ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.972

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ ПОТОЧЕЧНО ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ[1]

А. А. Ковалевский

Рассмотрены последовательность выпуклых интегральных функционалов $F_s\colon W^{1,p}(\Omega_s)\to\mathbb{R}$ и последовательность слабо полунепрерывных снизу и, вообще говоря, не интегральных функционалов $G_s\colon W^{1,p}(\Omega_s)\to\mathbb{R}$, где $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$, и $p>1$. Наряду с этим рассмотрена последовательность замкнутых выпуклых множеств $V_s=\{v\in W^{1,p}(\Omega_s)\colon v\geqslant K_s(v)$ п.в. в $\Omega_s\}$, где K_s — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega_s)$ во множество всех функций, определенных на Ω_s. Установлены условия, при которых минимизанты и минимальные значения функционалов F_s+G_s на множествах V_s сходятся соответственно к минимизанту и минимальному значению некоторого функционала на множестве $V=\{v\in W^{1,p}(\Omega)\colon v\geqslant K(v)$ п.в. в $\Omega\}$, где K — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega)$ во множество всех функций, определенных на Ω. Эти условия включают, в частности, сильную связанность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, условие исчерпывания области Ω областями Ω_s, Γ-сходимость последовательности $\{F_s\}$ к некоторому функционалу $F\colon W^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$ и определенную сходимость последовательности $\{G_s\}$ к некоторому функционалу $G\colon W^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$. Предполагаются также выполненными определенные условия, характеризующие как внутренние свойства отображений K_s, так и их связь с отображением K. В частности, эти условия допускают изучение вариационных задач с односторонними переменными нерегулярными препятствиями и переменными ограничениями, сочетающими поточечную зависимость и функциональную зависимость интегрального вида.

Ключевые слова: переменные области, интегральный функционал, односторонние поточечно функциональные ограничения, минимизант, минимальное значение, Γ-сходимость, сильная связанность.

A. A. Kovalevsky. Variational problems with unilateral pointwise functional constraints in variable domains.

We consider a sequence of convex integral functionals $F_s\colon W^{1,p}(\Omega_s)\to\mathbb{R}$ and a sequence of weakly lower semicontinuous and, in general, non-integral functionals $G_s\colon W^{1,p}(\Omega_s)\to\mathbb{R}$, where $\{\Omega_s\}$ is a sequence of domains of $\mathbb{R}^n$ contained in a bounded domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ and $p>1$. Along with this, we consider a sequence of closed convex sets $V_s=\{v\in W^{1,p}(\Omega_s)\colon v\geqslant K_s(v)$ a.e. in $\Omega_s\}$, where K_s is a mapping of the space $W^{1,p}(\Omega_s)$ into the set of all functions defined on Ω_s. We establish conditions under which minimizers and minimum values of the functionals F_s+G_s on the sets V_s converge to a minimizer and the minimum value, respectively, of a central functional on the set $V=\{v\in W^{1,p}(\Omega)\colon v\geqslant K(v)$ a.e. in $\Omega\}$, where K is a mapping of the space $W^{1,p}(\Omega)$ into the set of all functions defined on Ω. These conditions include, in particular, the strong connectedness of the spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ with the space $W^{1,p}(\Omega)$, the exhaustion condition of the domain Ω by the domains Ω_s, the Γ-convergence of the sequence $\{F_s\}$ to a functional $F\colon W^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$, and a certain convergence of the sequence $\{G_s\}$ to a functional $G\colon W^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$. We also assume certain conditions that characterize both the internal properties of the mappings K_s and their relation to the mapping K. In particular, these conditions admit the study of variational problems with unilateral varying irregular obstacles and with varying constraints combining the pointwise dependence and the functional dependence of the integral form.

Keywords: variable domains, integral functional, unilateral pointwise functional constraints, minimizer, minimum value, Γ-convergence, strong connectedness.

MSC: 49J40, 49J45

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-133-150

[1]Работа выполнена в рамках комплексной программы ФНИ УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”), а также при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УРФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

Введение

В статье рассмотрены последовательность интегральных функционалов $F_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ с интегрантами, удовлетворяющими определенным условиям выпуклости, роста и коэрцитивности, и последовательность слабо полунепрерывных снизу и, вообще говоря, не интегральных функционалов $G_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, где $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), и $p > 1$. Наряду с этим рассмотрена последовательность замкнутых выпуклых множеств

$$V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s)\colon v \geqslant K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\}, \tag{0.1}$$

где K_s — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega_s)$ во множество всех функций, определенных на Ω_s. В работе установлен набор условий, обеспечивающих сходимость минимизантов и минимальных значений функционалов $F_s + G_s$ на множествах V_s соответственно к минимизанту и минимальному значению некоторого функционала на множестве $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon v \geqslant K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}$, где K — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega)$ во множество всех функций, определенных на Ω. Этот набор условий включает компактность вложения пространства $W^{1,p}(\Omega)$ в пространство $L^p(\Omega)$, сильную связанность последовательности пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, а также условие исчерпывания области Ω областями Ω_s. Кроме того, предполагаем определенное поведение функций, входящих в исходную двустороннюю оценку для интегрантов функционалов F_s. Полученный набор условий также включает Γ-сходимость последовательности $\{F_s\}$ к некоторому функционалу $F\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ и определенную сходимость последовательности $\{G_s\}$ к некоторому функционалу $G\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Наконец, предполагаются выполненными определенные условия, характеризующие как внутренние свойства отображений K_s, так и их связь с отображением K.

Среди упомянутых условий относительно объектов, вовлеченных в рассмотренные задачи, прежде всего отметим сильную связанность пространств Соболева и Γ-сходимость функционалов, которые играют первостепенную роль при исследовании поведения решений вариационных задач в переменных областях. Понятие сильной связанности соболевских пространств, используемое в настоящей работе и, например, в статье [1] по близкой тематике, восходит к работе [2], где было введено условие сильной связанности n-мерных областей, являющееся по существу прообразом указанного понятия. Относительно понятия Γ-сходимости функционалов с единой областью определения см., например, [3; 4]. В случае переменных областей различной структуры соответствующие понятия Γ-сходимости функционалов с переменной областью определения изучались, например, в [5–8]. Понятие Γ-сходимости функционалов, используемое в настоящей работе и статье [1], является частным случаем понятия Γ-сходимости, рассмотренного в [5] для функционалов, определенных на переменных пространствах Соболева произвольного натурального порядка.

Отметим также важность условия исчерпывания области Ω областями Ω_s. Оно заключается в том, что для любой возрастающей последовательности $\{m_j\} \subset \mathbb{N}$ объединение всех множеств Ω_{m_j} имеет полную меру в Ω. Это условие существенно, в частности, при исследовании сходимости решений вариационных задач с нерегулярными односторонними и двусторонними препятствиями в переменных областях (по этому поводу см., например, [1; 9]).

Отметим, наконец, что сходимость решений вариационных задач для интегральных функционалов и решений вариационных неравенств для эллиптических операторов с обычными односторонними ограничениями, т. е. ограничениями вида $v \geqslant \varphi_s$, изучалась, например, в работах [10–12] в случае фиксированной области и в работах [9; 13; 14] в случае переменных областей. Насколько нам известно, сходимость минимизантов и минимальных значений функционалов на множествах вида (0.1) с нетривиальными отображениями K_s ранее не изучалась.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 1 сформулированы необходимые определения и предположения. В разд. 2 изложены основные результаты статьи (теоремы 1 и 2). В разд. 3 дан ряд следствий теоремы 1. Они относятся к вариационным задачам с односторонними и, в частности, нерегулярными препятствиями и вариационным задачам с односторонними поточечными ограничениями, содержащими функционалы и, в частности, нерегулярные функции. По существу эти следствия предоставляют примеры выполнения всех требуемых условий относительно отображений K_s и K. В разд. 4 рассмотрены дополнительные примеры выполнения таких условий.

1. Определения и предположения

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $p > 1$. Пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω.

Легко видеть, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $v|_{\Omega_s} \in W^{1,p}(\Omega_s)$.

