ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.988.68

АЛГОРИТМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ[1]

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

В работе рассматривается задача локализации (определения положения) линий разрыва зашумленной функции двух переменных. Такого рода задачи возникают при обработке изображений, поскольку границы объектов часто являются линиями разрыва. Предполагается, что в окрестности линий разрыва функция двух переменных гладкая, а в каждой точке на линиях имеет разрыв первого рода. Вместо точной функции известны ее приближение в пространстве L_2 и уровень погрешности измерений δ. Для возмущений такого рода задача относится к нелинейным некорректно поставленным проблемам, и для ее решения требуется строить регуляризирующие алгоритмы. В работе строятся и исследуются регуляризирующие дискретные алгоритмы усреднения “с поворотом”. Предложены новые законы выбора параметров регуляризации и усовершенствованы способы проведения оценок точности локализации. Получены оценки точности локализации особенностей порядка $O(\delta^{4/3})$ при более жестких условиях разделимости: порог разделимости в настоящей работе имеет порядок $O(\delta^{2/3})$. В то время как в предшествующих работах авторов, посвященных этой задаче, оценки точности локализации и порога разделимости имеют порядок $O(\delta)$. Кроме того, впервые проведено теоретическое исследование дискретизации (указаны условия на шаг дискретизации) алгоритмов усреднения “с поворотом”.

Ключевые слова: некорректная задача, регуляризующий алгоритм, локализация особенностей, разрыв первого рода, линия разрыва.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. High accuracy algorithms for approximation of discontinuity lines of a noisy function.

We consider the problem of localizing (finding the position of) discontinuity lines of a noisy function of two variables. Such problems arise in image processing, because the boundaries of objects are often discontinuity lines. It is assumed that the function of two variables is smooth in a neighborhood of discontinuity lines and has discontinuity of the first kind at each point of these lines. Instead of the exact function, its approximation in the space L_2 and the measurement error level δ are known. In this case, the problem belongs to the class of nonlinear ill-posed problems, and regularization algorithms should be constructed for its solution. We construct and study regularizing discrete algorithms of averaging “with a turn”. New rules are proposed for choosing regularization parameters and the methods of deriving localization error bounds are improved. Error bounds are found for the localization of singularities of order $O(\delta^{4/3})$ under stricter separability conditions: the separability threshold in the present paper has order $O(\delta^{2/3})$, whereas in the authors' previous papers devoted to this problem the bounds for the localization error and separability threshold have order $O(\delta)$. In addition, the discretization of the algorithms of averaging “with a turn” is investigated theoretically for the first time (conditions on the discretization step are specified).

Keywords: ill-posed problem, regularization algorithm, localization of singularities, discontinuity of the first kind, discontinuity line.

MSC: 65J20, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-10-21

Введение

В работе рассматривается задача локализации [1; 2] (определения положения) линии, в окрестности которой измеряемая функция f двух переменных гладкая, а на линии имеет разрыв первого рода. Такого рода проблемы возникают во многих прикладных исследованиях, поскольку границы разных “объектов” на изображении часто являются линиями, на которых интенсивность изображения испытывает скачок первого рода. Изучается модельный случай,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629).

когда функция f принадлежит пространству $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$. При этом точная функция f неизвестна, а известна возмущенная функция $f^\delta \in L_2$ такая, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$, где δ — параметр, описывающий уровень точности измерений. В этом случае линии разрыва известной функции f^δ могут как угодно сильно отличаться от искомых линий разрыва функции f, т. е. рассматриваемая задача *некорректно поставлена* [3; 4].

В настоящее время для решения подобных задач предложено множество эвристических алгоритмов (ссылки на литературу см. в [1; 2]). Насколько известно авторам, первые теоретические результаты были получены в работах [5–7]. Выбор параметров регуляризации в этих работах был таким, что порядок точности локализации оценивался как $O(\delta)$. Между тем для одномерного аналога этой проблемы (локализация разрывов первого рода), см. [8–10], удалось построить оптимальные по порядку методы с порядком сходимости $O(\delta^2)$. В настоящей работе построены регуляризирующие дискретные методы усреднения с новыми законами выбора параметров регуляризации и усовершенствованы способы проведения оценок точности локализации особенностей. Доказывается, что эти методы имеют порядок точности[2] локализации $O(\delta^{4/3})$.

В первом разделе сформулирована постановка задачи. Во втором разделе получены предварительные оценки. В третьем разделе приведен метод локализации, доказана его сходимость и получены оценки точности аппроксимации полученных приближений.

