(\text{Abs } x))]$ [17].

Пусть \mathcal{Q} — это ограниченный политоп с непустой внутренностью, образованный пересечением $\Upsilon \geq n + 1$ полос: $\mathcal{Q} = \bigcap_{j=1}^{\Upsilon} \Sigma^j$, $\Sigma^j = \Sigma(c_j, s^j, \sigma_j) = \{x \mid |(x, s^j) - c_j| \leq \sigma_j\}$. В [14] был предложен следующий простой способ построения внутренних для \mathcal{Q} оценок $\mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q})$ с произвольными фиксированными центром $v \in \text{int } \mathcal{Q}$ и матрицей ориентации $V = \{v^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Пусть $A = \{a_i^j\} = \{a^j\} \in \mathbb{R}^{n \times \Upsilon}$, $b \in \mathbb{R}^\Upsilon$ и векторы ν^0 , $\nu^* \in \mathbb{R}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} a_i^j &= |(v^i, s^j)|, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, \Upsilon, \\ b_j &= \min\{\sigma_j + c_j - (v, s^j), \sigma_j - c_j + (v, s^j)\}, \quad j = 1, \dots, \Upsilon; \\ \nu_i^0 &= (1/n) \min\{b_j/a_i^j \mid j = 1, \dots, \Upsilon, a_i^j \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \nu^* &= \gamma \nu^0, \quad \gamma = \min\{b_j/(a^j, \nu^0) \mid j = 1, \dots, \Upsilon, (a^j, \nu^0) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Тогда $a^j \neq 0$, $j = 1, \dots, \Upsilon$, и $A \geq 0$, $b > 0$, имеем $\nu^0 > 0$, $\nu^* > 0$, и параллелепипед $\mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(v, V, \nu^*)$ является внутренней оценкой для \mathcal{Q} : $\mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$ [14].

Выше предполагалось, что точка $v \in \text{int } \mathcal{Q}$ известна. Для некоторых множеств найти такую точку несложно [14]. В общем случае при фиксированной матрице V точку $x^* \in \text{int } \mathcal{Q}$ можно найти, в частности, путем решения некоторых оптимизационных задач [14], например $x^* \in \text{Argmax}\{\text{vol } \mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) \mid v \in \mathcal{Q}\}$ (для численного решения может быть использован симплексный метод Нелдера — Мида).

3. Решение задачи 2: способ I

Перейдем к решению задачи 2. Рассмотрим полиэдральные трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$\mathcal{P}^-[k] = \begin{cases} \mathcal{P}^{0-}[k] & \text{если } \mathcal{P}^{0-}[k] \subseteq \mathcal{Y}[k], \\ \mathcal{P}_{p^-[k], P^-[k]}^-(\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k]) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad k = N-1, \dots, 0. \quad (3.1)$$

Здесь трубка $\mathcal{P}^{0-}[\cdot] = \mathcal{P}[p^{0-}[\cdot], \bar{P}^{0-}[\cdot]]$ удовлетворяет соотношениям (в которых $k = N, \dots, 1$)

$$p^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}(p^-[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad D[k] = A[k] + \tilde{V}[k], \quad (3.2)$$

$$\bar{P}^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}(\bar{P}^-[k] \text{diag}(e - \gamma[k] - \beta[k]) - B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k]), \quad (3.3)$$

$$\gamma[k] = (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e, \quad (3.4)$$

$$\beta[k] = \max_{z \in \mathbf{E}(\mathcal{P}^{0-}[k-1])} (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1})\hat{V}[k] \text{Abs } z), \quad (3.5)$$

$$p^-[N] = p_f, \quad \bar{P}^-[N] = \bar{P}_f, \quad \mathcal{P}^-[N] = \mathcal{P}[p^-[N], \bar{P}^-[N]] = \mathcal{M}. \quad (3.6)$$

Символом $\mathbf{E}(\mathcal{P})$ обозначено множество всех вершин \mathcal{P} (т.е. множество точек вида $p + \sum_{i=1}^m \bar{p}^i \xi_i$, где $\xi_i \in \{-1, 1\}$); все $\Gamma[k] \in \mathcal{G}^{n_u \times n}$. Таким образом, на каждом шаге $k \in \{N-1, \dots, 0\}$ сначала находится параллелотоп $\mathcal{P}^{0-}[k]$ в силу соотношений (3.2), (3.3), правые части которых заданы явными формулами, за исключением векторов $\beta[k]$. Эти векторы $\beta[k]$ удовлетворяют системам нелинейных уравнений (3.5), которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta[k] &= H[k, \beta[k]], \\ H[k, \beta] &= \max_{\xi \in \mathbf{E}(\mathcal{C})} (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1})\hat{V}[k] \text{Abs}(p^{0-}[k-1] \\ &+ D[k]^{-1}((\bar{P}^-[k] \text{diag}(e - \gamma[k]) - B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k])\xi - \bar{P}^-[k] \text{diag } \xi \cdot \beta)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e)$. Затем вычисляются внутренние оценки для пересечения $\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k]$ параллелотопа и полосы.

Варьируя матрицы $\Gamma[k]$, $P^-[k]$ и векторы $p^-[k]$, получаем целое параметрическое семейство трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$. Далее будем называть $\Gamma[\cdot]$, $P^-[k]$, $p^-[k]$ *допустимыми параметрами*, если они удовлетворяют условиям $\|\Gamma[k]\| \leq 1$, $k = N, \dots, 1$; $\det P^-[k] \neq 0$ и $p^-[k] \in \text{int}(\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k])$, $k = N-1, \dots, 0$.

Пусть найдено решение этой системы (3.1)–(3.6), соответствующее некоторым фиксированным параметрам $\Gamma[\cdot]$, $P^-[k]$ и $p^-[k]$. Определим следующую стратегию управления (первого типа), связанную с найденной полиэдральной трубкой $\mathcal{P}^-[\cdot]$:

$$u^I[k, x] \in \mathcal{U}^-[k, x] = \mathcal{R}[k] \cap \{u \mid B[k]u \in \mathcal{P}^-[k] \dot{-} C[k] \mathcal{Q}[k] \dot{-} (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x\}. \quad (3.8)$$

Лемма 1. *Если параллелотоп $\mathcal{P}^-[k]$ невырожден и множество $\mathcal{P}^-[k] \dot{-} C[k] \mathcal{Q}[k] \dot{-} (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x$ оказывается непустым, то оно представляет собой параллелепипед*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-[k] \dot{-} C[k] \mathcal{Q}[k] \dot{-} (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x &= \mathcal{P}^x[k] - D[k]x, \\ \mathcal{P}^x[k] &= \mathcal{P}[p^-[k] - C[k]q[k], \bar{P}^-[k] \cdot \text{diag}(e - \gamma[k] - (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1}))\hat{V}[k] \text{Abs } x)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Доказательство. Утверждение следует из явной формулы $(A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x = \mathcal{P}[(A[k] + \tilde{V}[k])x, \text{diag}(\hat{V}[k] \cdot \text{Abs } x)]$, двукратного использования формулы для разности Минковского для двух параллелотопов и формулы типа $(\text{Abs}(A \text{diag } \alpha))e = \sum_{j=1}^n (\text{Abs } a^j) \alpha_j = (\text{Abs } A) \alpha$, справедливой для любых $A = \{a^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$. Порядок выполнения операций “ $\dot{-}$ ” в (3.8) не важен ввиду известного правила [19, формула (3.1.14)]: $(\mathcal{X} \dot{-} \mathcal{Y}) \dot{-} \mathcal{Z} = \mathcal{X} \dot{-} (\mathcal{Y} + \mathcal{Z})$. \square

Теорема 1. Пусть для системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) выполнено предположение 1. Пусть система соотношений (3.1)–(3.6), где $\Gamma[\cdot]$, $P^-\cdot$, $p^-\cdot$ — произвольные допустимые параметры, определяет такие трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^-\cdot$, что выполняются условия $e - \gamma[k] - \beta[k] \geq 0$, $k = N, \dots, 1$, и множества $\mathcal{P}^{0-}[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ оказываются невырожденными параллелотопами при всех $k = N - 1, \dots, 0$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-\cdot$ и стратегия управления $u^I[\cdot, \cdot]$ из (3.8), (3.9) дают частное решение задачи 2.