Определение 1. Если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение из $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{1,p}(\Omega_s)$ такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $q_s v = v|_{\Omega_s}$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s \colon W^{1,p}(\Omega_s) \to W^{1,p}(\Omega)$ такая, что:

(a) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;

(b) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $q_s(l_s v) = v$ п. в. в Ω_s.

Определение 3. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $I_s \colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, и пусть $I \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функционалу I, если выполняются следующие условия:

(a) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ существует последовательность $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и $I_s(w_s) \to I(v)$;

(b) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такой, что $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} I_s(v_s) \geqslant I(v)$.

Для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ обозначим через $\mathcal{H}(v)$ множество всех последовательностей $\{v_s\}$ таких, что:

(a) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$;

(b) $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$;

(c) $\sup\limits_{s\in\mathbb{N}} \|v_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$.

Легко видеть, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$, то $\{q_s v\} \in \mathcal{H}(v)$.

Перейдем к рассмотрению функционалов, для которых будет исследована сходимость их минимизантов и минимальных значений на множествах функций с односторонними поточечно функциональными ограничениями.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\mu_s \geqslant 0$ в Ω_s. Предположим, что последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \colon \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на Ω_s; для почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$; для почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1|\xi|^p - \mu_s(x) \leqslant f_s(x,\xi) \leqslant c_2|\xi|^p + \mu_s(x). \tag{1.1}$$

В силу предположений относительно функций f_s и μ_s для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ функция $f_s(x, \nabla v)$ суммируема на Ω_s.

Определение 4. Если $s \in \mathbb{N}$, то $F_s \colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $F_s(v) = \displaystyle\int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla v)\,dx$.

В силу условий относительно функций f_s для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал F_s является выпуклым и локально ограниченным. Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал F_s слабо полунепрерывен снизу.

Далее, пусть $c_3, c_4 > 0$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $G_s \colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство

$$G_s(v) \geqslant c_3 \|v\|^p_{L^p(\Omega_s)} - c_4. \tag{1.2}$$

Ясно, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $F_s + G_s$ слабо полунепрерывен снизу. Кроме того, в силу (1.1), (1.2) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ существуют положительные числа c_5 и c_6 такие, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем

$$(F_s + G_s)(v) \geqslant c_5 \|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega_s)} - c_6. \tag{1.3}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{F}(\Omega_s)$ множество всех функций $v \colon \Omega_s \to \mathbb{R}$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем отображение $K_s \colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathcal{F}(\Omega_s)$. Предположим, что выполняются следующие условия:

(A_1) существует последовательность $\psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что последовательность норм $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \geqslant K_s(\psi_s)$ п.в. в Ω_s;

(A_2) если $s \in \mathbb{N}$ и $v_j \to v$ сильно в $W^{1,p}(\Omega_s)$, то $K_s(v_j) \to K_s(v)$ п.в. в Ω_s;

(A_3) для любых $s \in \mathbb{N}$, $v, w \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $\tau \in [0,1]$ имеем

$$K_s((1-\tau)v + \tau w) \leqslant (1-\tau)K_s(v) + \tau K_s(w) \text{ п.в. в } \Omega_s.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) \colon v \geqslant K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\}$. Из условий (A_1)–(A_3) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ множество V_s непусто, замкнуто и выпукло.

В силу указанных свойств функционалов $F_s + G_s$ и множеств V_s и известных результатов о существовании точек минимума функционалов (см., например, [15, гл. 3]) для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в V_s, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве V_s.

2. Основные результаты

Обозначим через $\mathcal{F}(\Omega)$ множество всех функций $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Пусть $K \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$. Положим $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \colon v \geqslant K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}$.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

$(*_1)$ *вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ компактно*;

$(*_2)$ *последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$*;

$(*_3)$ *для любой возрастающей последовательности $\{m_j\} \subset \mathbb{N}$ имеем* $\operatorname{meas}\Bigl(\Omega \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{m_j}\Bigr) = 0$;

$(*_4)$ *для любой последовательности измеримых множеств $H_s \subset \Omega_s$ такой, что $\operatorname{meas} H_s \to 0$, имеем* $\displaystyle\int_{H_s} \mu_s \, dx \to 0$;

$(*_5)$ *существует функционал $F \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ такой, что последовательность $\{F_s\}$ Γ-сходится к функционалу F*;

$(*_6)$ *существует функционал $G \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$ имеем $G_s(v_s) \to G(v)$*;

$(*_7)$ *если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, то существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s \colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(v_s) \geqslant K(v) - \alpha_s$ п.в. в Ω_s*;

($*_8$) *если* $v \in W^{1,p}(\Omega)$ *и* $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, *то существуют последовательность функций* $\sigma_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *последовательность* $\{t_s\} \subset [0,+\infty)$, *последовательность* $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ *и число* $\bar{s} \in \mathbb{N}$ *такие, что* $t_s \to 0$, $\sup\limits_{s\in\mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$ *и для любого* $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \bar{s}$, *имеем* $K_s(v_s) \leqslant K(v) + t_s\sigma_s$ *п.в. в* Ω_s *и* $z_s - K_s(z_s) \geqslant \sigma_s$ *п.в. в* Ω_s.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s *— функция в* V_s, *минимизирующая функционал* $F_s + G_s$ *на множестве* V_s.

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $u \in V$ *такие, что справедливы следующие утверждения*:

(i) *функция* u *минимизирует функционал* $F + G$ *на множестве* V;

(ii) $\|u_{s_j} - q_{s_j}u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$;

(iii) $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F + G)(u)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно условию ($*_2$) существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to W^{1,p}(\Omega)$ такая, что последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена и справедлива импликация

$$s \in \mathbb{N}, \quad v \in W^{1,p}(\Omega_s) \Longrightarrow q_s(l_s v) = v \text{ п. в. в } \Omega_s. \tag{2.1}$$

Кроме того, ввиду условия (A_1) существует последовательность $\psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty, \tag{2.2}$$

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad \psi_s \in V_s. \tag{2.3}$$

В силу условия (1.1), неравенства (2.2) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ последовательность $\{F_s(\psi_s)\}$ ограничена.

Покажем,что последовательность $\{G_s(\psi_s)\}$ ограничена. Действительно, предположим, что последовательность $\{G_s(\psi_s)\}$ не ограничена. Тогда существует возрастающая последовательность $\{\tilde{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$|G_{\tilde{s}_k}(\psi_{\tilde{s}_k})| \to +\infty. \tag{2.4}$$

В силу ограниченности последовательности норм $\|l_s\|$ и неравенства (2.2) последовательность $\{l_{\tilde{s}_k}\psi_{\tilde{s}_k}\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда ввиду рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega)$ и условия ($*_1$) существуют возрастающая последовательность $\{\bar{s}_j\} \subset \{\tilde{s}_k\}$ и функция $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что $l_{\bar{s}_j}\psi_{\bar{s}_j} \to \psi$ сильно в $L^p(\Omega)$. Отсюда и из (2.1) вытекает, что

$$\|\psi_{\bar{s}_j} - q_{\bar{s}_j}\psi\|_{L^p(\Omega_{\bar{s}_j})} \to 0. \tag{2.5}$$

Определим последовательность $\{\bar{\psi}_s\}$ следующим образом:

$$\bar{\psi}_s = \begin{cases} \psi_s, & \text{если } s = \bar{s}_j \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}, \\ q_s\psi, & \text{если } s \neq \bar{s}_j \text{ для любого } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{\psi}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, ввиду (2.5) имеем $\|\bar{\psi}_s - q_s\psi\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Теперь, учитывая неравенство (2.2), заключаем, что $\{\bar{\psi}_s\} \in \mathcal{H}(\psi)$. Отсюда и из условия ($*_6$) следует, что $G_s(\bar{\psi}_s) \to G(\psi)$. Тогда $G_{\bar{s}_j}(\psi_{\bar{s}_j}) \to G(\psi)$. Поэтому последовательность $\{G_{\bar{s}_j}(\psi_{\bar{s}_j})\}$ ограничена, что противоречит (2.4). Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{G_s(\psi_s)\}$ ограничена.

