

УДК 517.928, 517.937, 517.958

**АВТОРЕЗОНАНС В МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА ТЕРАГЕРЦЕВЫХ ВОЛН<sup>1</sup>****О. М. Киселев, В. Ю. Новокшенов**

Изучается модель генератора электромагнитных волн, основанного на системе связанных джозефсоновских контактов. Она представляет собой цепочку связанных уравнений синус-Гордон на фазы электрического поля в контактах под действием диссипации и постоянной накачки. Выясняются условия резонансного возбуждения поля при различных параметрах системы. Оказывается, что в цепочке уравнений синус-Гордон возникает авторезонанс с определенной зависимостью частоты от величины джозефсоновского тока накачки. В работе строится асимптотика решения указанной цепочки при большой резонансной частоте. Асимптотика имеет линейные по времени главные члены для фаз электрического поля, что характерно для авторезонанса в системе связанных осцилляторов. Ключевую роль здесь играет уравнение главного резонанса, которое задает режим резонансного возбуждения цепочки. Это уравнение представляет собой уравнение математического маятника с периодически изменяющейся массой. Подробно исследуется класс решений такого уравнения, выделяются классы сепаратрисных решений, отвечающих нулевой скорости маятника. Доказывается, что существует сепаратрисное решение типа  $\pi$ -кинка, на котором реализуется режим авторезонанса в исходной цепочке уравнений синус-Гордон.

Ключевые слова: терагерцевый диапазон электромагнитных волн, джозефсоновский контакт, уравнение синус-Гордон, решение типа кинка, авторезонанс, уравнение главного резонанса, асимптотические разложения.

**O. M. Kiselev, V. Yu. Novokshenov. Autoresonance in a model of a terahertz wave generator.**

We study a model of an electromagnetic wave generator based on a system of coupled Josephson junctions. The model is a chain of coupled sine-Gordon equations for the phases of the electric field in the junctions under dissipation and constant pumping. We find conditions for a resonant field excitation under various parameters of the system. It turns out that the chain of sine-Gordon equations evokes an autoresonance with a certain dependence of the frequency on the magnitude of the Josephson pumping current. We construct an asymptotic expansion for a solution of the chain under a large resonant frequency. The leading terms of the expansion for the phases of the electric field are linear in time, which is typical of an autoresonance in a system of coupled oscillators. The key role here is played by the main resonance equation, which defines the mode of the resonant excitation of the chain. This equation is the equation of a mathematical pendulum with periodically changing mass. A class of solutions of this equation is studied in detail, and classes of separatrix solutions corresponding to the zero velocity of the pendulum are described. It is proved that there exists a separatrix  $\pi$ -kink type solution on which the autoresonance mode is realized in the original chain of sine-Gordon equations.

Keywords: terahertz band of electromagnetic waves, Josephson junction, sine-Gordon system, kink solution, autoresonance, main resonance equation, asymptotic expansions.

MSC: 78M35

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-117-132

**Введение**

Терагерцевый диапазон электромагнитных волн ( $\sim 10^{12}$  Гц, длина волны 0.1–1 мм) слабо покрывается современными электронными и оптическими устройствами. В то же время этот диапазон важен для медицинских, контртеррористических, научных и других приложений ввиду высокой проникаемости в диэлектриках при малой мощности излучения. Открытый недавно источник излучения перестраиваемой частоты на основе стопки контактов Джозефсона может стать эффективным для этих приложений [1]. Изученные образцы, состоящие из сотен параллельных сверхпроводящих слоев, демонстрируют синхронизацию частот отдельных джозефсоновских контактов. Более того, мощность излучения растет как квадрат от числа слоев. Предложенная математическая модель данного устройства изучена слабо. Она

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-11-01004.

представляет собой цепочку уравнений синус-Гордон, где каждое уравнение линейно связано с ближайшими соседями, а также имеет члены, отвечающие диссипации и накачке энергии [2]:

$$\ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = (1 - \alpha \Delta_2) \left( \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \sin \varphi_n + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - j_{ext} \right), \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_n(t, -L)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n(t, L)}{\partial x} = 0, \quad -L < x < L, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (0.2)$$

где  $\varphi_n$  — фаза электрического поля в  $n$ -м слое,  $\alpha$  — числовой параметр, определяющий взаимодействие электрических полей в соседних слоях,  $\omega_{res} = \pi \ell / L$  — резонансная частота излучения,  $j_{ext}$  — внешний ток накачки,  $\varepsilon \ll 1$  — малая диссипация,  $\Delta_2$  — вторая разность,  $\Delta_2 \varphi_n \equiv \varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}$ . Необходимо найти начальные условия, а также значения параметров накачки и диссипации, обеспечивающие синхронизацию волновых мод в большинстве узлов цепочки. Эксперименты показывают, что подобные режимы достаточно редки, в общем положении синхронизация не наступает, что ведет к резкому падению мощности излучения [1; 3]. Традиционные механизмы синхронизации [4] посредством среднего поля, захвата фазы хаотических колебаний или образования кластеров с водителем ритма, по-видимому, неприменимы к данной системе. В силу специфики уравнений возможно образование устойчивых мод типа кинков или бризеров в каждом узле и их согласование по фазе. Контролем этого согласования здесь является вольт-амперная характеристика, или зависимость  $j_{ext}$  от частоты излучения. Эта зависимость носит типично резонансный характер, т. е. наблюдается частота, на которой затраты тока для генерации излучения максимальны. Обычно автофазировка — захват в резонанс — возникает для узкого и нетривиально устроенного множества фаз нелинейных волн. Объяснение резонансной зависимости параметров системы с автофазировкой составляет предмет настоящей работы.

В нелинейной цепочке (0.1), (0.2) имеются большие и малые параметры, которыми следует воспользоваться для построения теории возмущений. Оказывается, что при больших частотах  $\omega_{res}$  цепочка асимптотически “расщепляется” и существует режим линейного по времени роста  $\varphi_n$ . Мы исследуем этот режим захвата в резонанс, выводя зависимость тока  $j_{ext}$  от частоты  $\omega$ . Необходимым условием резонанса служит зависимость поля  $\varphi_n$  от пространственных переменных  $n$  и  $x$ . Показано, что в главном члене асимптотики необходимо выполнение “уравнения главного резонанса”. Здесь оно представляет собой уравнение математического маятника с периодически изменяющейся массой. В разд. 1 мы выводим асимптотику цепочки (0.1), (0.2) и устанавливаем существование решений уравнения главного резонанса. Затем изучаем его сепаратрисные решения и выделяем те из них, которые отвечают условиям авторезонанса.

В разд. 2 мы исследуем другую систему уравнений типа синус-Гордон, демонстрирующую эффект авторезонанса. Она представляет собой континуальный предел в системе (0.1), когда поле  $\varphi_n$  усредняется по слоям, т. е. берутся сумма и разность между соседними слоями (см. [5; 6]):

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} + \varphi_{2m}), \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} - \varphi_{2m}),$$

В результате возникает система из двух уравнений типа синус-Гордон с малым трением и связанными правыми частями:

$$\frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} = -\sin \varphi_+ \cos \varphi_- + j_{ext}, \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} = -\sin \varphi_- \cos \varphi_+,$$

Оказывается, что эта модель содержит все эффекты, присущие реалистической модели (0.1), (0.2). В ней мы также изучаем уравнение главного резонанса и устанавливаем класс его приближенных решений.