Доказательство. Пусть найдены параллелотопы $\mathcal{P}^-[k]$, $k = N, \dots, 0$, причем все $\det \bar{P}^-[k] \neq 0$. Выполнение фазовых ограничений $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$ вытекает из (3.1) и фактов из разд. 2. Ограничения $u^I[k, x] \in \mathcal{R}[k]$ на управление следуют из (3.8). Остается проверить для каждого $k \in \{1, \dots, N\}$, что если $x[k-1] = x \in \mathcal{P}^-[k-1]$, то $\mathcal{U}^-[k, x] \neq \emptyset$ и с помощью произвольного управления $u^I[k, x] \in \mathcal{U}^-[k, x]$ система переводится в состояние $x[k] = (A[k] + V[k])x + B[k]u^I[k, x] + C[k]v[k] \in \mathcal{P}^-[k]$ независимо от $v[k] \in \mathcal{Q}[k]$ и $V[k] \in \mathcal{V}[k]$. Это обеспечит, в частности, выполнение терминального условия $x[N] \in \mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$.

Итак, пусть $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$. Из (3.1)–(3.5) следует, что $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}P_{\Gamma[k]}^-(\mathcal{P}^a[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k])$, где $\mathcal{P}^a[k] = \mathcal{P}[p^-[k] - C[k]q[k], \bar{P}^-[k]\text{diag}(e - \gamma[k] - \tilde{\beta}[k])]$, $\tilde{\beta}[k] = \max_{z \in \mathcal{P}^{0-}[k-1]}(\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1}))\hat{V}[k]\text{Abs}z$. Здесь учтено, что ввиду свойств выпуклых функций (см. [12, лемма 4]) справедливо равенство $\beta[k] = \tilde{\beta}[k]$. Сравнивая формулы для $\mathcal{P}^x[k]$ из (3.9) и $\mathcal{P}^a[k]$, получаем, с учетом включения $x \in \mathcal{P}^{0-}[k-1]$, что $\mathcal{P}^a[k] \subseteq \mathcal{P}^x[k]$. Следовательно, $x \in D[k]^{-1}P_{\Gamma[k]}^-(\mathcal{P}^x[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k]) \subseteq D[k]^{-1}(\mathcal{P}^x[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k])$, откуда $D[k]x \in \mathcal{P}^x[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k]$. Значит, найдутся $\bar{x} \in \mathcal{P}^x[k]$ и $\bar{u} \in \mathcal{R}[k]$ такие, что $D[k]x = \bar{x} - B[k]\bar{u}$. При этом $B[k]\bar{u} = \bar{x} - D[k]x \in \mathcal{P}^x[k] - D[k]x$. Ввиду формул (3.8), (3.9) это означает, что $\bar{u} \in \mathcal{U}^-[k, x]$. Следовательно, доказано, что $\mathcal{U}^-[k, x] \neq \emptyset$ для $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$.

Для такого x и произвольного $u^I[k, x] \in \mathcal{U}^-[k, x]$ получаем $(A[k] + V[k])x + B[k]u^I[k, x] + C[k]v[k] \subseteq (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x + (\mathcal{P}^-[k] - C[k]\mathcal{Q}[k]) \dot{-} (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x + C[k]\mathcal{Q}[k] \subseteq \mathcal{P}^-[k]$ (здесь два раза было использовано свойство операций Минковского $(\mathcal{X}^1 \dot{-} \mathcal{X}^2) + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1$ [19, с. 133]). \square

З а м е ч а н и е 1. Для случаев (A), (B, i) уравнения (3.7) превращаются в явные формулы $\beta[k] = 0$. В случае (B, ii) при некоторых предположениях для численного решения (3.7) может быть использован метод последовательных приближений (подробнее см. в [12, разд. 4]).

З а м е ч а н и е 2. Важный частный случай многошаговых систем — это системы, являющиеся аппроксимациями аналогичных дифференциальных, например, полученные дискретизацией по схеме Эйлера [9; 12] (заметим, что при этом матрицы $D[k]$ оказываются неособыми, если шаг дискретизации h_N достаточно мал). Для систем такого типа может быть полезно обратиться к эвристическим способам построения матриц $\Gamma[k]$ по формулам, использующим значения матрицы $-\bar{P}^-[k]^{-1}B[k]\bar{\mathcal{R}}[k]$ аналогично [12, замечание 7], [9, с. 300], а для нахождения $\beta[k]$ в случае (B, ii) естественно задействовать метод последовательных приближений, так как оператор $H[k, \beta]$ оказывается сжимающим при достаточно малых h_N (см. [12, разд. 4]).

З а м е ч а н и е 3. Для определения $u^I[k, x]$ достаточно найти некоторую точку в множестве $\mathcal{U}^-[k, x]$, которое, как видно из (3.8), (3.9), представимо в виде пересечения нескольких гиперполос: $\bigcap_{i=1}^{\Upsilon} \Sigma^i$, $\Upsilon = n_u + n$. Для этого можно воспользоваться итерационными процессами фейеровского типа, где применяется проектирование на гиперполосы, например, процессом [20, с. 194–196]² $u^{j+1} = (1 - \lambda)T(u^j) + \lambda u^j$, $j = 0, 1, \dots$, где $T(u) = \Upsilon^{-1} \sum_{i=1}^{\Upsilon} \varphi_i(u)$, $\lambda = 1/2$;

²Этот процесс принадлежит к группе фейеровских процессов, которые сходятся при любом начальном приближении и которые можно применять для нахождения квазирешений несовместных систем линейных неравенств. Заметим, что если полученное при окончании процесса $u^* \notin \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{\mathcal{R}}[k]]$, т. е. $\lambda^* < 1$, где $\lambda^* = \min_{1 \leq i \leq n_u} |(e^i)^\top \bar{\mathcal{R}}[k]^{-1}(u^* - r[k])|^{-1}$, то для удовлетворения ограничения (1.2) естественно “подправить” u^* до $u^{**} \in \mathcal{R}[k]$ (например, сдвинув u^* в направлении к центру $\mathcal{R}[k]$, полагая $u^{**} = r[k] + \lambda^*(u^* - r[k])$). Для упомянутых в замечании 2 систем в качестве начального приближения u^0 на шаге $k > 1$ естественно использовать управление, найденное на предыдущем шаге $k - 1$. В качестве начального приближения u^0 при $k = 1$ можно брать, например, центр параллелепипеда $\mathcal{R}[1]$.