В силу ограниченности последовательностей $\{F_s(\psi_s)\}$ и $\{G_s(\psi_s)\}$ существует число $M > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad (F_s + G_s)(\psi_s) \leqslant M. \tag{2.6}$$

Покажем, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Так как функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве V_s, то ввиду (2.3) имеем

$$(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F_s + G_s)(\psi_s). \tag{2.7}$$

Кроме того, в силу (1.3) имеем

$$c_5 \|u_s\|^p_{W^{1,p}(\Omega_s)} \leqslant (F_s + G_s)(u_s) + c_6. \tag{2.8}$$

Из (2.6)–(2.8) выводим неравенство $\|u_s\|^p_{W^{1,p}(\Omega_s)} \leqslant (M + c_6)/c_5$, позволяющее заключить, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена.

Из ограниченности последовательностей норм $\|l_s\|$ и $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ вытекает, что последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому ввиду рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega)$ и условия $(*_1)$ существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$l_{s_j} u_{s_j} \to u \ \text{ сильно в } \ L^p(\Omega), \tag{2.9}$$

$$l_{s_j} u_{s_j} \to u \ \text{ п. в. в } \ \Omega. \tag{2.10}$$

В силу (2.1) и (2.9) имеем

$$\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0. \tag{2.11}$$

Покажем, что $u \in V$. Определим последовательность $\{\bar{u}_s\}$ следующим образом:

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s, & \text{если } s = s_j \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}, \\ q_s u, & \text{если } s \neq s_j \text{ для любого } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{u}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, ввиду (2.11) имеем

$$\|\bar{u}_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0. \tag{2.12}$$

Теперь, учитывая ограниченность последовательности норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$, заключаем, что $\{\bar{u}_s\} \in \mathcal{H}(u)$. Тогда в силу условия $(*_7)$ существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s \colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω, и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(\bar{u}_s) \geqslant K(u) - \alpha_s$ п.в. в Ω_s. Следовательно, существует множество $E^{(1)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N},\ x \in \Omega_s \setminus E^{(1)} \Longrightarrow K_s(\bar{u}_s)(x) \geqslant K(u)(x) - \alpha_s(x). \tag{2.13}$$

Кроме того, так как для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $u_s \in V_s$, то существует множество $E^{(2)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N},\ x \in \Omega_s \setminus E^{(2)} \Longrightarrow u_s(x) \geqslant K_s(u_s)(x). \tag{2.14}$$

Заметим также, что в силу (2.1) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s(l_s u_s) = u_s$ п.в. в Ω_s. Следовательно, существует множество $E^{(3)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N},\ x \in \Omega_s \setminus E^{(3)} \Longrightarrow (l_s u_s)(x) = u_s(x). \tag{2.15}$$

Вдобавок ввиду (2.10) и того, что $\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω, существует множество $E^{(4)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$x \in \Omega \setminus E^{(4)} \Longrightarrow (l_{s_j} u_{s_j})(x) \to u(x), \quad \alpha_{s_j}(x) \to 0. \tag{2.16}$$

Выделим еще одно множество меры нуль. Для любого $r \in \mathbb{N}$ положим $\tilde{E}_r = \Omega \setminus \bigcup\limits_{j=r}^{\infty} \Omega_{s_j}$.

В силу условия $(*_3)$ для любого $r \in \mathbb{N}$ имеем $\operatorname{meas} \tilde{E}_r = 0$. Положим $E^{(5)} = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} \tilde{E}_r$. Ясно, что $\operatorname{meas} E^{(5)} = 0$. Положим $\tilde{E} = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(5)}$, и пусть $x \in \Omega \setminus \tilde{E}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $x \in \Omega \setminus E^{(4)}$, в силу (2.16) существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$j \in \mathbb{N}, \quad j \geqslant j_0 \Longrightarrow u(x) \geqslant (l_{s_j} u_{s_j})(x) - \varepsilon,\ \alpha_{s_j}(x) \leqslant \varepsilon. \tag{2.17}$$

Так как $x \in \Omega \setminus E^{(5)}$, то

$$x \in \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \Omega_{s_j}.$$

Следовательно, существует $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$, такое, что $x \in \Omega_{s_j}$. Поэтому справедливо включение $x \in \Omega_{s_j} \setminus (E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup E^{(3)})$. Тогда из (2.13)–(2.15) вытекает, что $(l_{s_j} u_{s_j})(x) \geqslant K(u)(x) - \alpha_{s_j}(x)$. Отсюда и из (2.17), учитывая произвольность ε, получаем неравенство $u(x) \geqslant K(u)(x)$. Это позволяет заключить, что $u \geqslant K(u)$ п.в. в Ω. Значит, $u \in V$.

Далее, ввиду (2.12) и условия $(*_5)$ справедливо неравенство $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(\bar{u}_s) \geqslant F(u)$, а в силу включения $\{\bar{u}_s\} \in \mathcal{H}(u)$ и условия $(*_6)$ имеем $G_s(\bar{u}_s) \to G(u)$. Следовательно,

$$\liminf_{j\to\infty} (F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \geqslant (F+G)(u). \tag{2.18}$$

Покажем, что функция u минимизирует функционал $F+G$ на множестве V. Пусть $v \in V$. В силу условия $(*_5)$ существует последовательность $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что

$$\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0, \tag{2.19}$$

$$F_s(w_s) \to F(v). \tag{2.20}$$

Учитывая ограниченность последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$, из условия (1.1) и предельных соотношений (2.19) и (2.20) выводим, что

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \|w_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty. \tag{2.21}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\lambda_s = (\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} + 1/s)^{1/2}$. В силу (2.19) имеем $\lambda_s \to 0$. Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $v_s = \max\{w_s + \lambda_s, q_s v\}$, $E_s = \{w_s \leqslant q_s v - \lambda_s\}$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \leqslant \|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} + \lambda_s (\operatorname{meas}\Omega)^{1/p},$$

$$\sum_{i=1}^n \|D_i v_s\|^p_{L^p(\Omega_s)} \leqslant \sum_{i=1}^n \|D_i w_s\|^p_{L^p(\Omega_s)} + \sum_{i=1}^n \|D_i v\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Учитывая (2.19) и (2.21), из этих неравенств выводим, что

$$\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0, \quad \sup_{s\in\mathbb{N}} \|v_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty. \tag{2.22}$$

Таким образом, $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Тогда ввиду условия $(*_8)$ существуют последовательность функций $\sigma_s \colon \Omega \to \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$, последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и число $\bar{s} \in \mathbb{N}$ такие, что

$$t_s \to 0, \tag{2.23}$$

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty, \tag{2.24}$$

$$s \in \mathbb{N},\ s \geqslant \bar{s} \Longrightarrow K_s(v_s) \leqslant K(v) + t_s \sigma_s \ \text{п.в. в}\ \Omega_s,\ z_s - K_s(z_s) \geqslant \sigma_s \ \text{п.в. в}\ \Omega_s. \tag{2.25}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\bar{v}_s = \dfrac{1}{1+t_s}\, v_s + \dfrac{t_s}{1+t_s}\, z_s$. Ясно, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{v}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Отсюда и из (2.22)–(2.24) вытекает, что

$$\{\bar{v}_s\} \in \mathcal{H}(v). \tag{2.26}$$

Далее, пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \bar{s}$. Докажем, что $\bar{v}_s \in V_s$. Действительно, в силу условия (A$_3$) имеем

$$K_s(\bar{v}_s) \leqslant \frac{1}{1+t_s}\, K_s(v_s) + \frac{t_s}{1+t_s}\, K_s(z_s) \text{ п.в. в } \Omega_s. \tag{2.27}$$

Используя включение $v \in V$, очевидное неравенство $v_s \geqslant q_s v$ в Ω_s и (2.25), находим, что $K_s(v_s) - v_s \leqslant t_s\sigma_s$ п.в. в Ω_s и $K_s(z_s) - z_s \leqslant -\sigma_s$ п.в. в Ω_s. Отсюда и из (2.27) вытекает, что $\bar{v}_s \geqslant K_s(\bar{v}_s)$ п.в. в Ω_s. Следовательно, $\bar{v}_s \in V_s$. Тогда, учитывая, что функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве V_s, получаем неравенство $(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F_s + G_s)(\bar{v}_s)$. Теперь можно заключить, что

$$\limsup_{s\to\infty}\,(F_s + G_s)(u_s) \leqslant \limsup_{s\to\infty}\,(F_s + G_s)(\bar{v}_s). \tag{2.28}$$