1. Постановка задачи и построение вспомогательной функции

Зафиксируем некоторое значение переменной $y = \bar{y}$ и введем полосу

$$\mathfrak{D} = \{(x, y) \colon x \in \mathbb{R}, |y - \bar{y}| \le \bar{\delta}\},$$

где величина $\bar{\delta} > 0$. Пусть в полосе $\mathfrak{D}$ функция f двух переменных имеет конечное число линий разрыва $\{\Gamma_k\}_1^l$ (см. рис. 1); вне этих линий функции f гладкая. Считаем, что линии $\{\Gamma_k\}_1^l$ можно параметризовать, то есть существуют функции $x = \gamma_k(y),\ k = 1, 2, \cdots, l$ [3]. Линию, которая задана уравнением $y = \bar{y}$, обозначим $\mathfrak{L}$. Через x_k обозначим точки пересечения кривых Γ_k с линией $\mathfrak{L}$: $x_k = \gamma_k(\bar{y}),\ k = 1, 2, \cdots, l$.

Будем считать, что вместо точной функции f известны возмущенная функция f^δ и уровень погрешности измерений δ такие, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$. Задача локализации будет состоять в определении по δ и f^δ количества l линий разрыва в полосе $\mathfrak{D}$ и приближении точек $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации. Дополнительные условия на линии разрыва и поведение функции f вне разрывов будут приведены ниже.

Исследование этой задачи существенно опирается на результаты по локализации разрывов первого рода зашумленной функции одной переменной. Введем пространство $MV(\mathbb{R})$ [8] функций g одной переменной, которые на любом отрезке имеют конечное число разрывов первого рода: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция g абсолютно непрерывна; функция g ограничена на $\mathbb{R}$; функция g' почти всюду ограничена[4] на $\mathbb{R}$.

Договоримся для упрощения записи вместо $(\Delta_k(t))'_t|_{t=y}$ писать $\Delta'_k(y)$, вместо $(\gamma_k(t))'_t|_{t=y}$ — $\gamma'_k(y)$, вместо $(\phi_\lambda(t))'_t|_{t=u}$ — $\phi'_\lambda(u)$.

Введем пространство $MV(\mathbb{R}^2)$ функций двух переменных, для которых в полосе $\mathfrak{D}$ выполнены следующие условия:

$(*)$ для почти всех направлений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)^T$ функция $f(x + \tau_x t, y + \tau_y t)$ принадлежит пространству $MV(\mathbb{R})$ как функция переменной t; для $(x, y) \notin \Gamma_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, почти всюду

[2] К сожалению, этот порядок достигается при более жестких по сравнению с методами из [5–7] условиях разделимости: функция $h(\delta)$ в теореме имеет порядок $O(\delta^{2/3})$ (см. условие $\min\limits_{k \ne j}|x_k - x_j| \ge h(\delta)$).

[3] Нас будет интересовать только та часть линий Γ_k, которая лежит в полосе $\mathfrak{D}$.

[4] Производная почти всюду существует; в точках несуществования доопределим ее, например, нулем.

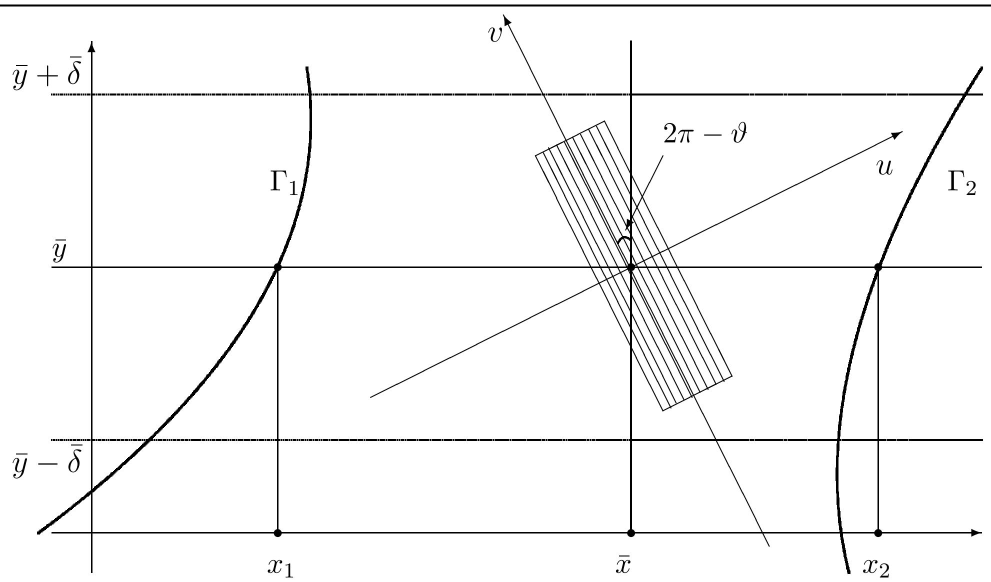

Рис. 1. Локализация линий разрыва функции двух переменных: Γ_k — линии разрыва функции f; $x_k, k=1,2,$ — аппроксимируемые величины; (u,v) — новая система координат; заштрихованный прямоугольник — область усреднения.