проекции $\varphi_i(u)$ точки u на гиперполосы Σ^i определяются следующими явными формулами, вытекающими из [20, с. 78]: $\varphi_i(u) = u - \|s^i\|_2^{-2} s^i \phi_i(u)$; $\phi_i(u) = u^\top s^i - c_i - \sigma_i$, если $u^\top s^i - c_i - \sigma_i > 0$; $\phi_i(u) = u^\top s^i - c_i + \sigma_i$, если $u^\top s^i - c_i + \sigma_i < 0$; $\phi_i(u) = 0$ в остальных случаях.

4. Решение задачи 2: способ II

Рассмотрим семейство трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$, удовлетворяющих той же системе рекуррентных соотношений, но определим другую стратегию управления³ (стратегию второго типа):

$$u^{II}[k, x] = r[k] + \bar{R}[k] \lambda[k, x] \xi[k, x], \quad \xi[k, x] = \Gamma[k] \bar{P}^{0-}[k-1]^{-1} (x - p^{0-}[k-1]), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

где $\lambda[k, x]$ — это либо скалярные множители вида

$$\lambda[k, x] = \lambda^{(1)}[k, x] = \min\{1, (\|\xi[k, x]\|_\infty)^{-1}\}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

либо диагональные матрицы вида

$$\lambda[k, x] = \text{diag } \lambda^{(2)}[k, x], \quad \lambda_i^{(2)}[k, x] = \min\{1, |\xi_i[k, x]|^{-1}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Теорема 2. Пусть для системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) выполнено предположение 1. Пусть система соотношений (3.1)–(3.6), где $\Gamma[\cdot]$, $P^-[\cdot]$, $p^-[\cdot]$ — произвольные допустимые параметры, определяет такие трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^-[\cdot]$, что выполняются условия $e^{-\gamma[k]} - \beta[k] \geq 0$, $k = N, \dots, 1$, и множества $\mathcal{P}^{0-}[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ оказываются невырожденными параллелотопами при всех $k = N-1, \dots, 0$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-[\cdot]$ вместе с каждой из стратегий управления $u^{II}[\cdot, \cdot]$ из (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3) дают частное решение задачи 2, причем для начальных точек $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ обе стратегии оказываются одинаковыми, определяемыми формулами

$$u^{II}[k, x] = r[k] + \bar{R}[k] \xi[k, x], \quad \xi[k, x] = \Gamma[k] \bar{P}^{0-}[k-1]^{-1} (x - p^{0-}[k-1]), \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Доказательство. Несложно видеть, что управления $u^{II}[k, x]$, определяемые формулами (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3), удовлетворяют ограничениям $u^{II}[k, x] \in \mathcal{R}[k]$ при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N$, поскольку формулы (4.2) и (4.3) обеспечивают $\|\lambda[k, x] \xi[k, x]\|_\infty \leq 1$.

Пусть найдены параллелотопы $\mathcal{P}^-[k]$, $k = N, \dots, 0$, причем все $\det \bar{P}^-[k] \neq 0$. Рассмотрим решение $x[\cdot]$ системы (1.9), соответствующее $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ (где $x_0 = p^-[0] + \bar{P}^-[0] \zeta_0$, $\|\zeta_0\|_\infty \leq 1$), стратегии управления $u = u^{II}[k, x]$ из (4.1) и произвольным допустимым $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$ (т. е. $v[k] = q[k] + \bar{Q}[k] \chi[k]$, $\|\chi[k]\|_\infty \leq 1$; $\text{Abs}(V[k] - \tilde{V}[k]) \leq \hat{V}[k]$ при всех k). Представим векторы $x[k]$ в виде

$$x[k] = p^-[k] + \bar{P}^-[k] \zeta[k] = p^{0-}[k] + \bar{P}^{0-}[k] \zeta^0[k], \quad k = 0, \dots, N. \quad (4.5)$$

Докажем по индукции, что если $x = x[k-1] \in \mathcal{P}^-[k-1]$, то $\|\zeta[k]\|_\infty \leq 1$, т. е. $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$.

Прежде всего заметим, что при $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$ обе пары формул (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3) превращаются в (4.4), поскольку для такого x имеем $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$, т. е.

$$x = p^{0-}[k-1] + \bar{P}^{0-}[k-1] \zeta^0[k-1], \quad \|\zeta^0[k-1]\|_\infty \leq 1, \quad (4.6)$$

и следовательно $\|\xi[k, x]\|_\infty = \|\Gamma[k] \zeta^0[k-1]\|_\infty \leq \|\Gamma[k]\| \cdot \|\zeta^0[k-1]\|_\infty \leq 1 \cdot 1 \leq 1$.

Теперь из (4.5) с учетом (1.9), (4.6), (3.2), (4.4) получаем следующие соотношения для $\zeta[\cdot]$:

$$\begin{aligned} \zeta[k] &= \bar{P}^-[k]^{-1} (x[k] - p^-[k]) = \bar{P}^-[k]^{-1} (D[k] (p^{0-}[k-1] + \bar{P}^{0-}[k-1] \zeta^0[k-1]) \\ &\quad + \Delta V[k] x + B[k] u^{II}[k, x] + C[k] (q[k] + \bar{Q}[k] \chi[k]) - p^-[k]) \\ &= \bar{P}^-[k]^{-1} (D[k] \bar{P}^{0-}[k-1] \zeta^0[k-1] + \Delta V[k] x + B[k] \bar{R}[k] \Gamma[k] \zeta^0[k-1] + C[k] \bar{Q}[k] \chi[k]), \end{aligned}$$

³Индекс k у $u^{II}[k, x]$ указывает, что $u^{II}[k, x]$ применяется в системе (1.9) на k -м шаге. Из формул (4.1) видно, что $u^{II}[k, x]$ определяется множеством $\mathcal{R}[k]$ и параметром $\Gamma[k]$ в момент k и параллелотопом $\mathcal{P}^{0-}[k-1]$ в момент $k-1$. Зависимость u^{II} от $k-1$ не указываем для упрощения обозначений.