Оценим сверху правую часть неравенства (2.28). Пусть $s \in \mathbb{N}$. Ввиду выпуклости функционала F_s имеем

$$F_s(\bar{v}_s) \leqslant \frac{1}{1+t_s}\, F_s(v_s) + \frac{t_s}{1+t_s}\, F_s(z_s). \tag{2.29}$$

Легко видеть, что

$$F_s(v_s) = F_s(w_s) - \int\limits_{E_s} f_s(x, \nabla w_s)dx + \int\limits_{E_s} f_s(x, \nabla(q_s v))dx.$$

Отсюда, используя условие (1.1), получаем

$$F_s(v_s) \leqslant F_s(w_s) + 2\int\limits_{E_s} \mu_s\, dx + c_2 \int\limits_{E_s} |\nabla v|^p\, dx.$$

Из этого неравенства и неравенства (2.29) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$F_s(\bar{v}_s) \leqslant \frac{1}{1+t_s}\, F_s(w_s) + t_s|F_s(z_s)| + 2\int\limits_{E_s} \mu_s\, dx + c_2 \int\limits_{E_s} |\nabla v|^p\, dx. \tag{2.30}$$

В силу (2.20) и (2.23) имеем $(1+t_s)^{-1}F_s(w_s) \to F(v)$. Ввиду (1.1), (2.24) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ последовательность $\{F_s(z_s)\}$ ограничена. Поэтому в силу (2.23) имеем $t_s|F_s(z_s)| \to 0$. Поскольку $\lambda_s \to 0$, имеем $\operatorname{meas} E_s \to 0$. Тогда ввиду условия $(*_4)$ имеем $\displaystyle\int_{E_s} \mu_s\, dx \to 0$. Ясно также, что $\displaystyle\int_{E_s} |\nabla v|^p\, dx \to 0$. Из (2.30) и указанных предельных соотношений вытекает неравенство

$$\limsup_{s\to\infty} F_s(\bar{v}_s) \leqslant F(v). \tag{2.31}$$

Кроме того, в силу (2.26) и условия $(*_6)$ имеем $G_s(\bar{v}_s) \to G(v)$. Отсюда и из (2.31) следует неравенство $\limsup\limits_{s\to\infty}\,(F_s + G_s)(\bar{v}_s) \leqslant (F+G)(v)$, которое вместе с неравенством (2.28) приводит к заключению, что

$$\limsup_{s\to\infty}\,(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F+G)(v). \tag{2.32}$$

Из (2.18) и (2.32) вытекает, что функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве V.

Поскольку в неравенстве (2.32) функция $v \in V$ произвольна и $u \in V$, имеем

$$\limsup_{s\to\infty}\,(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F+G)(u). \tag{2.33}$$

Отсюда и из (2.18) выводим, что $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F+G)(u)$.

Таким образом, установлено, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V$ такие, что справедливы утверждения (i)–(iii) заключения теоремы. Тем самым доказательство теоремы завершено. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Ясно, что если выполняются условия теоремы 1, то множество V непусто.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, *причем функционал G является строго выпуклым. Пусть также выполняется следующее условие*:

$(*)$ *если $v \in W^{1,p}(\Omega)$, то существует последовательность неотрицательных функций $\bar\alpha_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\bar\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(q_s v) \leqslant K(v) + \bar\alpha_s$ п.в. в Ω_s.*

Тогда существует единственная функция $u \in V$, минимизирующая функционал $F+G$ на множестве V, и справедливы следующие предельные соотношения:

$$\|u_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0, \tag{2.34}$$

$$(F_s + G_s)(u_s) \to (F+G)(u). \tag{2.35}$$

Доказательство. Сначала покажем, что множество V выпукло. Пусть $v, w \in V$ и $\tau \in [0,1]$. В силу условия $(*)$ существует последовательность неотрицательных функций $\bar\alpha_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\bar\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$K_s(q_s v) \leqslant K(v) + \bar\alpha_s \ \text{ п.в. в } \Omega_s, \quad K_s(q_s w) \leqslant K(w) + \bar\alpha_s \ \text{ п.в. в } \Omega_s. \tag{2.36}$$

Положим $z = (1-\tau)v + \tau w$. Ввиду условия (A_3) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$K_s(q_s z) \leqslant (1-\tau)K_s(q_s v) + \tau K_s(q_s w) \ \text{ п.в. в } \Omega_s. \tag{2.37}$$

Кроме того, поскольку $\{q_s z\} \in \mathcal{H}(z)$, в силу условия $(*_7)$ теоремы 1 существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(q_s z) \geqslant K(z) - \alpha_s$ п.в. в Ω_s. Поэтому ввиду (2.36) и (2.37) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K(z) \leqslant (1-\tau)K(v) + \tau K(w) + \alpha_s + \bar\alpha_s$ п.в. в Ω_s. Следовательно, существует множество $E' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N},\ x \in \Omega_s \setminus E' \Longrightarrow K(z)(x) \leqslant ((1-\tau)K(v) + \tau K(w))(x) + (\alpha_s + \bar\alpha_s)(x). \tag{2.38}$$

Вдобавок, поскольку $\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω и $\bar\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω, существует множество $E'' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E'' \qquad (\alpha_s + \bar\alpha_s)(x) \to 0. \tag{2.39}$$

Для любого $r \in \mathbb{N}$ положим $\hat E_r = \Omega \setminus \bigcup\limits_{s=r}^{\infty} \Omega_s$. В силу условия $(*_3)$ теоремы 1 для любого $r \in \mathbb{N}$ имеем $\operatorname{meas} \hat E_r = 0$. Положим $E''' = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} \hat E_r$. Ясно, что $\operatorname{meas} E''' = 0$. Пусть $x \in \Omega \setminus (E' \cup E'' \cup E''')$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x \in \Omega \setminus E''$, то в силу (2.39) существует $s' \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s'$, имеем

$$(\alpha_s + \bar\alpha_s)(x) \leqslant \varepsilon. \tag{2.40}$$

Поскольку $x \in \Omega \setminus E'''$, существует $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s'$, такое, что $x \in \Omega_s$. Значит, $x \in \Omega_s \setminus E'$. Тогда в силу (2.38) и (2.40) имеем $K(z)(x) \leqslant ((1-\tau)K(v) + \tau K(w))(x) + \varepsilon$. Поэтому, учитывая произвольность $\varepsilon > 0$ и произвольность $x \in \Omega \setminus (E' \cup E'' \cup E''')$, заключаем, что

$$K(z) \leqslant (1-\tau)K(v) + \tau K(w) \ \text{ п.в. в } \Omega. \tag{2.41}$$

Поскольку $v, w \in V$, имеем $K(v) \leqslant v$ п.в. в Ω и $K(w) \leqslant w$ п.в. в Ω. Отсюда и из (2.41) вытекает, что $K(z) \leqslant z$ п.в. в Ω. Следовательно, $(1-\tau)v + \tau w \in V$. Значит, множество V выпукло.

Далее, ввиду выпуклости функционалов F_s и условия $(*_5)$ теоремы 1 функционал F является выпуклым (по этому поводу см., например, доказательство теоремы 3.2 в [1]). Из выпуклости функционала F и строгой выпуклости функционала G вытекает, что функционал $F+G$ строго выпуклый.

В силу теоремы 1 существует функция $u \in V$, минимизирующая функционал $F+G$ на множестве V, причем справедливо неравенство (2.33). Стандартным образом используя выпуклость множества V и строгую выпуклость функционала $F+G$, устанавливаем, что u — единственная функция в V, минимизирующая функционал $F+G$ на множестве V (естественно, здесь единственность подразумевается с точностью до множества меры нуль).