Используя свойства скалярной модели, рассмотренной в (0.3), мы обосновываем резонансную асимптотику для решений краевой задачи (0.1), (0.2) в разд. 3. Ключевую роль здесь играют структуры решений уравнения главного резонанса, в которых переход между положениями равновесия происходит в малой области. Тем самым выявляются аналитические свойства решений типа кинков, обнаруженных численно в работах [2; 6; 7].

## 1. Анализ дискретной модели

### 1.1. Асимптотика резонансного решения

В дискретной цепочке (0.1)

$$\ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = (1 - \alpha \Delta_2) \left( \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \sin \varphi_n + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - j_{ext} \right)$$

будем предполагать дисперсию малой:  $\varepsilon \ll 1$ , а частоту  $\omega \gg 1$  большой и близкой к резонансу  $\omega = O(\pi \ell / L)$ . Следуя [2], будем искать авторезонансное решение в виде

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + \sum_{m=2}^{\infty} A_m \cos \frac{\pi x \ell m}{L} \sin(\omega t + \phi_m) + O(\omega^{-2}). \quad (1.1)$$

Здесь первые два слагаемых удовлетворяют невозмущенному волновому уравнению и граничным условиям (0.1)  $\partial_x \varphi_n|_{x=0, L} = 0$ , а величины  $A$ ,  $\phi$  и  $u(x)$  будут определены ниже из учета нелинейности. Подставляя анзац (1.1) в цепочку уравнений (0.1), воспользуемся производящим соотношением для функций Бесселя [8]:  $\exp \left[ \frac{z(s - s^{-1})}{2} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) s^k$ . Оно позволяет при  $s = e^{i(\omega t + \phi)}$  выразить экспоненту от высокочастотных гармоник (1.1) в виде ряда по тем же гармоникам:

$$\exp [i(\omega t + (-1)^n u(x) + z \sin(\omega t + \phi))] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) \exp [i((k+1)\omega t + k\phi + (-1)^n u(x))].$$

Заметим также, что разностный оператор Лапласа  $\Delta_2 s(n) = s(n+1) - 2s(n) + s(n-1)$  действует на анзац (1.1) следующим образом:

$$\Delta_2 f(x, t) = 0,$$

$$\Delta_2 \sin [f(x, t) + (-1)^n u(x)] = (-1)^n 4 \sin u(x) \cos f(x, t).$$

Тогда, полагая

$$z = A \cos \frac{\pi x \ell}{L}, \quad \psi = \omega t + \phi, \quad \nu = \frac{\pi \ell}{L},$$

получим из цепочки (0.1) уравнения для главных членов асимптотики (1.1):

$$-\frac{\pi^2 \ell^2}{L^2} z \sin \psi = -z \omega^2 \sin \psi + \varepsilon \omega - j_{ext} + z \omega \cos \psi$$

$$+ [-J_{-2}(z) \sin(\psi + \phi) - J_{-1}(z) \sin \phi + J_0(z) \sin(\psi - \phi)] \cos u,$$

$$u'' = [J_{-2}(z) \cos(\psi + \phi) + J_{-1}(z) \cos \phi + J_0(z) \cos(\psi - \phi)] (-4\alpha) \sin u.$$

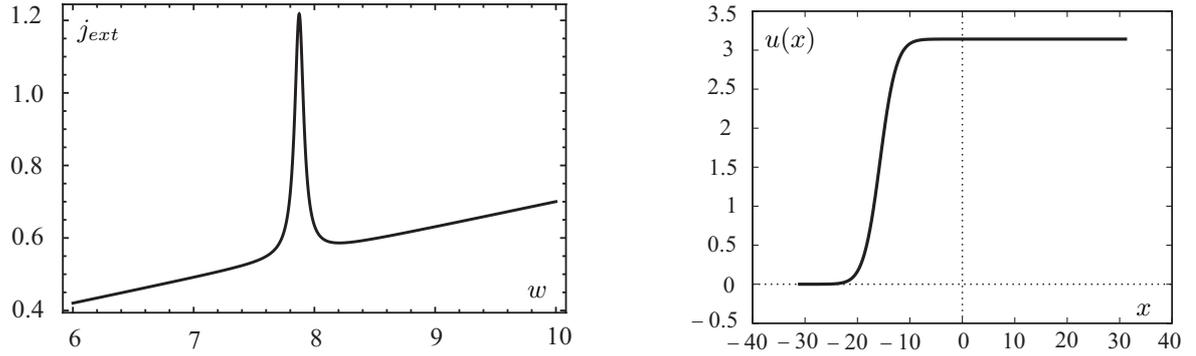


Рис. 1. Зависимость (1.7) джозефсоновского тока от частоты (слева) и решение уравнения (1.2)  $u(x)$  из теоремы 1 (справа).

Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых гармониках  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$ , получим

$$u'' = -4\alpha J_{-1}(A \cos \nu x) \cos \phi \sin u, \quad (1.2)$$

$$j_{ext} = \varepsilon\omega - \frac{\sin \phi}{2L} \int_{-L}^L J_{-1}(A \cos \nu x) \cos u(x) dx, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon\omega A = \frac{\sin \phi}{L} \int_{-L}^L [J_{-2}(A \cos \nu x) + J_0(A \cos \nu x)] \cos \nu x \cos u(x) dx, \quad (1.4)$$

$$A(\omega^2 - \nu^2) = \frac{\cos \phi}{L} \int_{-L}^L [-J_{-2}(A \cos \nu x) + J_0(A \cos \nu x)] \cos \nu x \cos u(x) dx. \quad (1.5)$$

Здесь постоянные в левых частях уравнений (1.3)–(1.5) определены как коэффициенты Фурье при  $\cos \nu x$  в разложении правых частей в ряд  $\sum s_m \cos m\nu x$ . Воспользовавшись рекуррентным соотношением для функций Бесселя  $zJ_{n-1}(z) + zJ_{n+1}(z) = 2nJ_n(z)$ , легко привести интеграл в правой части (1.4) к интегралу (1.3). Это дает явное выражение для джозефсоновского тока

$$j_{ext} = \varepsilon\omega \left(1 + \frac{A^2}{4}\right). \quad (1.6)$$

При малой амплитуде  $A \ll 1$  это выражение можно преобразовать в зависимость тока от частоты  $\omega$  (см. рис. 1):

$$j_{ext} = \varepsilon\omega \left[1 + \frac{I^2}{(\omega^2 - \pi^2 \ell^2 / L^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}\right], \quad (1.7)$$

где  $I = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x \ell}{L} \cos u(x) dx$ . Остальные коэффициенты ряда (1.1) находятся из рекуррентных соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned} A_m \varepsilon \omega &= \frac{\sin \phi_m}{L} \int_{-L}^L \left[ J_{-2} \left( A \cos \nu x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right. \\ &\left. + J_0 \left( A \cos \nu x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right] \cos \nu x \cos u(x) dx, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
 A_m (\omega^2 - \nu^2 m^2) &= \frac{\cos \phi m}{L} \int_{-L}^L \left[ -J_{-2} \left( A \cos \nu x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_0 \left( A \cos \nu m x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right] \cos \nu m x \cos u(x) dx.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отметим, что правые части (1.8) и (1.9) ограничены по  $\omega$  и  $m$ , поскольку там фигурирует усреднение осциллирующих ограниченных функций. С другой стороны, вблизи резонансной частоты  $\omega_{res} = \nu = \pi \ell / L$  множитель при  $A_m$  в левой части (1.9)  $\omega^2 - \nu^2 m^2 = O(\omega^2)$ , так что все амплитуды  $A_m = O(\omega^{-2})$  при  $m = 2, 3, \dots$ .