существуют $df(x,y)/d\boldsymbol{\tau}\colon |df(x,y)/d\boldsymbol{\tau}| \le r$ и для $(x,y)\in\Gamma_k,\ k=1,2,\cdots,l$, существуют $df(x\pm 0,y)/d\boldsymbol{\tau}\colon |df(x\pm 0,y)/d\boldsymbol{\tau}| \le r$ (без ограничения общности будем считать, что $r=1$);

$(**)$ для $(x,y)\in\Gamma_k,\ k=1,2,\cdots,l$, существуют конечные величины $f(x\pm 0,y)$, и они не равны; скачок $\Delta_k(y)$ функции f на линии Γ_k является непрерывно дифференцируемой функцией для $y\colon |y-\bar{y}|\le\bar{\delta}$, и существуют производные $\Delta'_k(y),\ k=1,2,\cdots,l$; заданы положительные константы $\Delta^{\min},\ \Delta^{\max}, B\colon$

$$\Delta^{\min} \le \min_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \max_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \Delta^{\max}, \quad \max_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta'_k(y)| \le B;$$

$(***)$ существуют производные $\gamma'_k,\ \gamma''_k,\ k=1,2,\cdots,l$; заданы положительные константы $M_1, M_2\colon$

$$\max_k |\gamma'_k(\bar{y})| \le M_1, \quad \max_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\gamma''_k(y)| \le M_2.$$

Постановка задачи. Пусть функция $f\in MV(\mathbb{R}^2)$. Требуется по функции $f^\delta\in L_2$ и уровню погрешности δ таким, что $\|f-f^\delta\|_{L_2}\le\delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$.

Методы локализации основаны на построении и исследовании вспомогательной функции [5–10]. Поскольку возмущение $f-f^\delta$ двумерно, то для построения вспомогательной функции нужно проводить усреднение по двум переменным. Для этого нам понадобятся два класса усредняющих функций. Через Φ обозначим множество функций $\phi(t),\ t\in\mathbb{R}$, для которых выполнены следующие условия:

(a) $\phi\in W_1^1(\mathbb{R});\ \ |\phi'(t)|\le C,\ t\in\mathbb{R},\ C$ — константа;

(b) существуют $0<b<1,\ 0<a\le 1$ такие, что $a\le|\phi(t)|\le 1$ для $t\in[-b,b]$;

(c) $\phi(t)=0$ для $t\notin[-1,1]$.

Введем второе множество усредняющих функций Ψ, которое также состоит из финитных функций $\psi(t),\ t\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a') $\psi\in L_2(\mathbb{R})$;

(b') $\displaystyle\int_{-1}^{1}\psi(t)dt=1$;

(c') $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$; $\psi(t) \geq 0$ для $t \in [-1, 1]$.

Приведем пример функций, удовлетворяющих вышеприведенным условиям $\phi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$:

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos^2(\pi t/2), t \in [-1, 1], \\ 0, \qquad t \notin [-1, 1], \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} 1/2, t \in [-1, 1], \\ 0, \quad t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\Big(\frac{t}{\lambda_1}\Big), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\Big(\frac{t}{\lambda_2}\Big), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

В работе рассматривается метод усреднения "с поворотом", когда усреднение проводится в новой системе координат. Зафиксируем точку $(\bar{x}, \bar{y})$ на линии $\mathfrak{L}$. Введем новую систему координат с началом в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ и поворотом на некоторый угол ϑ относительно старой системы координат. Для удобства читателя приведем формулы перехода к новым координатам (u, v) и обратно