где $\Delta V[k] = V[k] - \tilde{V}[k]$, $\text{Abs } \Delta V[k] \leq \hat{V}[k]$, $\|\chi[k]\|_\infty \leq 1$. Подставляя выражение для $D[k]\bar{P}^{0-}[k-1]$, вытекающее из (3.3), и обозначая $c[k, x] = \bar{P}^{-}[k]^{-1}(\Delta V[k]x + C[k]\bar{Q}[k]\chi[k])$, выводим

$$\zeta[k] = \text{diag}(e - \gamma[k] - \beta[k])\zeta^0[k-1] + c[k, x]. \quad (4.7)$$

При $x \in \mathcal{P}^{-}[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ справедливы следующие оценки для $c[k, x]$:

$$\begin{aligned} \text{Abs } c[k, x] &\leq \text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1})\hat{V}[k] \max_{z \in \mathcal{P}^{-}[k-1]} \text{Abs } z + (\text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e \\ &\leq \text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1})\hat{V}[k] \max_{z \in \mathcal{P}^{0-}[k-1]} \text{Abs } z + \gamma[k] = \beta[k] + \gamma[k] \end{aligned}$$

(здесь была использована [12, лемма 4]). Поэтому если $e - \gamma[k] - \beta[k] \geq 0$, то

$$|\zeta_i[k]| \leq |1 - \gamma_i[k] - \beta_i[k]| \cdot |\zeta_i^0[k-1]| + |c_i[k, x]| \leq (1 - \gamma_i[k] - \beta_i[k]) \cdot 1 + \beta_i[k] + \gamma_i[k] \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

и желаемые неравенства $\|\zeta[k]\|_\infty \leq 1$ действительно имеют место для всех $k = 1, \dots, N$. \square

Следствие 1. В условиях теоремы 2 для случаев (A) и (B, i) (без матричной неопределенности) действие стратегии управления второго типа $u^{II}[k, x]$ при применении ее к $x \in \mathcal{P}^{-}[k-1]$ совпадает с действием одной из стратегий первого типа $u^I[k, x]$ из (3.8), (3.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно убедиться, что $B[k]u^{II}[k, x] \in \mathcal{P}^x[k] - D[k]x$, где параллелепипед $\mathcal{P}^x[k]$ определен в (3.9), т. е., что найдется $\xi[k-1]$ с $\|\xi[k-1]\|_\infty \leq 1$ такое, что

$$B[k]u^{II}[k, x] = p^{-}[k] - C[k]q[k] - D[k]x + \bar{P}^{-}[k]\text{diag}(e - \gamma[k])\xi[k-1]. \quad (4.8)$$

С учетом (4.6) левая часть из (4.8) в силу (4.4) принимает вид $B[k]u^{II}[k, x] = B[k]r[k] + B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k]\zeta^0[k-1]$, а правая часть из (4.8) с использованием формул (3.2), (3.3) приводится к виду $B[k]r[k] + B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k]\zeta^0[k-1] + \bar{P}^{-}[k]\text{diag}(e - \gamma[k])(-\zeta^0[k-1] + \xi[k-1])$. Поэтому для обеспечения равенства в (4.8) достаточно положить $\xi[k-1] = \zeta^0[k-1]$. \square

Привлекательным свойством стратегий управления (4.1) является их явный вид.

5. Решение задачи 3

Для решения задачи 3 рассмотрим следующую систему нелинейных рекуррентных соотношений для параллелотопов $\mathcal{P}^{-}[k] = \mathcal{P}[p^{-}[k], \bar{P}^{-}[k]]^4$:

$$\mathcal{P}^{-}[k] = \begin{cases} \mathcal{P}^{0-}[k], & \text{если } \mathcal{P}^{0-}[k] \subseteq \mathcal{Y}[k], \\ \mathcal{P}_{p^{-}[k], \bar{P}^{-}[k]}^{-}(\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k]) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad k = N-1, \dots, 0, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{P}^{0-}[\cdot] = \mathcal{P}[p^{0-}[\cdot], \bar{P}^{0-}[\cdot]]$ удовлетворяют соотношениям (в которых $k = N, \dots, 1$)

$$p^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}(p^{-}[k] - C[k]q[k]), \quad D[k] = A[k] + \tilde{U}[k] + \tilde{V}[k], \quad (5.2)$$

$$\bar{P}^{0-}[k-1] = H[k, \bar{P}^{0-}[k-1]], \quad k = N, \dots, 1, \quad (5.3)$$

$$H[k, P] = (D[k] - \Phi[k, P])^{-1}\bar{P}^{-}[k]\text{diag}(e - \beta[k, P] - \gamma[k]),$$

$$\Phi[k, P] = \Phi[k, P; \Omega[k], L[k]] = (\hat{U}[k] * \Omega[k])\text{diag } \eta[k, P]\Pi(L[k])^\top \text{diag } \kappa(P),$$

$$\eta[k, P] = \max\{0, \text{Abs } p^{0-}[k-1] - (\text{Abs } P)e\}, \quad (5.4)$$

$$\beta[k, P] = \max\{\text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1})\hat{V}[k] \text{Abs}(p^{0-}[k-1] + P\xi) \mid \xi \in \mathbf{E}(C)\},$$

$$\gamma[k] = (\text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e,$$

$$\kappa_i(P) = (e^i)^\top (\text{Abs } P)e^{-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

⁴Заметим, что при отсутствии фазовых ограничений и $C[k] \equiv I$ соотношения (5.1)–(5.5) сводятся к [12, формулы (5.1)–(5.3)], где необходимо исправить опечатку, связанную с тем, что в формуле для $\Phi[k, P]$ был пропущен символ транспонирования у матрицы Π .

$$p^-[N] = p_f, \quad \bar{P}^-[N] = \bar{P}_f, \quad \mathcal{P}^-[N] = \mathcal{P}[p^-[N], \bar{P}^-[N]] = \mathcal{M}. \quad (5.5)$$

Здесь символом $*$ обозначена операция поэлементного произведения матриц, символом $\Pi(L)$ — матрица, определяемая перестановкой $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ чисел $\{1, \dots, n\}$ и получаемая соответствующей перестановкой столбцов единичной матрицы: $\Pi(L) = \{e^{l_j}\}$; $L[k]$ — произвольные перестановки; $\Omega[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\Omega[k] \in \mathcal{O}, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mathcal{O} = \{\Omega = \{\omega_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid |\omega_i^j| \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим через \mathbb{L} и \mathbb{O} множества всех таких функций $L[\cdot]$ и $\Omega[\cdot]$ соответственно. Таким образом, опять имеем параметрическое семейство полиэдральных трубок, где параметрами являются матричная функция $\Omega[\cdot] \in \mathbb{O}$, вектор-функция $L[\cdot] \in \mathbb{L}$, а также матричная функция $P^-[\cdot]$ и вектор-функция $p^-[\cdot]$, которые фигурируют в формулах (5.1) для внутренних оценок пересечений параллелотопов с полосами (стесненные такими же условиями, как и в разд. 3 и 4 для решений задачи 2). Будем называть вышеупомянутые параметры *допустимыми*.

Рассмотрим стратегию управления $U = \{u_i^j\}$, связанную с трубками $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ из (5.1)–(5.5) и определяемую следующими формулами (где $i, j = 1, \dots, n$):

$$u_i^j[k, x] = \tilde{u}_i^j[k] + \begin{cases} \Pr_{[-\hat{u}_i^j[k], \hat{u}_i^j[k]]} \left(-(x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}[k-1])(x_j)^{-1} e^{i\top} \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] e^{l_j} \right), & \text{если } x_j \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Лемма 2. Если $\det \bar{P}^{0-}[k-1] \neq 0$, то стратегия управления $U[k, x]$ вида (5.6) на шаге k определена и удовлетворяет условиям $U[k, x] \in \mathcal{U}[k]$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$. При этом для $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ формулы (5.6) превращаются в

$$u_i^j[k, x] = \tilde{u}_i^j[k] + \begin{cases} -(x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}[k-1])(x_j)^{-1} e^{i\top} \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] e^{l_j}, & \text{если } x_j \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (5.7)$$

и стратегия управления действует по правилу

$$U[k, x] x = \tilde{U}[k] x - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] (x - p^{0-}[k-1]). \quad (5.8)$$

Доказательство. Если матрица $\bar{P}^{0-}[k-1]$ неособая, то она не может иметь нулевых строк и, значит, $(e^i)^\top (\text{Abs } \bar{P}^{0-}[k-1]) e \neq 0$, т.е. все элементы матрицы Φ определены. С учетом свойств метрической проекции имеем $U[k, x] \in \mathcal{U}[k]$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$.