Тем самым доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Система уравнений (0.1) имеет формальное асимптотическое решение

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + O(\omega^{-2}), \quad \omega \rightarrow \infty, \tag{1.10}$$

при  $\omega - \pi \ell / L = O(1)$ , где величины  $A$ ,  $\phi$  и функция  $u(x)$  удовлетворяют соотношениям (1.2)–(1.5).

**З а м е ч а н и е.** В выражениях для джозефсоновского тока (1.6) и (1.7) стоит множитель  $\varepsilon$ , имеющий смысл малой диссипации. Отсюда можно сделать вывод, что при нулевой диссипации  $\varepsilon = 0$  ток становится равным нулю и джозефсоновское излучение пропадает. Однако в данной модели подобная ситуация невозможна. Здесь величина  $\varepsilon$  отвечает сопротивлению поперечного тока (flux-flow resistivity) через стопку контактов. В работе [9] изучена величина этого сопротивления в реальных образцах и показано, что она не обращается в нуль при любой сколь угодно малой температуре сверхпроводящих контактов. Этот факт связан со структурой джозефсоновских вихрей в рассматриваемых сверхпроводящих керамиках.

## 1.2. Уравнение главного резонанса

Для того чтобы главный член асимптотики (1.10) удовлетворял граничным условиям (0.2), достаточно потребовать  $u'(-L) = u'(L) = 0$ . Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (1.2) с этими граничными условиями на предмет устойчивости его решений относительно малых возмущений.

Для определенности будем полагать  $\alpha \cos \phi > 0$ , а также перепишем уравнение (1.2) в новых переменных

$$u(x) = U(z), \quad z = x\nu, \quad \epsilon = \frac{\nu}{2\sqrt{\alpha \cos \phi}},$$

где  $\epsilon$  будем считать малым, так что  $0 < \epsilon \ll 1$  и  $\nu L = \pi \ell = O(1)$ . Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$\epsilon^2 U'' = -J_{-1}(A \cos z) \sin U, \tag{1.11}$$

где  $J_n(x)$  — функция Бесселя со значком  $n = -1$ .

Уравнение (1.11) — это уравнение математического маятника с медленно меняющейся периодической массой или силой натяжения. Для изучения свойств уравнений с медленно меняющимися параметрами удобно использовать метод двух масштабов [10]. Здесь быстрый масштаб изменений решения определяется исходя из коэффициента второй производной, этот масштаб связан с переменной  $\zeta = z/\epsilon$ , медленные изменения решения связаны с изменением параметра в уравнении — с переменной  $z$ . Для наглядности и формализации рассуждений удобно переписать уравнение (1.11) в терминах двух масштабов:

$$\partial_\zeta^2 U + J_{-1}(A \cos z) \sin U = -2\epsilon \partial_\zeta \partial_z U - \epsilon^2 \partial_z^2 U. \tag{1.12}$$

Локальное поведение решения уравнения (1.12) определяется быстрой переменной и, соответственно решением невозмущенного уравнения (1.12). Невозмущенное уравнение получается формальным переходом к  $\epsilon = 0$  [11].

Рассмотрим решения невозмущенного (при  $\epsilon = 0$ ) уравнения (1.12). Если  $J_1(A \cos(z)) > 0$ , тогда  $U = (2n + 1)\pi$  — неустойчивые состояния равновесия типа седло, а  $u = 2n\pi$  — центры. При изменении знака  $J_1(A \cos(\epsilon z)) < 0$  седла и центры меняются местами.

На интервалах знакоопределенности  $J_1(A \cos(z))$  можно классифицировать решения с нулевыми значениями производной на границе  $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$ . Покажем, что это решения с главным членом — эллиптической функцией с медленно меняющимися параметрами. Кроме того, это решения типа сепаратрис, траектории которых на фазовой плоскости отделяют колебательные решения маятника от вращательных. Такие сепаратрисы начинаются и заканчиваются в окрестностях неустойчивых положений равновесия — седел.

**Теорема 2.** *В ситуации общего положения асимптотическое решение краевой задачи  $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$  для уравнения (1.11) имеет вид модулированной эллиптической функции в окрестностях  $z = -\pi$  и  $z = \pi$ .*

**Доказательство.** Для решения краевой задачи с условием Неймана  $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$  воспользуемся следующим приемом. Построим асимптотику двухпараметрического решения для уравнения (1.11). Затем покажем, что можно подобрать параметры так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Для построения асимптотики осциллирующих решений уравнения (1.11) на интервале знакоопределенности коэффициента  $J_{-1}(A \cos z)$  воспользуемся асимптотической подстановкой, использованной Г. А. Кузмаком [12] и в дальнейшем обобщенной во многих работах по нелинейной динамике, например, в [13; 14]:

$$U = U_0(S, z, \epsilon), \quad S = \frac{\Omega(z)}{\epsilon} + \Phi(z, \epsilon).$$

Уравнение (1.11) примет вид

$$\begin{aligned} & (\Omega')^2 \partial_S^2 U + \epsilon (2\Omega'' \partial_S U + 2\Omega' \Phi' \partial_S^2 U + \Omega' \partial_S \partial_z U) \\ & + \epsilon^2 ((\Phi')^2 \partial_S^2 U + 2\Phi'' \partial_S U + \Phi' \partial_S \partial_z U + \partial_z^2 U) + J_{-1}(A \cos(z)) \sin U = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

с краевыми условиями

$$(\Omega' \partial_S U + \epsilon (\Phi' \partial_S U + \partial_z U)) \Big|_{z=\pm\pi\ell} = 0.$$

Для построения формальной асимптотики интервал независимой переменной  $z$  удобно разбить на области знакоопределенности коэффициента  $J_{-1}(A \cos(z))$ . Пусть в некоторой окрестности  $0 < z < \beta$  выполнено условие  $J_{-1}(A \cos(z)) > 0$ . Будем искать асимптотику в виде

$$u(S, z, \epsilon) = U_0(S, z) + \epsilon U_1(S, z) + O(\epsilon^2). \quad (1.14)$$

Тогда подстановка в уравнение (1.13) дает в главном порядке по  $\epsilon$

$$(\Omega')^2 \partial_S^2 U_0 + J_{-1}(A \cos(z)) \sin(U_0) = 0.$$

Здесь  $z$  — медленная по отношению к  $S$  переменная, так что в главном порядке имеет место аналог полной механической энергии

$$(\Omega')^2 \frac{(\partial_S U_0)^2}{2} - J_{-1}(A \cos(z)) \cos(U_0) = E(z).$$