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Для краткости введем обозначение $W = W(u, v) = (u\cos\vartheta - v\sin\vartheta + \bar{x}, u\sin\vartheta + v\cos\vartheta + \bar{y})$. Поскольку $\bar{x}$ будет меняться от $-\infty$ до $+\infty$, то удобно далее вместо $\bar{x}$ писать x. Усреднение будем проводить в новой системе координат с усредняющим ядром $\phi'_{\lambda_1}(u)\psi_{\lambda_2}(v)$. Положим

$$F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) = \int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f^{\delta}(W)\phi'_{\lambda_1}(u)\psi_{\lambda_2}(v)du dv, \tag{1.1}$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$, $\vartheta \in (-\operatorname{arctg} M_1, \operatorname{arctg} M_1)$, M_1 — константа из условия $(***)$. Определим вспомогательную функцию для метода локализации

$$\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \max_{|\operatorname{tg}\vartheta| \leq M_1} \big|F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta)\big|. \tag{1.2}$$

Максимум выбирается на множестве углов, которому принадлежат углы наклона касательных к кривым Γ_k в точке $(x_k, \bar{y})$. В следующем разделе проведено исследование вспомогательной функции $\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x)$.

2. Исследование вспомогательной функции и получение предварительных оценок

В дальнейшем нам понадобится оценить двойной интеграл (1.1) при $\delta = 0$ (индекс δ при этом будем опускать), который сначала запишем в виде повторного

$$F_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) = \int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \Big(\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)du \Big) \psi_{\lambda_2}(v)dv.$$

Обозначим через ϑ_k угол наклона касательной к кривой Γ_k в точке $(x_k, \bar{y})$, т. е. $\operatorname{tg}\vartheta_k = \gamma'_k(\bar{y})$, $k = 1, 2, \cdots, l$. Для внутреннего интеграла при $\vartheta = \vartheta_k$ для почти всех v таких, что $|v| \leq \lambda_2$ может быть применена лемма 1 из работы [7], где v является параметром. Для удобства читателя сформулируем соответствующее утверждение.

Следствие (из леммы 1 [7]). *Пусть $f \in MV(\mathbb{R}^2)$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi$. Если в пределах интегрирования в (1.1) функция f имеет разрывы только на линии Γ_k, то для* *почти всех v таких, что $|v| \le \lambda_2$, в новой системе координат, повернутой на угол $\vartheta = \vartheta_k$, справедливо разложение*

$$\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)du = \tilde{\Delta}_k(v)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v)) + \int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f'_u(W)\phi_{\lambda_1}(u)du,$$

где $\tilde{\Delta}_k(v), \tilde{\gamma}_k(v)$ соответственно скачок функции f на линии разрыва Γ_k и положение этого скачка в новой системе координат.

Подход к построению метода локализации и получению оценок в случае двух переменных во многом аналогичен случаю одной переменной. В следующей лемме получены оценки сверху для функции $\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x)$ вне такой окрестности точек $\{x_k\}_1^l$, что при любом $\vartheta\colon |\operatorname{tg}\vartheta| \le M_1$ область усреднения в (1.1) (заштрихованный прямоугольник на рис. 1) не пересекается с кривыми $\{\Gamma_k\}_1^l$. Оценки снизу для функции $\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x)$ получены в окрестности точек $\{x_k\}_1^l$. Лемма является аналогом леммы 3 из [5]. Однако оценка в п. (б) получена более детальная, что позволяет улучшить оценки точности локализации в следующем разделе.

Положим $\varrho = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2},\ M = 2\max\{M_1, M_2\},\ K = 2\varrho(1 + M^2)^{1/2}$, где M_1, M_2 — константы из условия $(***)$. Напомним, что величина $\bar{\delta}$ входит в определение полосы $\mathfrak{D}$, B — константа из условия $(**)$, величины a, b — из условия (b) на функцию ϕ. Через $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ обозначим $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{R})}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R})}$.

Лемма 1. *Пусть зафиксированы функции $\phi \in \Phi, \psi \in \Psi$ и положительные числа λ_1, λ_2 такие, что $\varrho \le \min\{2, \bar{\delta}\}$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения*:

(а) *для x таких, что $|x - x_k| \ge K,\ k = 1, 2, \cdots, l$, имеет место оценка*

$$\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x) \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_1\lambda_1,$$

где $A_0 = \|\phi'\|_2\|\psi\|_2,\ A_1 = \|\phi\|_1$;

(б) *если $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} |x_k - x_j| \ge K$, то для всех x таких, что $|x - x_k| \le b\lambda_1,\ k = 1, 2, \cdots, l$, имеет место оценка*

$$\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x) \ge a|\Delta_k(\bar{y})| - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_1\lambda_1 - \frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1} - \bar{B}\lambda_2,$$

где $A_2 = CM_2\Delta^{\max},\ \bar{B} = aB$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\varrho \le \bar{\delta}$ гарантирует, что пределы интегрирования в (1.1) не выйдут из полосы $\mathfrak{D}$ (интегрирование в правой части (1.1) проводится по заштрихованной области на рис. 1).