Выпишем выражения для элементов $\varphi_i^{l_j}$ матрицы $\Phi = \{\varphi^j\}$, фигурирующих в (5.6). В силу соотношений $e^{l_j} = \Pi(L)e^j$ и ортогональности матриц $\Pi(L)$ получаем $\Pi(L)^\top e^{l_j} = e^j$ и, значит,

$$\varphi_i^{l_j} = e^{i\top} \Phi e^{l_j} = e^{i\top} (\hat{U} * \Omega) \text{diag } \eta \Pi^\top e^{l_j} \kappa_{l_j} = e^{i\top} (\hat{U} * \Omega) e^j \eta_j \kappa_{l_j} = \hat{u}_i^j \omega_i^j \eta_j \kappa_{l_j} \quad (5.9)$$

(здесь и в ряде мест ниже для сокращения опущены аргументы у функций).

При $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ имеем (4.6) и аналогично [12, доказательство теоремы 2] можно проверить, что $u_i^j[k, x]$, вычисленные по формулам (5.7), (5.9), удовлетворяют неравенствам $|u_i^j - \tilde{u}_i^j| \leq \hat{u}_i^j$ и, значит, формулы (5.6) превращаются в (5.7).

Для доказательства (5.8) при условии $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ достаточно убедиться, что если $x_j = 0$, то $\varphi^{l_j} = 0$, поскольку тогда с учетом (5.7) получится $(U - \tilde{U})x = -\sum_{j: x_j \neq 0} (x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}) (x_j)^{-1} \varphi^{l_j} x_j - \sum_{j: x_j = 0} \varphi^{l_j} (x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}) = -\sum_{l=1}^n \varphi^l (x_l - p_l^{0-})$. Равенства $\varphi^{l_j} = 0$ при $x_j = 0$ могут быть доказаны с учетом (5.9) аналогично [12, доказательство леммы 3]. \square

Теорема 3. Пусть для системы (1.1), (1.3), (1.4)–(1.6) выполнено предположение 1. Пусть система соотношений (5.1)–(5.5), где $\Omega[\cdot]$, $L[\cdot]$, $P^-[\cdot]$, $p^-[\cdot]$ — произвольные допустимые параметры, определяет такие трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^-[\cdot]$, что выполняются условия $e - \gamma[k] - \beta[k] > 0$, $k = N, \dots, 1$, и множества $\mathcal{P}^{0-}[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ оказываются невырожденными параллелотопами при всех $k = N - 1, \dots, 0$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и стратегия управления $U[\cdot, \cdot]$ из (5.6) дают частное решение задачи 3, причем для начальных то-

чек $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ получается, что действие стратегии управления определяется формулами (5.7), (5.8).

Доказательство. Включения $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$ вытекают из (5.1). Следуя схеме доказательства теоремы 2 и используя аналогичные обозначения, приведем выкладки для решения $x[\cdot]$ системы (1.10), соответствующего $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$, стратегии управления $U = U[k, x]$ из (5.6) и произвольным допустимым $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$. Опять представим векторы $x[k]$ в виде (4.5). Пусть $x = x[k-1] \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$. Тогда из (4.5), (1.10), (4.6) и (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \zeta[k] &= \bar{P}^-[k]^{-1}(x[k] - p^-[k]) = \bar{P}^-[k]^{-1}((D[k] + U[k, x] - \tilde{U}[k] + \Delta V[k])x + C[k]v[k] - p^-[k]) \\ &= \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k](p^{0-}[k-1] + \bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1]) + (U[k, x] - \tilde{U}[k])x \\ &\quad + \Delta V[k]x + C[k](q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k]) - p^-[k]). \end{aligned}$$

Учитывая равенство $D[k]p^{0-}[k-1] + C[k]q[k] - p^-[k] = 0$, вытекающее из (5.2), получаем

$$\zeta[k] = \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k]\bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1] + (U[k, x] - \tilde{U}[k])x) + c[k, x], \quad (5.10)$$

где $c[k, x]$ — такое же, как и в доказательстве теоремы 2. Используя (5.8) из леммы 2, формулу (4.6) и вытекающее из (5.3) равенство $(D[k] - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]])\bar{P}^{0-}[k-1] = \bar{P}^-[k] \text{diag}(e - \beta[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] - \gamma[k])$, выводим из (5.10) формулу для $\zeta[k]$, аналогичную (4.7):

$$\begin{aligned} \zeta[k] &= \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k]\bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1] - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]](x - p^{0-}[k-1])) + c[k, x] \\ &= \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k] - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]])\bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1] + c[k, x] \\ &= \text{diag}(e - \beta[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] - \gamma[k])\zeta^0[k-1] + c[k, x]. \end{aligned}$$

Как и в конце доказательства теоремы 2, приходим к желаемому неравенству $\|\zeta[k]\|_\infty \leq 1$. \square

В [13] для решения задачи 3 без ФО был предложен метод с использованием однопараметрического семейства полиэдральных трубок, где параметром служит произвольная функция $J[\cdot] \in \mathbb{L}$. Следующее следствие из теоремы 3 (где аналогом J служит L^*) обеспечивает развитие вышеупомянутого метода на случай систем с фазовыми ограничениями, а также показывает, что теорема 3 дает, вообще говоря, более богатое семейство трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

Следствие 2. Если в теореме 3 взять перестановки $L^*[k] = \{l_1^*[k], \dots, l_n^*[k]\}$ таким образом, что $\Pi(L^*[k]) = \Pi(L[k])^\top$, и положить $\Omega[k] = \Pi(L^*[k])^\top$, то получится семейство трубок, зависящих от трех параметров: $L^*[\cdot] \in \mathbb{L}$, $P^-[\cdot]$ и $p^-[\cdot]$. При этом матрицы Φ из (5.4) превращаются в диагональные вида

$$\Phi[k, P] = \text{diag} \alpha[k, P], \quad \alpha_i[k, P] = \alpha_i[k, P; L^*[k]] = \hat{u}_i^{l_i^*}[k] \eta_i^*[k, P] \kappa_i(P), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.11)$$