Траектория в фазовом пространстве лежит на уровне полной энергии  $E$ . Величина параметра  $E$  определяет тип траектории в фазовом пространстве. При

$$E(z) \in (-J_{-1}(A \cos(z)), J_{-1}(A \cos(z)))$$

движение периодически по быстрой переменной. Определим замкнутую траекторию в фазовом пространстве

$$\mathcal{L} = \left\{ (U_0, \partial_S U_0) \mid (\Omega')^2 \frac{(\partial_S U_0)^2}{2} - J_{-1}(A \cos(z)) \cos(U_0) = E(z) \right\}.$$

Тогда для  $\Omega'$  получится уравнение

$$\Omega' \int_{\mathcal{L}} \frac{dU_0}{\partial_S U_0} = 2\pi, \quad (1.15)$$

где период движения по траектории  $\mathcal{L}$  взят равным  $2\pi$ .

Общее решение уравнения для  $U_0$  на такой траектории определяется из обращения эллиптического интеграла:

$$S(z) - S_0(z) = \Omega' \int_{U_0(S, -\pi)}^{U_0(S, z)} \frac{d\xi}{\sqrt{2E(z) + 2J_{-1}(A \cos z) \cos \xi}}. \quad (1.16)$$

Решение этого уравнения содержит два параметра: фазовый сдвиг  $S_0(z)$  и энергию осциллятора  $E(z)$ , которые связаны краевым условием  $E(-\pi) = -J_{-1}(A \cos(U_0(S, -\pi)))$ . Дифференциальное уравнение для  $E$  определяется из условия ограниченности  $U_1$  по быстрой переменной  $S$ . Приравнявая к нулю в (1.13) члены первого порядка по  $\epsilon$ , получим условие ограниченности в виде  $\int_{\mathcal{L}} (2\Omega'' \partial_S U + 2\Omega' \Phi' \partial_S^2 U + E' \Omega' \partial_S \partial_E U) dU = 0$ . В силу замкнутости траектории на плоскости  $(U, \partial_S U)$  эта формула упрощается

$$\frac{d}{dz} \int_{\mathcal{L}} (\Omega' \partial_S U) dU = 0,$$

что эквивалентно адиабатичности действия

$$\mathcal{I} = \text{const}, \quad \mathcal{I} = \Omega' \int_{\mathcal{L}} (\partial_S U) dU.$$

Наконец, из условия периодичности по быстрой переменной получается трансцендентное уравнение для функции  $E(z)$ :

$$2 \int_{-B}^B \sqrt{2E(z) + 2J_{-1}(A \cos(z)) \cos(U)} dU = \mathcal{I},$$

$$B = \arccos \left( \frac{E}{J_{-1}(A \cos(z))} \right). \quad (1.17)$$

С формальной точки зрения обоснование построенного приближения для решения уравнения (1.11) в областях знакоопределенности коэффициента  $J_{-1}(A \cos(z_k))$  известно. В частности обоснование подобных асимптотик с помощью перехода к переменным действие-угол и исследования треугольной системы уравнений имеется в работе [15]. Прямой подход к обоснованию таких асимптотических подстановок для неавтономных уравнений второго порядка был предложен в работе [16].

Для завершения доказательства покажем, что решения (1.15)–(1.17) удовлетворяют граничным условиям

$$\partial_S U_0 \Big|_{z=-\pi} = \partial_S U_0 \Big|_{z=\pi} = 0$$

при подходящем выборе констант интегрирования. В силу (1.17) приближение непригодно в окрестности  $z_k$  таких, что  $J_{-1}(A \cos(z_k)) = 0$ . Отрезок интегрирования  $(-\pi, \pi)$  разбивается на конечное число отрезков  $(z_k, z_{k+1})$ , на каждом из которых параметры  $E(z_k)$  однозначно определяют решение  $U_0$  (1.15), (1.17). При этом решения на соседних отрезках гладко склеены, поскольку в граничной точке первые производные совпадают.

В силу периодичности  $U_0$  на каждом отрезке существуют точки  $\bar{z}_k \in (z_k, z_{k+1})$ , где  $\partial_S U_0|_{z=\bar{z}_k} = 0$ . Их координаты зависят от начального условия  $U_k^- = U_0|_{z=\bar{z}_k}$  или от значения энергии  $E(z_k) = -J_{-1}(A \cos(U_k^-))$ . Таким образом, выбирая начальное условие  $U_0|_{z=-\pi} = U_-$ ,  $\partial_S U_0|_{z=-\pi} = 0$ , можно добиться значения  $E$  на последнем отрезке такого, что формулы (1.15)–(1.17) дают нулевое значение производной  $\partial_S U_0|_{z=\pi} = 0$ . Подробности этого выбора параметров эллиптических функций можно найти в работе [17]. Теорема доказана.

Перейдем теперь к исследованию сепаратрисных решений уравнения (1.11). Быстро осциллирующие решения, как правило, затухают из-за диссипации, которая присутствует в исходной системе (0.1) (члены вида  $\epsilon \partial \varphi_n / \partial t$ ). Препятствием к затуханию служат решения нетривиальной топологии, т. е. соединяющие различные точки равновесия на фазовой плоскости. Таковыми решениями являются сепаратрисные решения уравнения математического маятника. Они соответствуют переходу траектории от одного состояния равновесия к другому на большом интервале по быстрой переменной  $x = z/\epsilon$ .

Для исследования сепаратрисного решения в уравнении (1.11) нужно перейти к быстрой переменной  $\zeta$ :

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + J_1(A \cos(\epsilon \zeta)) \sin(U) = 0.$$

Здесь важно заметить, что сепаратрисное решение экспоненциально быстро стремится к неустойчивым состояниям равновесия при  $\zeta \rightarrow \pm 0$ . Поэтому при построении решения основную роль играет окрестность  $\zeta = 0$ . Так что коэффициент в уравнении удобно представить в виде отрезка ряда Тейлора

$$J_1(A \cos(\epsilon \zeta)) = J_1(A) + \epsilon^2 \zeta^2 \frac{A J_1'(A)}{2} + O(\zeta^4 \epsilon^4).$$

Для краткости обозначим  $k^2 = J_1(A)$ ,  $k_1 = J_1'(A)A/2$ , для определенности выберем  $A$  так, что  $J_1(A) > 0$  и  $k > 0$ . Тогда уравнение для  $U$  можно переписать в виде

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + k^2 \sin(U) = -\epsilon^2 \zeta^2 k_1 \sin(U) + O(\zeta^4 \epsilon^4).$$

В главном по  $\epsilon$  (при  $\epsilon = 0$ ) получается уравнение математического маятника. Типичная сепаратриса уравнения математического маятника с постоянным коэффициентом имеет вид  $v = 4 \arctan(e^{k\zeta}) - \pi$ . Это решение соответствует переходу из окрестности седла  $v = -\pi$  в окрестность седла  $v = \pi$  за бесконечно большое время. Рассмотрим уравнение (1.11) при таких значениях  $A$ , что  $J_1(A) > 0$ . Тогда

$$U_0(\zeta) = 4 \arctan(e^{k\zeta}) + \pi \tag{1.18}$$

является главным членом асимптотики решения уравнения (1.11). Действительно, подставим в это уравнение выражение вида

$$U \sim u_0(\zeta) + \epsilon^2 u_1(\zeta), \tag{1.19}$$

Тогда для  $u_1$  получится уравнение

$$U_1'' + k u_1 \cos(U_0) = -\zeta^2 k_1 \sin(U_0). \tag{1.20}$$

Покажем, что для такого уравнения существует равномерно ограниченное по  $\epsilon$  решение  $U_1$  с нулевыми граничными условиями.