Докажем справедливость предельного соотношения (2.34). Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\tau_s = \|u_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)}$. Предположим, что последовательность $\{\tau_s\}$ не сходится к нулю. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что $\{\tau_{m_k}\} \subset [\varepsilon, +\infty)$. Согласно условию $(*_2)$ теоремы 1 существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to W^{1,p}(\Omega)$ со свойствами (a) и (b) из определения 2. В соответствии с изложенным в доказательстве теоремы 1 последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда, рассуждая таким же образом, как и в соответствующем месте доказательства теоремы 1, находим, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{m_k\}$ и функция $u' \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что $l_{s_j} u_{s_j} \to u'$ сильно в $L^p(\Omega)$ и $l_{s_j} u_{s_j} \to u'$ п.в. в Ω. После этого аналогично изложенному в доказательстве теоремы 1 устанавливаем, что $u' \in V$ и функция u' минимизирует функционал $F+G$ на множестве V. Тогда, учитывая, что u — единственная функция в V, минимизирующая функционал $F+G$ на множестве V, заключаем, что $u = u'$ п.в. в Ω. Отсюда и из сильной сходимости $\{l_{s_j} u_{s_j}\}$ к u' в $L^p(\Omega)$ вытекает, что $\tau_{s_j} \to 0$. Но это противоречит включению $\{\tau_{m_k}\} \subset [\varepsilon, +\infty)$. Полученное противоречие доказывает, что предельное соотношение (2.34) справедливо. В силу этого соотношения и условий $(*_5)$ и $(*_6)$ теоремы 1 имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} (F_s + G_s)(u_s) \geqslant (F+G)(u)$. Отсюда и из неравенства (2.33) выводим предельное соотношение (2.35). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Если выполняется условие $(*_8)$ теоремы 1, причем соответствующая последовательность функций σ_s имеет поточечную мажоранту $\sigma\colon \Omega \to \mathbb{R}$, то, очевидно, выполняется и условие $(*)$ теоремы 2.

Относительно выполнения условий $(*_1)$–$(*_6)$ теоремы 1 и строгой выпуклости функционала G см. [1]. Примеры выполнения исходных предположений относительно множеств K_s, условий $(*_7)$ и $(*_8)$ теоремы 1 и условия $(*)$ теоремы 2 рассмотрим в следующем разделе.

3. Следствия теоремы 1

3.1. Вариационные задачи с односторонними препятствиями

Пусть $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s\colon \Omega_s \to \mathbb{R}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(a_1) существует функция $\bar\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ такая, что $\bar\varphi \geqslant \varphi$ п.в. в Ω;

(a_2) существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \geqslant \varphi - \alpha_s$ п.в. в Ω_s;

(a_3) существуют последовательности $\{\sigma_s\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ и $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ такие, что последовательность $\{\sigma_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$, $t_s \to 0$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \leqslant \varphi + t_s \sigma_s$ п.в. в Ω_s.

Положим $V(\varphi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon v \geqslant \varphi \text{ п.в. в } \Omega\}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$V_s(\varphi_s) = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s)\colon v \geqslant \varphi_s \text{ п.в. в } \Omega_s\}.$$

Из условия (a_1) вытекает, что множество $V(\varphi)$ непусто. Более того, множество $V(\varphi)$ выпукло и замкнуто в $W^{1,p}(\Omega)$. В силу условий (a_1) и (a_3) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s\bar\varphi + t_s q_s \sigma_s \in V_s(\varphi_s)$. Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ множество $V_s(\varphi_s)$ непусто. Более того, для любого $s \in \mathbb{N}$ множество $V_s(\varphi_s)$ выпукло и замкнуто в $W^{1,p}(\Omega_s)$.

Ввиду неравенства (1.3), слабой полунепрерывности снизу функционалов $F_s + G_s$ и указанных свойств множеств $V_s(\varphi_s)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в $V_s(\varphi_s)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi_s)$.

Следствие 1. *Пусть дополнительно к условиям* (a$_1$)–(a$_3$) *выполняются условия* $(*_1)$–$(*_6)$ *теоремы* 1. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ u_s — *функция в* $V_s(\varphi_s)$, *минимизирующая функционал* $F_s + G_s$ *на множестве* $V_s(\varphi_s)$. *Тогда существуют возрастающая последовательность* $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $u \in V(\varphi)$ *такие, что справедливы следующие утверждения: функция* u *минимизирует функционал* $F + G$ *на множестве* $V(\varphi)$; $\|u_{s_j} - q_{s_j}u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$; $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F + G)(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \varphi_s$. Положив для любого $s \in \mathbb{N}$ $\psi_s = q_s\bar{\varphi} + t_s q_s \sigma_s$, находим, что последовательность норм $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена. Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \geqslant K_s(\psi_s)$ п.в. в Ω_s. Значит, условие (A$_1$) из разд. 1 выполняется. Выполнение условий (A$_2$) и (A$_3$) из разд. 1 очевидно.

Далее, пусть $K\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \varphi$.

Из условия (a$_2$) следует, что выполняется условие $(*_7)$ теоремы 1. Проверим выполнение условия $(*_8)$ этой теоремы. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Пусть t — мажоранта последовательности $\{t_s\}$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $z_s = q_s\bar{\varphi} + (t+1)|q_s\sigma_s|$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. При этом $\sup\limits_{s\in\mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Зафиксировав $s \in \mathbb{N}$, в силу условий (a$_1$) и (a$_3$) имеем $\varphi_s \leqslant \varphi + t_s\sigma_s$ п.в. в Ω_s и $z_s - \varphi_s \geqslant \sigma_s$ п.в. в Ω_s. Учитывая определение отображений K_s и K, из этих соотношений выводим, что $K_s(v_s) \leqslant K(v) + t_s\sigma_s$ п.в. в Ω_s и $z_s - K_s(z_s) \geqslant \sigma_s$ п.в. в Ω_s. Значит, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

Учитывая определение множеств $V_s(\varphi_s)$ и $V(\varphi)$, а также отображений K_s и K, получаем, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad V_s(\varphi_s) = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s)\colon v \geqslant K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\},$$

$$V(\varphi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon v \geqslant K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Теперь, применяя теорему 1, получаем требуемое заключение. □

З а м е ч а н и е 3. Ясно, что условие (a$_3$) выполняется, если выполняется следующее условие:

(a$_3'$) существуют функция $\sigma \in W^{1,p}(\Omega)$ и последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ такие, что $t_s \to 0$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \leqslant \varphi + t_s\sigma$ п.в. в Ω_s.

При этом заметим, что если в последнем условии требование $\sigma \in W^{1,p}(\Omega)$ заменить на требование $\sigma \in W^{1,r}(\Omega)$ для любого $r \in (1,p)$, то полученное условие, вообще говоря, не будет гарантировать непустоту множеств $V_s(\varphi_s)$. Действительно, предположим, что Ω есть открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ и $p < n$. Предположим также, что все области Ω_s совпадают с Ω. Пусть w — функция на Ω такая, что $w(0) = 0$ и для любого $x \in \Omega\setminus\{0\}$ имеем $w(x) = |x|^{-(n-p)/p}$. Тогда для любого $r \in (1,p)$ имеем $w \in W^{1,r}(\Omega)$. При этом $w \notin W^{1,p}(\Omega)$. Предположим, что $\varphi = 0$ в Ω, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s = s^{-1}w$. Ясно, что условия (a$_1$) и (a$_2$) выполняются. Кроме того, положив $\sigma = w$, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \leqslant \varphi + s^{-1}\sigma$ п.в. в Ω_s. Значит, выполняется аналог условия (a$_3'$) с тем отличием от этого условия, что функция σ принадлежит пространству $W^{1,r}(\Omega)$ с любым $r \in (1,p)$, но не принадлежит пространству $W^{1,p}(\Omega)$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Предположим, что $V_s(\varphi_s) \neq \varnothing$. Взяв $v \in V_s(\varphi_s)$, находим, что $|w|^{np/(n-p)} \leqslant |sv|^{np/(n-p)}$ п.в. в Ω. Отсюда, учитывая включение $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^{np/(n-p)}(\Omega)$, выводим, что $w \in L^{np/(n-p)}(\Omega)$. Но из определения функции w следует, что $w \notin L^{np/(n-p)}(\Omega)$. Полученное противоречие доказывает, что $V_s(\varphi_s) = \varnothing$. Таким образом, для любого $s \in \mathbb{N}$

множество $V_s(\varphi_s)$ пусто. Установленный факт также показывает, что в рассмотренном случае условие (a$_3$) не выполняется.

Наконец, заметим, что если выполняется условие (a$'_3$), то для отображений K_s и K, рассмотренных в доказательстве следствия 1, выполняется условие $(*)$ теоремы 2.