а закон управления (5.6) формулируется как

$$e^{i\top}(U[k, x] - \tilde{U}[k]) = \begin{cases} \text{Pr}_{[-\hat{u}_i^{l_i^*}[k], \hat{u}_i^{l_i^*}[k]]}(-\alpha_i[k, \bar{P}^{0-}[k-1]](x_i - p_i^{0-}[k-1])(x_i^*)^{-1})(e^{l_i^*})^\top, & \text{если } x_i^* \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Доказательство. Несложно заметить, что при $\Omega = \Pi(L^*)^\top$ строки матрицы $\hat{U} * \Omega$ могут быть записаны в виде $\hat{u}_i^{l_i^*}(e^{l_i^*})^\top$. Поэтому аналогично (5.9) получаем $\varphi_i^j = e^{i\top} \Phi e^j = e^{i\top}(\hat{U} * \Pi(L^*)^\top) \text{diag} \eta \Pi(L^*) e^j \kappa_j = \hat{u}_i^{l_i^*}(e^{l_i^*})^\top e^{l_j^*} \eta_j^* \kappa_j = \hat{u}_i^{l_i^*} \delta_{l_i^*}^{l_j^*} \eta_j^* \kappa_j$, где использованы символы Кронекера δ_i^j . Следовательно, $\varphi_i^j = \hat{u}_i^{l_i^*} \eta_j^* \kappa_j$ при $i = j$, и $\varphi_i^j = 0$ при $i \neq j$, т.е. имеем (5.11). Подобно этому из (5.9) можно получить $\varphi_i^j = e^{i\top}(\hat{U} * \Pi(L)) \text{diag} \eta \Pi(L)^\top e^{l_j} \kappa_{l_j} =$

$e^{i\top} \{\hat{u}_j^j e^{lj}\} e^j \eta_j \kappa_{lj} = \hat{u}_j^j e^{i\top} e^{lj} \eta_j \kappa_{lj} = \hat{u}_j^j \delta_i^{lj} \eta_j \kappa_{lj}$, где ненулевые правые части могут появиться только при таких i и j , что $l_j = i$. Учитывая это, а также что равенство $l_j = i$, как несложно видеть из определения перестановки L^* ($\Pi(L[k]) = \Pi(L^*[k])^\top$), эквивалентно равенству $j = l_i^*$, приходим к (5.12). \square

З а м е ч а н и е 4. Для нахождения матриц $\bar{P}^{0-}[k]$ нужно решать системы нелинейных уравнений $P = H[k, P]$ вида (5.3), (5.4). Справедливы замечания, подобные замечанию 1 и [12, замечание 8], касающиеся ситуации со сжимающими операторами $H[k, P]$.

З а м е ч а н и е 5. Для многошаговых систем, полученных дискретизацией по схеме Эйлера [9; 12], могут быть полезны следующие эвристические рекомендации для выбора параметров $\Omega[k]$. Используя соображения “локальной оптимизации” объема сечений трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$, аналогичные [9], будем искать $\Omega[k]$ из условия максимума $\text{tr } \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k]]$, где Φ вычисляется по формулам (5.4). Введем перестановку $L^*[k]$ такую, что $\Pi(L^*[k]) = \Pi(L[k])^\top$. Тогда, как несложно видеть, $\text{tr } \Phi = \sum_{i=1}^n \omega_i^{l_i^*} \hat{u}_i^{l_i^*} \eta_i^* \kappa_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i$, где α вычисляется по формулам (5.11). Очевидно, что максимум $\text{tr } \Phi$ по $\Omega \in \mathcal{O}$ при фиксированном значении L^* достигается на матрицах, удовлетворяющих $\omega_i^{l_i^*} = 1$, $i = 1, \dots, n$, и в частности при $\Omega = E$, где E — матрица, все элементы которой — единицы: $(e^i)^\top E e^j = 1$, $i, j = 1, \dots, n$, и при $\Omega = \Pi(L^*)^\top$.

З а м е ч а н и е 6. Упомянем некоторые эвристические способы выбора параметров Ω и L :

(1) “Вручную” задать некоторые (например, постоянные) допустимые функции Ω и L .

(2) Задать функцию L и взять $\Omega \equiv \Pi(L)$.

(3) Задать функцию Ω (например, положить $\Omega \equiv E$) и найти значения $L[k]$ при каждом k , решая оптимизационные задачи (конечного перебора) типа $f(L, \Omega) \rightarrow \max_L$. Здесь в качестве f можно взять либо (а) $f = f^*$, где $f^* = \text{vol } \mathcal{P}^{0-}[k-1]$, либо, в условиях замечания 5, (б) $f = f^{**}$, где $f^{**} = \text{tr } \tilde{\Phi}[k, \bar{P}^-[k]]$, а $\tilde{\Phi}[k, \bar{P}^-[k]]$ вычисляется по формулам (5.4) для $\Phi[k, \bar{P}^-[k]]$ с заменой η на $\tilde{\eta}[k, \bar{P}^-[k]] = \max\{0, \text{Abs } p^-[k] - (\text{Abs } \bar{P}^-[k])e\}$.

(4) Считать $\Omega = \Omega(L) = \Pi(L)$ и находить L (а значит и Ω) как решение задач типа $f(L, \Omega(L)) \rightarrow \max_L$, аналогичных вышеупомянутому в вариантах (3)(а) и (3)(б).

З а м е ч а н и е 7. При неудачном выборе допустимых параметров в формулах из теорем 1–3 не исключен случай, когда в некоторый момент k может получиться пустое множество $\mathcal{P}^-[k]$ и не сможем построить решение задачи с использованием этих параметров. Также следует иметь в виду, что использование предлагаемых в теореме 3 управлений исчерпывает, вообще говоря, не все потенциальные возможности управления в системе (1.1), (1.3)–(1.6).

6. Примеры

П р и м е р 1. Проиллюстрируем решение задачи 2, возникающей при рассмотрении дискретного аналога задачи о синтезе управления, успокаивающего колебания подвешенной цепи из двух нагруженных пружин. За основу примем пример 4.5 из [3, с. 175]), полагая $n = 4$, $A \equiv I + h_N \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$, $M = \text{diag } \{m_i\}$, $m_1 = m_2 = 2$, $k_1 = 1.3$, $k_2 = 2$, $B \equiv h_N m_2^{-1} e^4$, $C \equiv 0$, $\tilde{V} \equiv 0$, $\hat{V} \equiv 0$, $\mathcal{R} \equiv \mathcal{P}(0, I, 1)$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(0, I, 0.1e)$, $h_N = \theta/N$, $\theta = 7$, $N = 350$. Рассмотрим два случая, а именно случай (А) без неопределенности и без ФО и случай (В, ii; ФО) с ФО $|x_2| \leq 1.8$ и матричной неопределенностью с $\hat{v}_3^1 = h_N m_1^{-1} \hat{k}_1$, порождаемой условием $|k_1 - 1.3| \leq \hat{k}_1 = 0.05$; при моделировании полагаем $V[\cdot] \equiv \tilde{V}[\cdot] + \hat{V}[\cdot]$. Рассмотрим три начальных точки: $x_0^{(1)} = -(1.4944, 1.9014, 0.2686, 1.2829)^\top$ (такая же, как в [3, с. 175; рис. 4.37]), $x_0^{(2)} = -(1.3633, 1.7546, 0.0319, 0.6246)^\top$ и $x_0^{(3)} = (1.2481, 1.5478, 0.0610, 0.5843)^\top$.