Введем $\Delta f = f - f^{\delta}$ и напомним, что $W = W(u, v) = (u\cos\vartheta - v\sin\vartheta + x, u\sin\vartheta + v\cos\vartheta + \bar{y})$. Тогда

$$F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) = F_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) + \Delta F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta), \tag{2.1}$$

где

$$F_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) = \int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)\psi_{\lambda_2}(v)dudv, \quad \Delta F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) = \int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} \Delta f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)\psi_{\lambda_2}(v)dudv.$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Коши — Буняковского и перехода от функций ϕ'_{λ_1}, ψ_{λ_2} к функциям ϕ', ψ:

$$\left|\Delta F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)\right| \le \|\phi'_{\lambda_1}\|_2\|\psi_{\lambda_2}\|_2\Bigg(\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1}(\Delta f(W))^2\,dudv\Bigg)^{1/2} \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}.$$

Проверим, что в полосе $\mathfrak{D}$ при условии $|x-x_k|\ge K$, $k=1,2,\cdots,l$, функция f не имеет разрывов в области интегрирования для всех ϑ. Ясно, что объединением всех областей интегрирования для всевозможных углов ϑ является окружность O_ϱ с радиусом ϱ и центром в точке $(x,\bar y)$ (см. рис. 2). Рассмотрим полосу $\mathfrak{D}_\varrho=\{(x,y)\colon x\in\mathbb{R},\ |y-\bar y|\le\varrho\}$, содержащую окружность O_ϱ. Пусть точка $(\tilde x,\tilde y)\in\Gamma_k\cap\mathfrak{D}_\varrho$. Запишем разложение

$$\tilde x - x_k = \gamma_k(\tilde y)-\gamma_k(\bar y)=\gamma'_k(\bar y)(\tilde y-\bar y)+\frac{\gamma''_k(\xi)(\tilde y-\bar y)^2}{2},\quad \text{где}\ \ \xi\in(\tilde y,\bar y).$$

В силу условия $(***)$ и ввиду того, что $\varrho\le 2$, имеем оценку

$$|\tilde x-x_k|\le\Big(M_1+\frac{M_2\varrho}{2}\Big)|\tilde y-\bar y|\le M|\tilde y-\bar y|,\qquad M=2\max\{M_1,M_2\}.$$

Кривая Γ_k в полосе $\mathfrak{D}_\varrho$ не выходит за пределы области $\Omega_k=\{(\tilde x,\tilde y)\colon|\tilde y-\bar y|\le\varrho,\ |\tilde x-x_k|\le M|\tilde y-\bar y|\}$ (Ω_k — это конус с вершиной в точке $(x_k,\bar y)$). Значит множество $\Omega_k\supseteq\Gamma_k\cap\mathfrak{D}_\varrho$. Угол, тангенс которого равен M, обозначим через β (см. рис. 2). Условие $O_\varrho\cap\Omega_k=\varnothing$ достаточно, чтобы кривая Γ_k не пересекала окружность O_ϱ. Будем приближать точку x к точке x_k (для определенности можно считать, что $x<x_k$, как изображено на рис. 2). Тогда первой точкой x, в которой условие $O_\varrho\cap\Omega_k=\varnothing$ нарушится, будет точка касания окружности O_ϱ области Ω_k, как это показано на рис. 2. Из простых геометрических рассмотрений видно, что условие $O_\varrho\cap\Omega_k=\varnothing$ следует из неравенства $|x-x_k|>\varrho/\cos\beta=\varrho(1+M^2)^{1/2}$, т. е. достаточно потребовать $|x-x_k|\ge K=2\varrho(1+M^2)^{1/2}$.

Следовательно, в п. (а) формулировки леммы в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов. А в п. (б) в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k. Получим оценки для первого слагаемого в правой части (2.1) в том и в другом случае.