Приведем простой пример выполнения условий (a$_1$)–(a$_3$).

П р и м е р 1. Пусть $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — ограниченная сверху функция, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\alpha_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция. Предположим, что $\alpha_s \to 0$ п.в. в Ω. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\varphi_s = (\varphi - \alpha_s)|_{\Omega_s}$. Легко видеть, что функции φ и φ_s удовлетворяют условиям (a$_1$)–(a$_3$). Ясно также, что выполняется условие (a$'_3$).

3.2. Вариационные задачи с односторонними поточечными ограничениями, содержащими функционалы

Пусть $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi \geqslant 0$ в Ω, и пусть $\Phi\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем функционал $\Phi_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(b$_1$) существуют числа $\beta, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$ и функция $z \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что $\beta > \bar{\beta}$, $z \geqslant \Phi(z) + \beta$ п.в. в Ω и $(1-\varphi)z + \bar{\beta}\varphi \geqslant 0$ п.в. в Ω;

(b$_2$) существует последовательность $\psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что последовательность норм $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \geqslant \Phi_s(\psi_s)\varphi$ п.в. в Ω_s;

(b$_3$) для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал Φ_s является выпуклым и непрерывным;

(b$_4$) если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, то $\Phi_s(v_s) \to \Phi(v)$.

Положим $U = \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon v \geqslant \Phi(v)\varphi$ п.в. в $\Omega\}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$U_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s)\colon v \geqslant \Phi_s(v)\varphi \text{ п.в. в } \Omega_s\}.$$

В силу условия (b$_1$) имеем $z \geqslant \Phi(z)\varphi$ п.в. в Ω. Следовательно, $z \in U$. Поэтому множество U непусто. Вдобавок из условия (b$_2$) вытекает, что для любого $s \in \mathbb{N}$ множество U_s непусто. Заметим также, что ввиду условий (b$_1$) и (b$_4$) для достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s z \in U_s$. Кроме того, из условия (b$_3$) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ множество U_s выпукло и замкнуто в $W^{1,p}(\Omega_s)$.

Ввиду неравенства (1.3), слабой полунепрерывности снизу функционалов $F_s + G_s$ и указанных свойств множеств U_s для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в U_s, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s.

Следствие 2. *Пусть дополнительно к условиям* (b$_1$)–(b$_4$) *выполняются условия* $(*_1)$–$(*_6)$ *теоремы* 1. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ u_s — *функция в* U_s, *минимизирующая функционал* $F_s + G_s$ *на множестве* U_s. *Тогда существуют возрастающая последовательность* $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $u \in U$ *такие, что справедливы следующие утверждения*: *функция* u *минимизирует функционал* $F + G$ *на множестве* U; $\|u_{s_j} - q_{s_j}u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$; $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F+G)(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \Phi_s(v)\varphi|_{\Omega_s}$. Из условий (b$_2$) и (b$_3$) следует, что выполняются условия (A$_1$)–(A$_3$) из разд. 1.

Далее, пусть $K\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \Phi(v)\varphi$.

Проверим выполнение условий $(*_7)$ и $(*_8)$ теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\alpha_s = |\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|\varphi$. В силу условия (b$_4$) имеем $\alpha_s \to 0$ в Ω. Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(v_s) \geqslant K(v) - \alpha_s$ в Ω_s. Значит, условие $(*_7)$ теоремы 1 выполняется.

Пусть снова $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = \frac{\beta - \bar{\beta}}{2}\,\varphi, \quad t_s = \frac{2}{\beta - \bar{\beta}}|\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|, \quad z_s = q_s z.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу условия ($\mathrm{b}_4$) имеем $t_s \to 0$. Ясно также, что $\{z_s\} \in \mathcal{H}(z)$. Поэтому из условия ($\mathrm{b}_4$) следует, что $\Phi_s(z_s) \to \Phi(z)$. Тогда существует $\bar{s} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \bar{s}$, имеем

$$|\Phi_s(z_s) - \Phi(z)| \leqslant \frac{\beta - \bar{\beta}}{2}. \tag{3.1}$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \bar{s}$. Для произвольного $x \in \Omega_s$ имеем

$$K_s(v_s)(x) = \Phi_s(v_s)\varphi(x) \leqslant \Phi(v)\varphi(x) + |\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|\varphi(x) = K(v)(x) + t_s\sigma_s(x).$$

Значит, $K_s(v_s) \leqslant K(v) + t_s\sigma_s$ в Ω_s. В силу условия (b_1) существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E$ имеем

$$z(x) \geqslant \Phi(z) + \beta, \quad (1 - \varphi(x))z(x) + \bar{\beta}\varphi(x) \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Пусть $x \in \Omega_s \setminus E$. Ясно, что

$$z_s(x) - K_s(z_s)(x) = z(x) - \Phi_s(z_s)\varphi(x) = (1 - \varphi(x))z(x) + (z(x) - \Phi(z))\varphi(x) - (\Phi_s(z_s) - \Phi(z))\varphi(x).$$

Отсюда, используя (3.1) и (3.2), получаем

$$z_s(x) - K_s(z_s)(x) \geqslant (1 - \varphi(x))z(x) + \bar{\beta}\varphi(x) + \frac{\beta - \bar{\beta}}{2}\,\varphi(x) \geqslant \sigma_s(x).$$

Значит, $z_s - K_s(z_s) \geqslant \sigma_s$ п.в. в Ω_s. Таким образом, условие ($*_8$) теоремы 1 выполняется.

Учитывая определение множеств U_s и U, а также отображений K_s и K, получаем, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad U_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s)\colon v \geqslant K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\},$$

$$U = \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon v \geqslant K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Теперь, применяя теорему 1, получаем требуемое заключение. □

З а м е ч а н и е 4. Из условия (b_4) вытекает, что отображения K_s и K, рассмотренные в доказательстве следствия 2, удовлетворяют условию ($*$) теоремы 2.

Теперь сделаем следующие изменения в предположениях, предшествующих определению множеств U и U_s. Допустим, что вместо условий (b_1) и (b_2) выполняются следующие условия:

(b'_1) $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$;

(b'_2) существует $r > 1$ такое, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $t \in (0, 1)$ имеем $\Phi_s(tv) \leqslant t^r\Phi_s(v)$.

По-прежнему считаем, что условия (b_3) и (b_4) выполняются.

В силу условий (b'_2) и (b_4) для любых $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $t \in (0, 1)$ имеем $\Phi(tv) \leqslant t^r\Phi(v)$. Используя это, с учетом условия (b'_1) устанавливаем, что при некотором $\lambda_* > 0$ справедливо включение $\lambda_*\varphi \in U$. Значит, множество U непусто. В силу условий (b'_1) и (b_4) имеем $\Phi_s(q_s\varphi) \to \Phi(\varphi)$. Поэтому существует число $M > 1$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad \Phi_s(q_s\varphi) \leqslant M^{r-1}. \tag{3.3}$$

Зафиксируем $t_* \in (0, 1/M)$. Используя (3.3) и условия (b'_1) и (b'_2), находим, что для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливо включение $t_*q_s\varphi \in U_s$. Значит, для любого $s \in \mathbb{N}$ множество U_s непусто. Ясно, что заключения о выпуклости и замкнутости множеств U_s и о существовании минимизантов функционалов $F_s + G_s$ на множествах U_s по-прежнему остаются справедливыми.

Следствие 3. *Пусть дополнительно к условиям* (b_1'), (b_2'), (b_3) *и* (b_4) *выполняются условия* $(*_1)$–$(*_6)$ *теоремы* 1. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ u_s *— функция в* U_s, *минимизирующая функционал* $F_s + G_s$ *на множестве* U_s. *Тогда существуют возрастающая последовательность* $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $u \in U$ *такие, что справедливы следующие утверждения: функция* u *минимизирует функционал* $F + G$ *на множестве* U; $\|u_{s_j} - q_{s_j}u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$; $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F+G)(u)$.

Доказательство. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \Phi_s(v)q_s\varphi$. Из включений $t_*q_s\varphi \in U_s$ следует, что выполняется условие (A_1) из разд. 1, а из условия (b_3) вытекает, что выполняются условия (A_2) и (A_3) из разд. 1.