Результаты моделирования показаны на рис. 1. В верхней части, соответствующей случаю (А), представлены проекции на три координатные плоскости сечений $\mathcal{P}^-[0]$ нескольких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$ из теорем 2 и 1 и траекторий, отвечающих двум типам управления (пунктирные

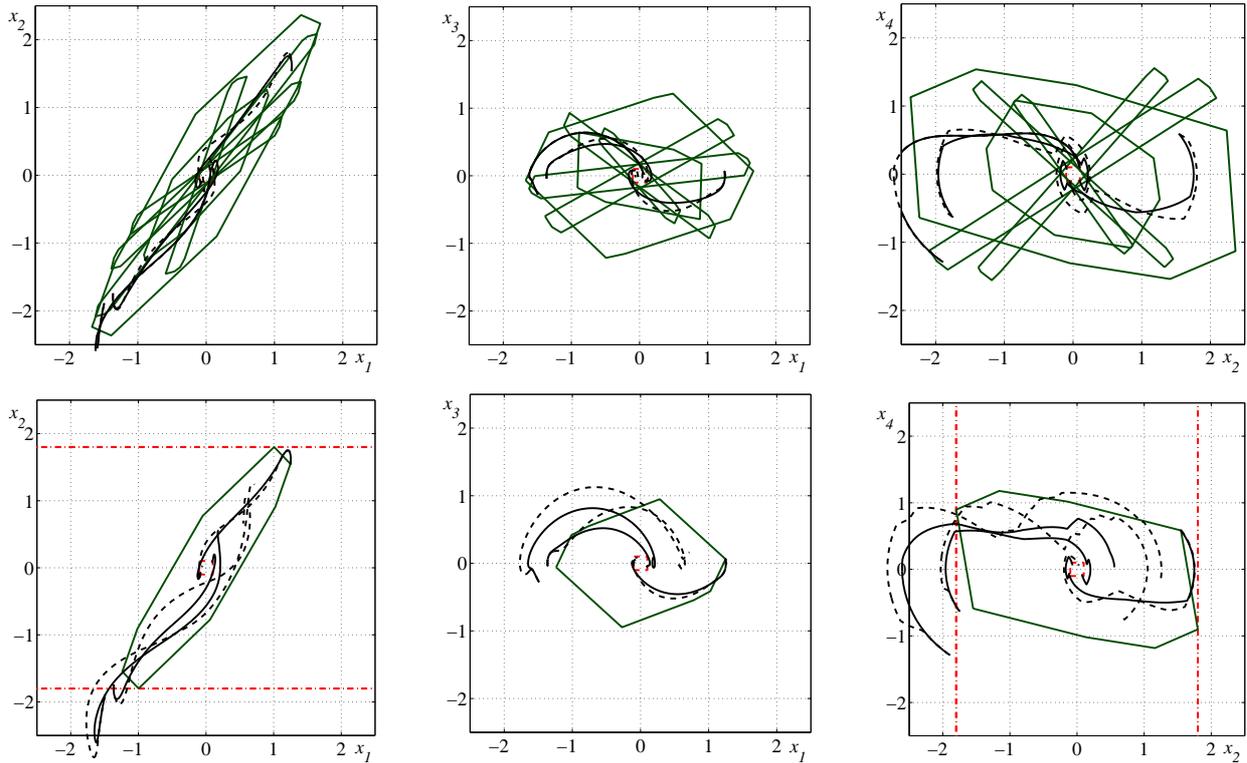


Рис. 1. Полиэдральный синтез в примере 1: верхние рисунки — случай (А), нижние — случай (В,ii;FO)

линии для u^I и сплошные — для u^{II}). При построении трубок использованы следующие значения параметров: $\Gamma[k]$ найдены по формулам, аналогичным [9, с. 300]; параметры $P^-[k]$ и $p^-[k]$, как и ниже в примере 2, берутся в виде $P^-[k] = P^{0-}[k]$, $k = N - 1, \dots, 0$; $p^-[k]$ — как указано в конце разд. 2. Нижняя часть рис. 1 подобна верхней, но относится к случаю (В,ii;FO); здесь приведены проекции $\mathcal{P}^-[0]$ для трубки, у которой $\Gamma[k]$ найдены с использованием соображений “локальной” оптимизации объема. Множество \mathcal{M} и FO показаны пунктирными и штрихпунктирными линиями соответственно.

Для случая (А) каждая из точек $x_0^{(i)}$ принадлежат одному из найденных множеств $\mathcal{P}^-[0]$, полученные отклонения от \mathcal{M} составляют порядка 10^{-8} и 10^{-13} для u^I и u^{II} соответственно; траектории, отвечающие $x_0^{(1)}$, практически не различаются (порядок разности — 10^{-2}) и подобны траектории из [3, рис. 4.37]. Для случая (В,ii;FO) расстояния от $x_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, до $\mathcal{P}^-[0]$ составили 0.8469, 0.2464, 0, а “промахи” от \mathcal{M} получились равными 1.3013, 0.9845, 0.0000 и 0.4662, 0.0000, 0.0000 для u^I и u^{II} соответственно. Для обеих траекторий, выходящих из $x_0^{(3)}$, FO не нарушаются. Для точек $x_0^{(i)} \notin \mathcal{P}^-[0]$, $i = 1, 2$, действие управления u^I оказалось хуже, чем для u^{II} , и по “промаху” от \mathcal{M} , и в смысле нарушения FO.

Пример 2. Рассматривается задача 3 при $n = 2$, $A \equiv I$, $C \equiv h_N(0, 1)^\top$, $h_N = \theta/N$, $\theta = 0.25$, $N = 200$, $\tilde{U} \equiv h_N \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\hat{U} \equiv h_N \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 \end{bmatrix}$, $\tilde{V} \equiv 0$, $\hat{V} \equiv 0$ или $\hat{V} \equiv h_N \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}(0, I, 0)$ или $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}(0, I, 0.1)$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(e, I, 0.1e)$ для четырех начальных точек $x_0^{(1)} = (0.12, 0.62)^\top$, $x_0^{(2)} = (0.2, 0.4)^\top$, $x_0^{(3)} = (0.1, 0.5)^\top$, $x_0^{(4)} = (0.6, 0.4)^\top$. На рис. 2 представлены результаты моделирования для случая (А) без неопределенности и без FO (левый рисунок) и для случая (В,ii;FO) с FO $|x_2 - 0.65| \leq 0.35$ и с неопределенностями обоих типов — матричной и аддитивной (средний и правый рисунки); во втором случае при моделировании выбираем $v[\cdot]$ аналогично [9] и $V[\cdot] \equiv \tilde{V}[\cdot] - \hat{V}[\cdot]$; содержание первых двух рисунков подобно рис. 1.