Рассмотрим случай (а). Перейдем от двойного интеграла в первом слагаемом в правой части (2.1) к повторному и для внутреннего интеграла применим формулу интегрирования

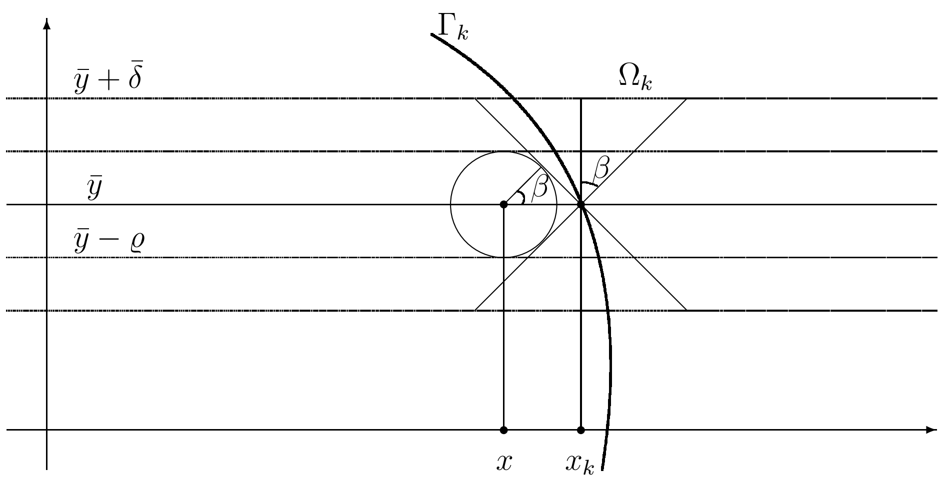

Рис. 2. Условие разделимости: Γ_k — линия разрыва; x_k-x — минимальное расстояние, при котором область интегрирования не пересекается с кривой Γ_k; Ω_k — конус с вершиной в точке $(x_k,\bar y)$ и углом β.

по частям. Затем, используя условие $(*)$ на функцию f, условие (a) на функцию ϕ и условия (b'), (c') на функцию ψ, получаем требуемую оценку:

$$\left|F_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)\right| = \Bigg|\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)du\Bigg)\psi_{\lambda_2}(v)dv\Bigg|$$

$$= \Bigg|\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f'_u(W)\phi_{\lambda_1}(u)du\Bigg)\psi_{\lambda_2}(v)dv\Bigg| \le \operatorname*{ess\,sup}_{(u,v)\in D}|f'_u|\|\phi\|_1\lambda_1\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\psi_{\lambda_2}(v)dv \le A_1\lambda_1.$$

Рассмотрим случай (б). Поскольку в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k, то, применяя следствие (из леммы 1 работы [7]) для внутреннего интеграла в первом слагаемом (2.1) для x таких, что $|x-x_k|\le b\lambda_1$ при $\vartheta=\vartheta_k$, имеем равенство

$$F_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta_k) = \int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}_k(v)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v))\psi_{\lambda_2}(v)dv + \int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f'_u(W)\phi_{\lambda_1}(u)du\Bigg)\psi_{\lambda_2}(v)dv. \qquad (2.2)$$

Второе слагаемое было рассмотрено выше в случае (а). Введем величину $\tilde{\gamma}_k(\bar{v})=(x-x_k)\cos\vartheta_k$. Ясно, что $|\bar{v}|\le\lambda_2$. Используя формулу Лагранжа $\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v))=\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))+\phi'_{\lambda_1}(\xi)(\tilde{\gamma}_k(v)-\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))$, где $\xi\in(\tilde{\gamma}_k(v),\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))$, первое слагаемое в правой части (2.2) можно представить в виде

$$\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}_k(v)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v))\psi_{\lambda_2}(v)dv = \phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}_k(v)\psi_{\lambda_2}(v)dv$$

$$+\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}_k(v)\phi'_{\lambda_1}(\xi)(\tilde{\gamma}_k(v)-\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\psi_{\lambda_2}(v)dv. \qquad (2.3)$$

Поскольку функция $\tilde{\Delta}_k$ непрерывна, то она сохраняет знак. Так как $\tilde{\Delta}_k(v)=\tilde{\Delta}_k(0)+\tilde{\Delta}'_k(\tau)v,\ \tau\in(0,v)$, для первого слагаемого в правой части (2.3) имеем

$$\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}_k(v)\psi_{\lambda_2}(v)dv = \tilde{\Delta}_k(0)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\psi_{\lambda_2}(v)dv + \phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}'_k(\tau)v\psi_{\lambda_2}(v)dv.$$

Поскольку $|x-x_k|\le b\lambda_1$, то $|\tilde{\gamma}_k(\bar{v})|\le b\lambda_1$. Величина $\tilde{\Delta}_k(0)$ в исходной системе координат равна $\Delta_k(\bar{y})$. Используя условия (b) на функцию ϕ и (b') на функцию ψ, первое слагаемое в правой части в последнем выражении оценим снизу следующим образом:

$$\Bigg|\tilde{\Delta}_k(0)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\psi_{\lambda_2}(v)dv\Bigg| \ge a|\Delta_k(\bar{y})|.$$