Линеаризованное уравнение (1.20) без правой части имеет два линейно независимых решения

$$v_1 = \frac{2}{\operatorname{ch}(k\zeta)}, \quad v_2 = \frac{\operatorname{sh}(2k\zeta)}{8 \operatorname{ch}(k\zeta)} + \frac{k\zeta}{4 \operatorname{ch}(k\zeta)}.$$

Вронскиан этих решений  $W = v_1 v_2' - v_1' v_2 = k$ . Правая часть уравнения (1.20) может быть представлена в виде

$$f_1(\zeta) = -\zeta^2 k_1 \sin(U_0) = -2\zeta^2 k_1 \frac{\operatorname{th}(k\zeta)}{\operatorname{ch}(k\zeta)}$$

Явный вид решения уравнения  $U_1$  —

$$u_1 = v_1(\zeta) \frac{1}{k} \int_0^\zeta f_1(x) v_2(x) dx - v_2(\zeta) \frac{1}{k} \left( \int_0^\zeta f_1(x) v_1(x) dx - C \right),$$

где  $C = \int_0^\infty f_1(x) v_1(x) dx$ . Формулы можно проинтегрировать явно, однако понадобятся лишь асимптотики при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ . Интеграл в первом слагаемом при  $\zeta \pm \infty$  имеет порядок  $\zeta^3$ . Умножение на  $v_1(\zeta)$  приводит к тому, что  $v_1(\zeta) \frac{1}{k} \int_0^\zeta f_1(x) v_2(x) dx \rightarrow 0$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Рассмотрим второе слагаемое в формуле для  $u_1$ . Интеграл в скобках — функция, четная по  $\zeta$ . Поэтому достаточно рассмотреть его асимптотику при  $\zeta \rightarrow +\infty$ :

$$\int_0^\zeta f_1(x) v_1(x) dx - C = - \int_\zeta^\infty f_1(x) v_1(x) dx = O(\zeta^2 \exp(-2k\zeta)).$$

Значит,

$$v_2(\zeta) \frac{1}{k} \left( \int_0^\zeta f_1(x) v_1(x) dx - C \right) = O(\zeta^3 \exp(\mp k\zeta)) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty.$$

Следовательно,  $u_1$  удовлетворяет нулевым граничным условиям при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ .

Полное асимптотическое разложение для близкого по свойствам уравнения осциллятора Дюффинга получено в [18]. Здесь же в качестве иллюстрации мы ограничимся численным сравнением главного члена  $U_0$  с его приближением в виде кинка (1.18), показанным на рис. 2.

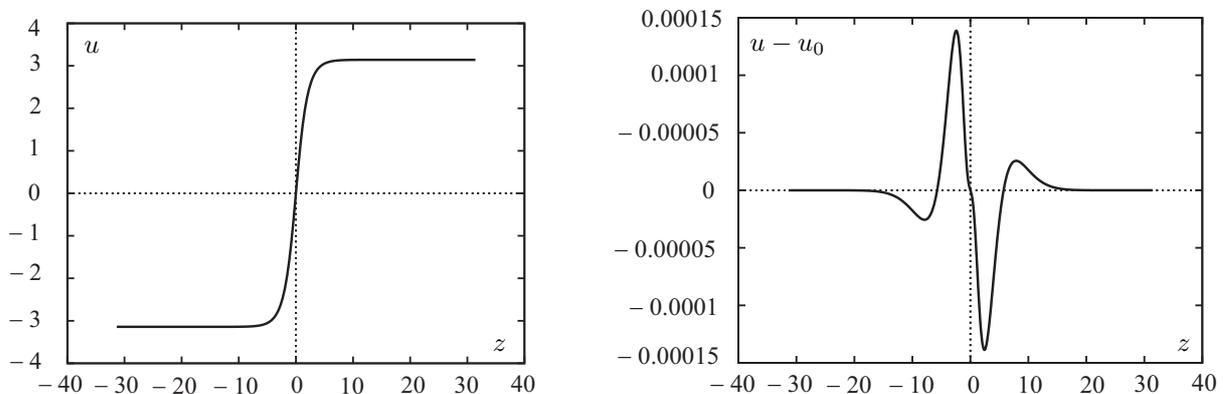


Рис. 2. Сравнение численного и асимптотического решений (1.19) уравнения (1.11) с граничными условиями  $u(-z/\epsilon) = -\pi$ ,  $u(z/\epsilon) = \pi$  при  $A = 2$ ,  $\epsilon = 0.1$ . Слева показан кинк (1.18), а справа — его разность с численным решением.

## 2. Анализ континуальной модели

Ряд физических моделей (см., например, [5; 6]) изначально предполагает переход к континуальному пределу в цепочке (0.1). В самом деле, асимптотическое решение (1.10) показывает, что разность фаз соседних слоев не содержит высокочастотных компонент и, более того, зависит только от пространственной переменной. Полагая в цепочке (0.1)

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} + \varphi_{2m}), \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} - \varphi_{2m}) \quad (2.1)$$

и предположив, что  $f_+$  и  $f_-$  не зависят от  $n = 2m$  и  $n = 2m + 1$ , приходим к системе уравнений синус-Гордон (0.3), связанной правыми частями

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} = -\sin \varphi_+ \cos \varphi_- - j_{ext}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} = -\sin \varphi_- \cos \varphi_+, \end{cases} \quad (2.2)$$

с граничными условиями (0.2)

$$\frac{\partial \varphi_{\pm}(-L, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{\pm}(L, t)}{\partial x} = 0, \quad -L < x < L. \quad (2.3)$$

Покажем, что система (2.2) также обладает набором устойчивых авторезонансных решений.

Следуя [6], будем искать решение системы в виде

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, t) &= \omega t + v(x, t) + \omega^{-2} v_1(x, t) + o(\omega^{-2}), \\ \varphi_-(x, t) &= u(x) + \omega^{-2} u_1(x, t) + o(\omega^{-2}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда для функции  $v$  получается выражение, аналогичное (1.1):

$$v(x, t) = \operatorname{Re} [\Omega \exp(-i\omega t)] \cos \nu x,$$

где

$$\Omega = \frac{iI}{\omega^2 - \nu^2 + i\varepsilon\omega}, \quad \nu = \frac{\pi\ell}{L}, \quad I = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x \ell}{L} \cos u(x) dx + O(\omega^{-1}),$$

а резонансное соотношение для джозефсоновского тока совпадает с (1.7).