Параметры Ω и L , фигурирующие в теореме 3, выбирались в соответствии со следующими

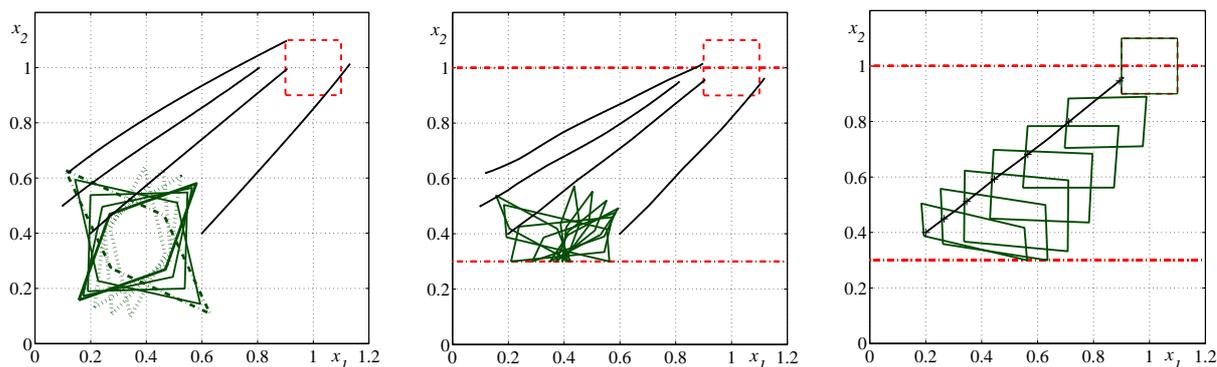


Рис. 2. Полиэдральный синтез в примере 2: левый рисунок — случай (A), средний и правый — случай (B,ii;FO). На правом рисунке показано несколько сечений трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, использованной для $x_0^{(2)}$

способами из замечания 6: (3) при двух сериях значений Ω : $\Omega \equiv \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{bmatrix}$ и $\Omega \equiv \begin{bmatrix} \delta & \delta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ с $\delta = 0.75, 0.5, 0.25$ (на левом рис. 2 сечения $\mathcal{P}^-[0]$ показаны сплошными и точечными⁵ линиями соответственно; результаты при способах (3)(a) и (3)(b) получались одинаковыми); (3) при $\Omega \equiv E$ (результат выделен жирной линией; такой же получается способом (1) при $\Omega \equiv E$, $L \equiv \{1, 2\}$); (4) (результат показан штрихпунктирной линией; такой же получается способом (2) при $L \equiv \{1, 2\}$ и при $L \equiv \{2, 1\}$, а также способом (3) при $\Omega \equiv I$). Для каждой из точек $x_0^{(i)}$ при построении управлений использовалась, как и в примере 1, та из найденных трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$, для которой расстояние от $x_0^{(i)}$ до $\mathcal{P}^-[0]$ оказывалось наименьшим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. Gusev M.I. Application of penalty function method to computation of reachable sets for control systems with state constraints // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1773. P. 050003-1–050003-9. doi: 10.1063/1.4964973.
5. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные схемы и конечноразностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
6. Построение множества разрешимости в задаче проводки самолета при ветровом возмущении / С.И. Кумков, В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 149–159.
7. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
8. Filippova T.F. Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1773. P. 100004-1–100004-10. doi: 10.1063/1.4964998.
9. Kostousova E.K. Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 2001. Vol. 14, no. 4. P. 267–310. doi: 10.1080/10556780108805805.
10. Jaulin L. Inner and outer set-membership state estimation // Reliable Computing. 2016. Vol. 22. P. 47–55.
11. Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках в задачах синтеза стратегий управления в линейных многошаговых системах // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2006. Вып. 9. С. 84–105.

⁵При варьировании δ во второй серии значений Ω “замечается” такая область, что, например, точку $x_0^{(5)} = (0.25, 0.6)^T$ захватить не удается.

12. **Костоусова Е.К.** О полиэдральном методе решения задач синтеза стратегий управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 153–167.
13. **Koustousova E.K.** On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques // IFIP Advances in Information and Communication Technology (IFIP AICT). 2014. Vol. 443. P. 170–180. doi: 10.1007/978-3-662-45504-3_16.
14. **Костоусова Е.К.** О внутренних полиэдральных оценках множеств достижимости линейных систем с фазовыми ограничениями // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. Вып. 5. С. 167–187.
15. **Важнецев А.Ю.** О внутренних эллипсоидальных аппроксимациях для задач синтеза управления при ограниченных координатах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 70–77.
16. **Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.** Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances // Automatica. 2011. Vol. 47, no. 7. P. 1414–1426. doi:10.1016/j.automatica.2011.02.009.
17. **Barmish B.R., Sankaran J.** The propagation of parametric uncertainty via polytopes // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. Vol. AC-24, no. 2. P. 346–349. doi: 10.1109/TAC.1979.1102011.
18. **Лисин Д.В., Филиппова Т.Ф.** Об оценивании траекторных трубок дифференциальных включений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 435–445.
19. **Schneider R.G.** Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. 490 p. doi: 10.1017/CBO9780511526282.
20. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. 210 с.

Костоусова Елена Кирилловна

Поступила 03.04.2017

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: kek@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. New York: Springer, 1988. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Kurzhanski A.B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*. Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. Gusev M.I. Application of penalty function method to computation of reachable sets for control systems with state constraints. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1773, pp. 050003-1–050003-9. doi: 10.1063/1.4964973.
5. Taras'yev A.M., Uspenskiy A.A., Ushakov V.N. Approximation schemas and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Systems Sci. Internat.*, 1995, Vol. 33, no. 6, pp. 127–139.
6. Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Construction of the solvability set in a problem of guiding an aircraft under wind disturbance. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, Suppl. 1, pp. S163–S174.
7. Chernousko F.L. *State estimation for dynamic systems*. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.
8. Filippova T.F. Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1773, pp. 100004-1–100004-10. doi: 10.1063/1.4964998.
9. Kostousova E.K. Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations. *Optimiz. Methods & Software*, 2001, vol. 14, no. 4, pp. 267–310. doi: 10.1080/10556780108805805.
10. Jaulin L. Inner and outer set-membership state estimation. *Reliable Computing*, 2016, vol. 22, pp. 47–55.
11. Kostousova E.K. On polyhedral estimates in problems of the synthesis of control strategies in linear multistep systems. *Algoritmy i programmnye sredstva parallelnykh vychislenii*. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2006, vol. 9, pp. 84–105. (in Russian).
12. Kostousova E.K. On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, Suppl. 1, pp. S140–S155. doi: 10.1134/S0081543816020127.

13. Kostousova E.K. On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques. *IFIP Advances in Information and Communication Technology (IFIP AICT)*, 2014, vol. 443, pp. 170–180. doi: 10.1007/978-3-662-45504-3_16.
14. Kostousova E.K. On internal polyhedral estimates of reachable sets of linear systems with state constraints. *Algoritmy i programmnye sredstva parallelnykh vychislenii*. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2001, vol. 5, pp. 167–187 (in Russian).
15. Vazhentsev A.Yu. On internal ellipsoidal approximations for problems of control synthesis with bounded coordinates. *J. Comput. Systems Sci. Internat.*, 2000, Vol. 39, no. 3, pp. 399–406.
16. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances. *Automatica*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1414–1426. doi:10.1016/j.automatica.2011.02.009.
17. Barmish B.R., Sankaran J. The propagation of parametric uncertainty via polytopes. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1979, vol. AC-24, no. 2., pp. 346–349. doi: 10.1109/TAC.1979.1102011.
18. Filippova T.F., Lisin D.V. On the estimation of trajectory tubes of differential inclusions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2000, vol. Suppl. 2, pp. S28–S37.
19. Schneider R.G. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993. 490 p. doi: 10.1017/CBO9780511526282.
20. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operatory i iteratsionnye protsessy feierovskogo tipa. Teoriya i prilozheniya* [Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2005, 210 p.

The paper was received by the Editorial Office on April 3, 2017.

Elena Kirillovna Kostousova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: kek@imm.uran.ru.