Оценим второе слагаемое, используя условие $(**)$ на функцию f и условия (b'), (c') на функцию ψ :

$$\Bigg|\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}'_k(\tau)v\psi_{\lambda_2}(v)dv\Bigg| \le aB\lambda_2.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.3). Поскольку в данной системе координат $\tilde{\gamma}_k(0)=0$ и $\tilde{\gamma}'_k(0)=0$, то

$$|\tilde{\gamma}_k(v)-\tilde{\gamma}_k(\bar{v})| \le \frac{|\tilde{\gamma}''_k(\xi_1)|v^2}{2}+\frac{|\tilde{\gamma}''_k(\xi_2)|\bar{v}^2}{2} \le M_2\lambda_2^2, \quad \xi_1\in(0,v), \quad \xi_2\in(0,\bar{v}).$$

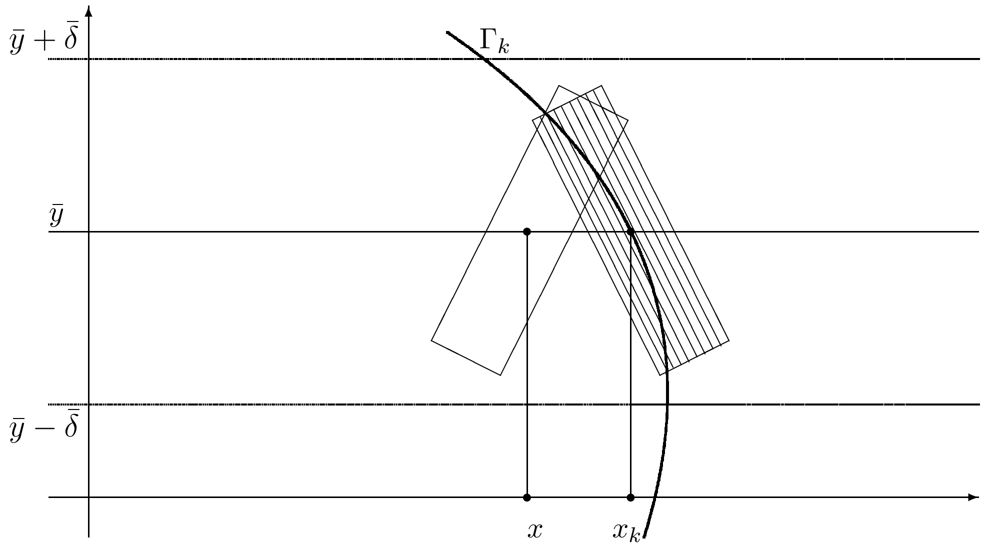

Рис. 3. Иллюстрация к лемме 2: Γ_k — линия разрыва функции f; x_k — аппроксимируемая величина; x — текущая точка; заштрихованный прямоугольник — область усреднения функции $F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x_k,\vartheta_k)$; незаштрихованный прямоугольник — область усреднения функции $F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)$, $|\operatorname{tg}\vartheta|\le M_1$.

Таким образом, используя условие (a) на функцию ϕ и условие (b') на функцию ψ, для второго слагаемого в правой части (2.3) имеем

$$\Big|\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\tilde{\Delta}_k(v)\phi'_{\lambda_1}(\xi)(\tilde{\gamma}_k(v)-\tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\psi_{\lambda_2}(v)dv\Big|\le\frac{CM_2\Delta^{\max}\lambda_2^2}{\lambda_1}\int\limits_{-\lambda_2}^{\lambda_2}\psi_{\lambda_2}(v)dv\le\frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1}.$$

Объединяя полученные выше оценки, получаем требуемое соотношение в п. (б).

Лемма 1 доказана.

В следующей лемме получена оценка сверху для функции $\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x)$ вне отрезка $[x_k-V,x_k+V]$, $V=2\lambda_1(1+M_1^2)^{1/2}$, которая позволит улучшить оценку точности аппроксимации точек $\{x_k\}_1^l$ по сравнению с [5]. Заметим, что далее $V<K$ (см. лемму 1).