Для главного члена асимптотики  $\varphi_-$  получается уравнение, аналогичное (1.2) (см. [6]):

$$u'' = -4\alpha \cos \frac{\nu x}{\ell} \sin u, \quad (2.5)$$

где  $\alpha = \frac{\omega^2 - \nu^2}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}$ . Граничные условия для уравнения (2.5) вытекают из (2.3)

$$u'(-L) = u'(L) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) также обладает набором решений типа кинков и антикинков модулированных эллиптических функций, однако их анализ проще с формальной точки зрения и не отличается от анализа соответствующих решений уравнения (1.2). Проиллюстрируем метод Крылова — Боголюбова, использованный в подразд. 2.2, на примере задачи (2.5), (2.6). По-прежнему считаем параметр  $\nu$  большой величиной, поскольку он совпадает с резонансной частотой,

$\nu = \omega_{res} \gg 1$ . Вблизи резонансной частоты  $\omega - \nu = \varepsilon/2$ , так что  $\alpha = (2\varepsilon\nu)^{-1}$  и уравнение (2.5) примет вид

$$u_{zz} = -\cos(\varepsilon z) \sin u, \quad (2.7)$$

где  $x = z \frac{\sqrt{\varepsilon\nu}}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{\nu\sqrt{\varepsilon\nu}}{\ell} \ll 1$ .

Внешне уравнение (2.7) проще, чем (1.11). Однако с формальной стороны это тоже уравнение с медленно меняющимся коэффициентом. Поэтому общая теория об асимптотиках осциллирующих решений полностью аналогична рассмотренной в предыдущем разделе. В вычислениях необходимо лишь заметить  $J_{-1}(A \cos(z))$  на  $\cos(z)$ . Приведем лишь результат.

**Теорема 3.** *Существует асимптотическое решение краевой задачи (2.6) для уравнения (2.7) такое, что в окрестностях  $z = \pm\pi/\epsilon$  главный член может быть представлен в виде осциллирующей эллиптической функции. Главный член может быть построен так же, как функция  $U_0$  из (1.14) с заменой в построениях  $J_{-1}(A \cos(z))$  на  $\cos(z)$ .*

Рассмотрим возможные неосциллирующие решения уравнения (2.7). Состояния равновесия математического маятника, соответствующие этому уравнению,  $u_n = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Локально, при небольших значениях изменений  $z$ , если  $-\pi < z < -\pi/2$  или  $\pi/2 < z < \pi$ , решения вблизи состояний равновесия  $(2n\pi, 0)$  ведут себя как решения в окрестности седел. Вблизи состояний равновесия  $((2n+1)\pi, 0)$  — как решения в окрестности центров. Обратно, при  $|z| < \pi/2$  решения в окрестности  $(2n\pi, 0)$  ведут себя как решения в окрестности центров, а в окрестности  $((2n+1)\pi, 0)$  — как решения в окрестности седел.

Для уравнения (2.7) существует асимптотическое решение близкое к сепаратрисному:

$$u \sim u_0(z) + \epsilon^2 u_1(z), \quad u_0(z) = 4 \arctan(e^z) - \pi.$$

Уравнение для поправки имеет вид

$$u_1'' + \cos(\varepsilon z) u_1 \cos(u_0) = z^2 \frac{\text{th}(z)}{\text{ch}(z)}.$$

Решение уравнения для поправки можно представить в виде ограниченной функции, экспоненциально быстро стремящейся к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ . Разность точного и асимптотического решений здесь ведет себя так же, как в подразд. 1.2, соответствующие численные сравнения при  $u(-\pi/\epsilon) = -\pi$ ,  $u(\pi/\epsilon) = \pi$  и  $\epsilon = 0.1$  совпадают с показанными на рис. 2.

Траектории, переходящие из одной малой окрестности состояния равновесия в малую окрестность другого состояния равновесия могут быть построены численно. В частности, траектории, проходящие из окрестности центра в окрестность другого центра, могут существенно меняться только в окрестности точек  $\varepsilon z = \pm\pi/2$ , так как осцилляции вокруг центров сохраняют значение переменной действие-площадь, заматаемую проекцией фазовой кривой на двумерную плоскость  $(u, u')$ .

Рассмотрим численное решение уравнения, переходящее из малой окрестности седла при  $u(-\pi/\epsilon) = 0$  в малую окрестность седла при  $u = (0)$  и затем в малую окрестность седла  $u = 2\pi$ . Сами переходы происходят в окрестностях точек  $\varepsilon z = \pm\pi/2$ , при переходе через которые локальные седла и центры меняются местами. Это решение качественно соответствует сепаратрисам обычного математического маятника, которые также проходят от окрестности одного неустойчивого положения равновесия к другому неустойчивому положению равновесия.

Справа на рис. 1 представлен другой тип траекторий, так называемый  $\pi$ -кинк, где траектория покидает малую окрестность локального седла. Переход происходит на малом интервале независимой переменной в окрестности  $\varepsilon z = \pi/2$ . Положение равновесия  $\varepsilon z = \pi/2$  неустойчиво, поэтому  $\pi$ -кинк должен разрушаться при малом возмущении уравнения (2.7). Однако, как будет показано ниже, именно это решение отвечает асимптотикам (1.10) и (2.4). Дело в

том, что возмущению подвергаются не уравнения главного резонанса (1.11) и (2.7), а исходные системы типа синус-Гордон. Можно показать (см. [2]), что в асимптотиках (1.10) и (2.4) решения  $u(x)$  типа  $\pi$ -кинка соответствуют минимуму полной энергии.

### 3. Обоснование формальных асимптотик

Формальные асимптотические решения (1.10) и (2.4), отвечающие дискретной и континуальной моделям, параметризуются функциями  $u(x)$  — решениями уравнений главного резонанса (1.11) и (2.5). Эти уравнения в силу граничных условий (2.6)  $u_x(-L) = u_x(L)$  имеют много решений, описанных в подразд. 1.2 и разд. 2. Выбор конкретного решения для резонансного режима исходной системы (0.1) или (2.2) затруднен. Дело в том, что функциональные уравнения (1.3)–(1.5) достаточно сложны для максимизации величины  $j_{ext}$  — джозефсоновского тока, отвечающего резонансному излучению. Поэтому выбор решения для уравнения главного резонанса мы осуществим из соображений обоснования асимптотик (1.10) и (2.4).