Далее, пусть $K\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \Phi(v)\varphi$.

В силу условия (b_4) отображения K_s и K удовлетворяют условию $(*_7)$ теоремы 1. Это проверяется так же, как и в доказательстве следствия 2.

Проверим выполнение условия $(*_8)$ теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = t_*(1-(Mt_*)^{r-1})\varphi, \quad t_s = \frac{1}{t_*(1-(Mt_*)^{r-1})}|\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|, \quad z_s = t_*q_s\varphi.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0,+\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу условия (b_4) имеем $t_s \to 0$. Ясно также, что $\sup\limits_{s\in\mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $K_s(v_s) \leqslant K(v) + t_s\sigma_s$ в Ω_s. Кроме того, в силу условия (b_2') имеем $\Phi_s(z_s) \leqslant t_*^r\Phi_s(q_s\varphi)$. Тогда $K_s(z_s) \leqslant t_*^{r-1}\Phi_s(q_s\varphi)z_s$ в Ω_s. Отсюда и из (3.3) вытекает, что $z_s - K_s(z_s) \geqslant \sigma_s$ в Ω_s. Таким образом, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

Теперь, применяя теорему 1, получаем требуемое заключение. □

Рассмотрим примеры выполнения условий (b_1)–(b_4).

Пример 2. Предположим, что выполняется следующее условие:

$(**)$ существует неотрицательная ограниченная измеримая функция $b\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$ имеем $\operatorname{meas}(Q \cap \Omega_s) \to \int_Q b\,dx$.

Пусть $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ в Ω, и пусть $\Phi\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $\Phi(v) = \int_\Omega b|v|^p\,dx$. Пусть $\lambda \geqslant 0$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\Phi_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $\Phi_s(v) = \int_{\Omega_s} |v|^p\,dx + \dfrac{\lambda}{s}\int_{\Omega_s} |\nabla v|^p\,dx$. Зафиксируем положительное число β_0 такое, что

$$\beta_0^{p-1}\int\limits_\Omega b\,dx \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

и положим $\beta = \beta_0/2$ и $\bar\beta = 0$. Кроме того, пусть z — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $z(x) = \beta_0$. Ясно, что $\beta > \bar\beta$ и $z \in W^{1,p}(\Omega)$. В силу неравенства (3.4) имеем $z \geqslant \Phi(z) + \beta$ в Ω, а ввиду того, что $\varphi \leqslant 1$ в Ω, имеем $(1-\varphi)z + \bar\beta\varphi \geqslant 0$ в Ω. Значит, условие (b_1) выполняется. Условие (b_2) также выполняется. Для того чтобы убедиться в этом, в качестве соответствующих функций ψ_s достаточно взять функции, принимающие только нулевое значение в соответствующих областях. Выполнение условия (b_3) очевидно, а выполнение условия (b_4) является следствием условия $(**)$.

Пример 3. Предположим, что выполняется условие $(**)$ из примера 2. Пусть $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, причем $\varphi \geqslant 0$ в Ω. Пусть $\beta > 0$, и пусть $\Phi\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $\Phi(v) = \int_\Omega b|v|^p\,dx - \beta$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\Phi_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $\Phi_s(v) = \int_{\Omega_s} |v|^p\,dx - \beta$. Положим $\bar\beta = 0$, и пусть z — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $z(x) = 0$. Ясно, что $z \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\beta > \bar\beta$. Кроме того, $z = \Phi(z) + \beta$ в Ω и $(1-\varphi)z + \bar\beta\varphi = 0$ в Ω. Значит, условие (b_1) выполняется. Условие (b_2) также выполняется. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что последовательность норм $\|q_s z\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s z \geqslant \Phi_s(q_s z)\varphi$ в Ω_s. Как и в примере 2, выполнение условия (b_3) очевидно, а выполнение условия (b_4) является следствием условия $(**)$.

З а м е ч а н и е 5. Легко видеть, что функционалы Φ_s, рассмотренные в примерах 2 и 3, удовлетворяют условию (b'_2).

4. Дополнительные примеры

Приведем два примера отображений K_s и K, удовлетворяющих условиям (A_1)–(A_3) из разд. 1 и условиям $(*_7)$ и $(*_8)$ теоремы 1, без формулировки соответствующих следствий теоремы 1.

П р и м е р 4. Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть для любого $i \in \{1,\dots,m\}$ имеем неотрицательную функцию $\varphi^{(i)} \in W^{1,p}(\Omega)$, функционал $\Phi^{(i)}\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ и последовательность функционалов $\Phi_s^{(i)}\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(c_1) существует $r > 1$ такое, что для любых $i \in \{1,\dots,m\}$, $s \in \mathbb{N}$, $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $t \in (0,1)$ имеем $\Phi_s^{(i)}(tv) \leqslant t^r \Phi_s^{(i)}(v)$;

(c_2) для любых $i \in \{1,\dots,m\}$ и $s \in \mathbb{N}$ функционал $\Phi_s^{(i)}$ является выпуклым и непрерывным;

(c_3) если $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$ и $i \in \{1,\dots,m\}$, то $\Phi_s^{(i)}(v_s) \to \Phi^{(i)}(v)$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \sum_{i=1}^m \Phi_s^{(i)}(v) q_s \varphi^{(i)}$.

Пусть $K\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \sum_{i=1}^m \Phi^{(i)}(v)\varphi^{(i)}$.

Положим $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi^{(i)}$. В силу условий ($\mathrm{c}_1$) и ($\mathrm{c}_3$) найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\lambda_0 q_s\varphi \geqslant K_s(\lambda_0 q_s \varphi)$ в Ω_s. Поэтому условие (A_1) из разд. 1 выполняется. Кроме того, из условия (c_2) вытекает, что выполняются условия (A_2) и (A_3) из разд. 1.

Далее, в силу условия (c_3) выполняется условие $(*_7)$ теоремы 1. Проверим выполнение условия $(*_8)$ теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Поскольку $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{q_s\varphi\} \in \mathcal{H}(\varphi)$, в силу условия ($\mathrm{c}_3$) для любого $i \in \{1,\dots,m\}$ имеем $\Phi_s^{(i)}(q_s\varphi) \to \Phi^{(i)}(\varphi)$. Следовательно, существует $M > 1$ такое, что для любых $i \in \{1,\dots,m\}$ и $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Phi_s^{(i)}(q_s\varphi) \leqslant M^{r-1}. \tag{4.1}$$

Зафиксируем $\lambda \in (0, 1/M)$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = (1 - (\lambda M)^{r-1})\lambda\varphi, \qquad t_s = \frac{1}{\lambda(1-(\lambda M)^{r-1})} \sum_{i=1}^m |\Phi_s^{(i)}(v_s) - \Phi^{(i)}(v)|, \qquad z_s = \lambda q_s \varphi.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s\colon \Omega \to \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0,+\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу условия ($\mathrm{c}_3$) имеем $t_s \to 0$. Ясно также, что $\sup\limits_{s\in\mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $K_s(v_s) \leqslant K(v) + t_s\sigma_s$ в Ω_s. Теперь оценим функцию $K_s(z_s)$. Пусть $i \in \{1,\dots,m\}$. В силу условия (c_1) и (4.1) имеем

$\Phi_s^{(i)}(z_s) \leqslant \lambda^r \Phi_s^{(i)}(q_s\varphi) \leqslant \lambda^r M^{r-1}$. Поэтому $\Phi_s^{(i)}(z_s) q_s \varphi^{(i)} \leqslant (\lambda M)^{r-1} \lambda q_s \varphi^{(i)}$ в Ω_s. Тогда, суммируя по i от 1 до m, находим, что $K_s(z_s) \leqslant (\lambda M)^{r-1} \lambda q_s \varphi$ в Ω_s. Следовательно, $z_s - K_s(z_s) \geqslant \sigma_s$ в Ω_s. Значит, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

П р и м е р 5. Предположим, что выполняется условие $(**)$ из примера 2. Пусть $c, C \in \mathbb{R}$, $1 < c \leqslant C$, и пусть α — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $c \leqslant \alpha(x) \leqslant C$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s \colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и любого $y \in \Omega_s$ имеем $K_s(v)(y) = \|v\|^{\alpha(y)}_{L^p(\Omega_s)}$. Пусть $K \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любого $y \in \Omega$ имеем $K(v)(y) = \|b^{1/p}v\|^{\alpha(y)}_{L^p(\Omega)}$.