Заметим, что краевые задачи для исходных уравнений (0.1) и (2.2) недоопределены: в них отсутствуют начальные условия при  $t = 0$ . Этим обусловлена специфика задач об авторезонансе [4; 19]. Соответствующие физические модели должны обеспечивать резонансный режим при большинстве начальных условий. Поэтому мы будем предполагать, что начальные условия, отвечающие точным и асимптотическим решениям, совпадают:

$$\varphi_n(x, 0) = \varphi_n^{asym}(x, 0), \quad \frac{\partial \varphi_n(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_n^{asym}(x, 0)}{\partial t},$$

где решения  $\varphi_n^{asym}(x, t)$  уравнения (0.1) имеют асимптотику (1.10)

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + O(\omega^{-2}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

Предположим для простоты, что  $\varphi_{n+1} = \varphi_{n-1}$  для всех  $n$ . Выполняя замену (2.1)

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}), \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$

приходим так же, как в разд. 2, к системе (2.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} = -\sin \varphi_+ \cos \varphi_- - j_{ext}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} = -\sin \varphi_- \cos \varphi_+. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для суммы  $\varphi_n = \varphi_+ + \varphi_-$  из системы (2.2) вытекает скалярное уравнение синус-Гордон

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = -\sin \varphi_n - j_{ext}. \quad (3.1)$$

Полагая  $\varphi_n = \varphi_n^{asym} + 2\chi$ , получим уравнение для поправки

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\sin \chi \cos(\varphi_n^{asym} + \chi) + f(x, t, \omega). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) следует дополнить нулевыми краевыми и начальными условиями

$$\chi_x(-L, t) = \chi_x(L, t), \quad (3.3)$$

$$\chi(x, 0) = 0, \quad \chi_t(x, 0) = 0. \quad (3.4)$$

Заметим, что в правой части уравнения (3.2) стоят быстро осциллирующие функции

$$\frac{\partial \cos \varphi_n^{asym}}{\partial t} = O(\omega), \quad \frac{\partial f(x, t, \omega)}{\partial t} = O(\omega), \quad (3.5)$$

$$\langle \cos \varphi_n^{asym} \rangle = O(\omega^{-1}), \quad \langle f(x, t, \omega) \rangle = O(\omega^{-1}), \quad \langle \cdot \rangle - \text{усреднение по времени.}$$

Краевая задача (3.2)–(3.4) с быстро осциллирующими правыми частями вида (3.5) изучалась в работах [20–22]. Существование решения следует из оценок энергии

$$E(\chi) = \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2} (\chi_t^2 + \ell^2 \chi_x^2) + \varepsilon \chi_t \chi + 1 - \frac{1}{4} \cos(2\chi + \varphi_n^{asym}) - \frac{1}{2} \sin \varphi_n^{asym} \right\} dx,$$

которая имеет вид (см. [22, лемма 2.2])

$$E^{1/2}(\chi) \leq e^{-\varepsilon t} E^{1/2}(\chi) \Big|_{t=0} + K_0(1 - e^{-\varepsilon t}).$$

Здесь постоянная  $K_0$  пропорциональна длине интервала  $2L$  и максимуму  $L_2$ -нормы правой части  $\omega^{-1}f(x, t, \omega)$  и  $g(x, t, \omega) = \sin \varphi_n^{asym}$ .

**Теорема 4.** *Краевая задача (3.2)–(3.4) имеет класс устойчивых решений с асимптотикой*

$$\chi(x, t, \omega) = \frac{\delta}{2} + 2 \arctan [\exp \sqrt{2D}(x - x_0)] + \omega^{-1}v(x, t, \omega), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

где  $\delta$ ,  $D$  и  $x_0$  – некоторые не зависящие от  $\omega$  постоянные, а функция  $v$  ограничена в  $L_2$ -норме на интервале  $(-L, L)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим, следуя [20; 21], гамильтониан

$$H(\chi, p) = \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2} (p^2 + \ell^2 \chi_x^2) - \frac{1}{4} \cos(2\chi + \psi + \varphi_n^{asym}) \right\} dx,$$

где  $p = \chi_t$ , а  $\psi$  удовлетворяет уравнению  $\psi_{tt} + \varepsilon \psi_t = f(x, t, \omega)$ . Усредняя по быстрым колебаниям с частотой  $\omega$ , введем приближенный гамильтониан [21]

$$H(\Theta, P) = \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2} (P^2 + \Theta_x^2) - C \cos(\Theta - \gamma) - \frac{1}{2} D \cos(2\Theta - \delta) \right\} dx, \quad (3.7)$$

где  $\Theta$  и  $P$  – новые канонические переменные,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \cos(\psi + \varphi_n^{asym}), \quad \mathcal{B} = \sin(\psi + \varphi_n^{asym}), \\ \langle \mathcal{A} \rangle &= C \cos \gamma, \quad \langle \{\mathcal{A}\}_{-1}^2 \rangle - \langle \{\mathcal{B}\}_{-1}^2 \rangle = 2D \cos \delta, \\ \langle \mathcal{B} \rangle &= C \sin \delta, \quad \langle \{\mathcal{A}\}_{-1} \rangle \langle \{\mathcal{B}\}_{-1} \rangle = D \sin \delta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

при этом  $\{\cdot\}_{-1}$  – взятие первообразной функции.

В нашем случае в силу соотношений (3.5) имеем  $C = O(\omega^{-1})$ , так что в главном порядке соответствующая гамильтонова система примет вид

$$\Theta_t = P + O(\omega^{-3}), \quad P_t = \Theta_{xx} - \varepsilon P - D \sin(2\Theta - \delta) + O(\omega^{-3}).$$

Эта система имеет два неустойчивых положения равновесия (седла) при  $\Theta = \delta/2$  и  $\Theta = \pi + \delta/2$ . Существует устойчивое сепаратрисное решение, связывающее эти точки. В главном порядке оно представляет собой  $\pi$ -кинк вида

$$\Theta(x, t, \omega) = \frac{\delta}{2} + 2 \arctan \left[ \exp \sqrt{2D} \left( \frac{x - x_0 - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right].$$

В нашем случае скорость кинка  $c = 0$ , поскольку, как показано в [21], она пропорциональна постоянному слагаемому в правой части уравнения (3.1). Переходя к исходным переменным  $\chi$  и  $p$ , получим асимптотику (3.6). Оценка остатка следует из явных построений величин (3.7), (3.8). Теорема доказана.

Поскольку по построению  $\varphi_n = \varphi_n^{asym} + \chi$ , асимптотика (3.6) должна присутствовать в окончательной формуле для  $\varphi_n$ . Отсюда следует выбор решения уравнения главного резонанса в виде  $\pi$ -кинка (3.6).

**Следствие.** При условии  $\varphi_{n+1} = \varphi_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  в теореме 1 существует устойчивое решение задачи (0.1), (0.2), имеющее асимптотическое разложение