Легко проверить, что для отображений K_s выполняются условия (A_1)–(A_3) из разд. 1. Кроме того, используя условие $(**)$ из примера 2, нетрудно показать, что выполняется условие $(*_7)$ теоремы 1. Проверим выполнение условия $(*_8)$ теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Положим $\omega = (\operatorname{meas}\Omega)^{1/p}$ и зафиксируем число λ такое, что $0 < \lambda < \min\{\omega^{-1}, \omega^{-c/(c-1)}\}$. Ясно, что $\lambda^{c-1}\omega^c < 1$. Пусть $z \colon \Omega \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $z(x) = \lambda$. Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\sigma_s = (1 - \lambda^{c-1}\omega^c) z$,

$$t_s = \frac{C}{\lambda(1 - \lambda^{c-1}\omega^c)} \left\{1 + \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} + \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}\right\}^C \left| \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} - \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)} \right|, \qquad z_s = q_s z.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s \colon \Omega \to \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу включения $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$ и условия $(**)$ из примера 2 имеем $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} \to \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}$. Поэтому $t_s \to 0$. Ясно также, что $\sup\limits_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Зафиксировав $y \in \Omega_s$, получаем

$$\begin{aligned}
K_s(v_s)(y) &= K(v)(y) + \|v_s\|^{\alpha(y)}_{L^p(\Omega_s)} - \|b^{1/p}v\|^{\alpha(y)}_{L^p(\Omega)} \\
&\leqslant K(v)(y) + \alpha(y)\left\{\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} + \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}\right\}^{\alpha(y)-1} \left| \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} - \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)} \right| \\
&\leqslant K(v)(y) + t_s \sigma_s(y), \\
&\quad K_s(z_s)(y) \leqslant (\lambda\omega)^{\alpha(y)} \leqslant (\lambda\omega)^c = z_s(y) - \sigma_s(y).
\end{aligned}$$

Следовательно, $K_s(v_s) \leqslant K(v) + t_s\sigma_s$ в Ω_s и $z_s - K_s(z_s) \geqslant \sigma_s$ в Ω_s. Значит, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kovalevsky A.A.** On the convergence of solutions to bilateral problems with the zero lower constraint and an arbitrary upper constraint in variable domains // Nonlinear Anal. 2016. Vol. 147. P. 63–79. doi: 10.1016/j.na.2016.09.001 .
2. **Хруслов Е.Я.** Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 604–621.
3. **Жиков В.В.** Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. математическая 1983. Т. 47, № 5. С. 961–998.
4. **Dal Maso G.** An introduction to Γ-convergence. Boston: Birkhäuser, 1993. 352 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0327-8 .
5. **Ковалевский А.А.** О необходимых и достаточных условиях Г-сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейн. граничн. задачи. 1992. Вып. 4. С. 29–39.
6. **Ковалевский А.А.** О Г-сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, № 5. С. 614–628.
7. **Pankratov L.** Γ-convergence of nonlinear functionals in thin reticulated structures // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2002. Vol. 335, no. 3. P. 315–320. doi: 10.1016/S1631-073X(02)02468-8 .
8. **Amaziane B., Goncharenko M., Pankratov L.** Γ_D-convergence for a class of quasilinear elliptic equations in thin structures // Math. Methods Appl. Sci. 2005. Vol. 28, no. 15. P. 1847–1865. doi: 10.1002/mma.644 .

9. **Kovalevsky A.A., Rudakova O.A.** Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // Differ. Equ. Appl. 2009. Vol. 1, no. 4. P. 517–559. doi: 10.7153/dea-01-29 .
10. **Dal Maso G.** Limits of minimum problems for general integral functionals with unilateral obstacles // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). 1983. Vol. 74. P. 55–61.
11. **Boccardo L., Murat F.** Homogenization of nonlinear unilateral problems // Composite Media and Homogenization Theory. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 5. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 81–105. doi: 10.1007/978-1-4684-6787-1_6 .
12. **Сандраков Г.В.** Осреднение вариационных неравенств и уравнений, определенных псевдомонотонным оператором // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 1. С. 67–100.
13. **Ковалевский А.А.** О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Современный анализ и его приложения. Киев: Наукова думка, 1989. С. 62–70.
14. **Ковалевский А.А.** G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58, № 3. С. 3–35.
15. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.

Ковалевский Александр Альбертович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
Институт естественных наук и математики
Уральского федерального университета, г. Екатеринбург
e-mail: alexkvl71@mail.ru

Поступила 06.01.2017

REFERENCES

1. Kovalevsky A.A. On the convergence of solutions to bilateral problems with the zero lower constraint and an arbitrary upper constraint in variable domains. *Nonlinear Anal.*, 2016, vol. 147, pp. 63–79. doi: 10.1016/j.na.2016.09.001 .
2. Khruslov E.Ya., The asymptotic behavior of solutions of the second boundary value problem under fragmentation of the boundary of the domain. *Math. USSR-Sb.*, 1979, vol. 35, no. 2, pp. 266–282. doi: 10.1070/SM1979v035n02ABEH001474 .
3. Zhikov V.V. Questions of convergence, duality and averaging for functionals of the calculus of variations. *Math. USSR-Izv.*, 1984, vol. 23, no. 2. pp. 243–276. doi: 10.1070/IM1984v023n02ABEH001466 .
4. Dal Maso G. *An introduction to* Γ*-convergence.* Boston: Birkhäuser, 1993. 352 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0327-8 .
5. Kovalevskii A.A. On necessary and sufficient conditions for the Γ-convergence of integral functionals with different domains of definition. *Nelinein. Granichnye Zadachi*, 1992, vol. 4, pp. 29–39 (in Russian).
6. Kovalevskii A.A. On the Γ-convergence of integral functionals defined on Sobolev weakly connected spaces. *Ukrainian Math. J.*, 1996, vol. 48, no. 5, pp. 683–698. doi:10.1007/BF02384235 .
7. Pankratov L. Γ-convergence of nonlinear functionals in thin reticulated structures. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2002, vol. 335, no. 3, pp. 315–320. doi: 10.1016/S1631-073X(02)02468-8 .
8. Amaziane B., Goncharenko M., Pankratov L. Γ_D-convergence for a class of quasilinear elliptic equations in thin structures. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2005, vol. 28, no. 15, pp. 1847–1865. doi: 10.1002/mma.644 .
9. Kovalevsky A.A., Rudakova O.A. Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains. *Differ. Equ. Appl.*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 517–559. doi: 10.7153/dea-01-29 .
10. Dal Maso G. Limits of minimum problems for general integral functionals with unilateral obstacles. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), 1983, vol. 74, pp. 55–61.
11. Boccardo L., Murat F. Homogenization of nonlinear unilateral problems. *Composite Media and Homogenization Theory. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* 5. Boston: Birkhäuser, 1991, pp. 81–105. doi: 10.1007/978-1-4684-6787-1_6 .
12. Sandrakov G.V., Homogenization of variational inequalities and equations defined by pseudomonotone operators. *Sb. Math.*, 2008, vol. 199, no. 1, pp. 67–98. doi: 10.1070/SM2008v199n01ABEH003911 .

13. Kovalevskii A.A. Some problems connected with the problem of averaging variational problems for functionals with a variable domain. *Sovremennyi analiz i ego prilozheniya*, Kiev, Naukova dumka, 1989, pp. 62–70 (in Russian).
14. Kovalevskii A.A., G-convergence and homogenization of nonlinear elliptic operators in divergence form with variable domain. *Russ. Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, vol. 44, no. 3, pp. 431–460. doi: 10.1070/IM1995v044n03ABEH001607 .
15. Vainberg M.M. *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, New York: Wiley, 1974. 368 p. Original Russian text published in *Variatsionnyi metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineinykh uravnenii*, Moskow: Nauka Publ, 1972, 416 p.

The paper was received by the Editorial Office on January 6, 2017.

Aleksandr Al'bertovich Kovalevsky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alexkvl71@mail.ru .