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + \frac{\delta}{2} + O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где постоянные  $A$ ,  $\phi$  и  $\delta$  определены формулами (1.3)–(1.5) и (3.8). Функция  $u(x)$  отвечает решению типа  $\pi$  – кинка уравнения главного резонанса (2.7).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Emission of coherent THz radiation from superconductors / L. Ozyuzer [et al.] // Science. 2007. Vol. 318, iss. 5854. P. 1291–1293. doi: 10.1126/science.1149802.
2. **Hu X., Lin S.** Three-dimensional phase-kink state in a thick stack of Josephson junctions and terahertz radiation // Phys. Review B. 2008. Vol. 78, iss. 13, 134510. doi: 10.1103/PhysRevB.78.134510.
3. Demonstration of Josephson effect submillimeter wave sources with increased power / S. Han [et al.] // Phys. Lett. 1994. Vol. 64, iss. 11. P. 1424–1426. doi: 10.1063/1.111904.
4. **Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.** Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 432 p. ISBN-10: 052153352X.
5. **Bulaevskii L.N., Koshelev A.E.** Radiation due to Josephson oscillations in layered superconductors // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99, iss. 5, 057002. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.057002.
6. **Koshelev A.E.** Alternating dynamic state self-generated by internal resonance in stacks of intrinsic Josephson junctions // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 78, iss. 17, 174509. doi: 10.1103/PhysRevB.78.174509.
7. **Revin L.S., Pankratov A.L.** Spectral and power properties of inline long Josephson junctions // Phys. Rev. B. 2012, Vol. 86, iss. 5, 054501. doi: 10.1103/PhysRevB.86.054501.
8. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. 296 p.
9. Novel features of Josephson flux-flow in Bi-2212: contribution of in-plane dissipation, coherent response to mm-wave radiation, size effect / Yn. I. Latyshev [et al.] // Physica C. 2002. Vol. 367. P. 365–375.
10. **Митропольский Ю.А.** Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
11. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 408 с.
12. **Кузмак Г.А.** Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23. С. 515–526.
13. **Доброхотов С.Ю., Маслов В.П.** Конечно-зонные почти периодические решения в ВКБ приближениях // Итоги науки. Современные проблемы математики. М.: Наука, 1980. Т. 15. С. 3–94.
14. **Bourland F.J., Haberman R.** The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varying and weakly damped oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1988. Vol. 48, iss. 4. P. 737–748. doi: 10.1137/0148042.
15. **Ажоткин В.Д., Бабич В.М.** О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, № 3. С. 377–383.

16. **Федорюк М.В.** Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 2. С. 198–210.
17. **Butikov E.I.** The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model // Eur. J. Phys. 1999. Vol. 20. P. 429–441.
18. **Киселев О.М.** Осцилляции около сепаратрисы уравнения Дюффинга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 141–153.
19. **Чириков Б.В.** Нелинейный резонанс. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977. 82 с.
20. **Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M.** Parametrically forced sine-Gordon equation and domain walls dynamics in ferromagnets // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 57, iss. 9, 5033. doi: 10.1103/PhysRevB.57.5033.
21. **Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N.**  $\pi$ -kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems // Phys. Rev. 1998. Vol. 58, no. 1. doi: 10.1103/PhysRevE.58.R52.
22. **Birnir B., Grauer R.** An explicit description of the global attractor of the damped and driven sine-Gordon equation // Commun. Math. Phys. 1994. Vol. 162. P. 539–590.

Киселев Олег Михайлович

Поступила 05.12.2016

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, г. Уфа

e-mail: ok@ufanet.ru

Новокшенов Виктор Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, г. Уфа

e-mail: novik53@mail.ru

## REFERENCES

1. Ozyuzer L. et al. Emission of coherent THz radiation from superconductors. *Science*, 2007, vol. 318, iss. 5854, pp. 1291–1293. doi: 10.1126/science.1149802.
2. Hu X., Lin S. Three-dimensional phase-kink state in a thick stack of Josephson junctions and terahertz radiation. *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 78, iss. 13, 134510. doi: 10.1103/PhysRevB.78.134510.
3. Han S. et al. Demonstration of Josephson effect submillimeter wave sources with increased power. *Phys. Lett.*, 1994, vol. 64, iss. 11, pp. 1424–1426. doi: 10.1063/1.111904.
4. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 432 p. ISBN-10: 052153352X.
5. Bulaevskii L.N., Koshelev A.E. Radiation due to Josephson oscillations in layered superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 99, iss. 5, 057002. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.057002.
6. Koshelev A.E. Alternating dynamic state self-generated by internal resonance in stacks of intrinsic Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 78, iss. 17, 174509. doi: 10.1103/PhysRevB.78.174509.
7. Revin L.S., Pankratov A.L. Spectral and power properties of inline long Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 2012, vol. 86, iss. 5, 054501. doi: 10.1103/PhysRevB.86.054501.
8. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions*. New York; London, McGraw-Hill, 1953, 303 p. ISBN: 0070195455. Translated under the title *Vysshie transcendentnye funktsii*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 296 p.
9. Latyshev Yu. I. et al. Novel features of Josephson flux-flow in Bi-2212: contribution of in-plane dissipation, coherent response to mm-wave radiation, size effect. *Physica C*, 2002, vol. 367, pp. 365–375.
10. Mitropol'skii Yu.A. *Problems of the asymptotic theory of nonstationary vibrations*. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965, 385 p. Original Russian text published in *Problemy asimptoticheskoy teorii nestacionarnykh kolebaniy*, Moscow, Nauka Publ., 1964, 431 p.
11. Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. Gordon and Breach, Hindustan Publishing, 1961, 537 p. ISBN: 0677200501. Original Russian text published in *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnykh kolebaniy*, Moscow, Gos. izd. fiz.-mat. lit. Publ., 408 p.

12. Kuzmak G.E. Asymptotic solutions of nonlinear differential equations of second order with variable coefficients. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1959, vol. 23, pp. 515–526 (in Russian).
13. Dobrokhotov S.Yu., Maslov V.P. Finite-zone almost periodic solutions in WKB-approximations. *J. Soviet Math.*, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1433–1487.
14. Bourland F.J., Haberman R. The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varying and weakly damped oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 1988, vol. 48, iss. 4, pp. 737–748. doi: 10.1137/0148042.
15. Azhotkin V.D., Babich V.M. Application of the method of two-scale expansions to the single-frequency problem of the theory of nonlinear oscillations. *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, iss. 3, pp. 290–295.
16. Fedoryuk M.V. The WKB-method for a nonlinear equation of the second order. *USSR Comput. Mathematics and Math. Physics*, 1986, vol. 26, no. 1, pp. 121–128. doi: 10.1016/0041-5553(86)90195-3.
17. Butikov E.I. The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model. *Eur. J. Phys.*, 1999, vol. 20, pp. 429–441.
18. Kiselev O.M. Oscillations near a separatrix in the Duffing equation. *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. Iss.*, 2013, vol. 281, suppl. 1, pp. 82–94. doi: 10.1134/S0081543813050088.
19. Chirikov B.V. *Nelineinyi rezonans* [Nonlinear resonance]. Novosibirsk, Novosibirsk State University Publ., 1977, 82 p.
20. Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forced sine-Gordon equation and domain walls dynamics in ferromagnets. *Phys. Rev. B.*, 1998, vol. 57, iss. 9, 5033. doi: 10.1103/PhysRevB.57.5033.
21. Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N.  $\pi$ -kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems. *Phys. Rev.*, 1998, vol. 58, no. 1. doi: 10.1103/PhysRevE.58.R52.
22. Birnir B., Grauer R. An explicit description of the global attractor of the damped and driven sine-Gordon equation. *Commun. Math. Phys.*, 1994, vol. 162, pp. 539–590.

The paper was received by the Editorial Office on 5 December, 2016.

*Oleg Mikhailovich Kiselev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics with Computer Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: ok@ufanet.ru.

*Viktor Yur'evich Novokshenov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics with Computer Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: novik53@mail.ru.