Лемма 2. *Пусть зафиксированы функции $\phi\in\Phi,\psi\in\Psi$ и положительные числа λ_1,λ_2 такие, что $\varrho\le\min\{2,\bar{\delta}\}$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для x таких, что $|x-x_k|\ge V,\ k=1,2,\cdots,l$, имеет место оценка*

$$\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x)\le\frac{a|\Delta_k(\bar{y})|}{2}+\frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}+A_1\lambda_1+\frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1}+\bar{B}\lambda_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии $|x-x_k|\ge V$ пересечение областей усреднения в точке x и в точке x_k может быть либо пустым, либо принадлежать полуплоскости $y\ge\bar{y}$, как это показано на рис. 3, либо принадлежать полуплоскости $y\le\bar{y}$. Следовательно, площадь области пересечения не может превышать половины площади всей области усреднения, и в область усреднения в точке x не может попасть больше половины кривой Γ_k, которая лежит в области усреднения в точке x_k. Используя оценки леммы 1 и условия на функции ϕ и ψ, получаем требуемое неравенство.

Лемма 2 доказана.

3. Метод локализации и теорема сходимости

Предположим, что нам известен интервал $(-d, d)$, содержащий искомые точки $\{x_k\}_1^l$. Считаем, что вместо функции $\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}$ вычисляется ее приближенное значение $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}$ в точках равномерной сетки на отрезке $[-d-h, d+h]$: $x^i = -d-h+i\Delta x,\ \ i = 1, 2, \cdots, I$, с шагом $\Delta x = 2(d+h)/I$. Параметр h будет определен позже. Предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие аппроксимации интеграла при вычислении вспомогательной функции[5]

$$\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) = \hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) + \Delta\widetilde{F}(x^i), \quad \max_{x^i} |\Delta\widetilde{F}(x^i)| \le \frac{P}{16}. \tag{3.1}$$

Положим порог в методе локализации $P = a\Delta^{\min}/2$. Напомним, что $K = 2\varrho(1+M^2)^{1/2}$, где $\varrho = (\lambda_1^2+\lambda_2^2)^{1/2}$, $M = 2\max\{M_1, M_2\}$. В работе метода локализации также используются параметры λ_1, λ_2, h, которые будут выписаны ниже. Через $\lceil z \rceil$ обозначена целая часть вещественного числа z плюс единица.

А л г о р и т м ΠD_{Δ}. Положим начальные $i := 0,\ m := 0$.

Шаг алгоритма: если $x^i \ge d$, то завершаем процесс;

иначе, если $|\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)| \ge P$, то положим $m := m+1, a_m := x^i, i := i + \lceil 2K/\Delta x \rceil$;

выберем в качестве x_m^{δ} точку сетки x^i на отрезке $[a_m, a_m+K]$, в которой функция $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}$ принимает наибольшее значение;

иначе $i := i+1$;

повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, с помощью алгоритма ΠD_{Δ} по функции $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}$ вычисляются величина m, относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x_k^{δ}, $k = 1, 2, \cdots, l$, для аппроксимации точек x_k, $k = 1, 2, \cdots, l$.

Сформулируем теорему сходимости алгоритма ΠD_{Δ} для рассматриваемой задачи. Напомним, что $A_0 = \|\phi'\|_2\|\psi\|_2$, $A_1 = \|\phi\|_1$, $A_2 = CM_2\Delta^{\max}$, $\bar{B} = aB$.

Введем константы

$$\omega = \Big(\frac{P^2}{16^2 A_0 A_2}\Big)^{1/3}, \quad D = \frac{16A_0}{P\omega}, \quad \widetilde{D} = 2D(1+M_1^2)^{1/2},$$

$$\delta_0 = \min\Big\{\omega^3, \Big(\frac{\bar{\delta}}{2D\omega^2}\Big)^{3/2}, \Big(\frac{1}{D\omega^2}\Big)^{3/2}, \Big(\frac{P}{16A_1D}\Big)^{3/4}, \Big(\frac{P}{16\bar{B}D\omega^2}\Big)^{3/2}\Big\}$$

и функции

$$\lambda_1(\delta) = D\delta^{4/3}, \quad \lambda_2(\delta) = D\omega^2\delta^{2/3}, \quad h(\delta) = 12D\omega^2(1+M^2)^{1/2}\delta^{2/3}.$$

Положим шаг сетки $\Delta x(\delta) = b\lambda_1(\delta)$ (без ограничения общности этого всегда можно добиться за счет выбора I и увеличения d). Поскольку $\delta_0 \le \omega^3$, то $\varrho = (\lambda_1^2+\lambda_2^2)^{1/2} < 2D\omega^2\delta^{2/3}$. Следовательно, $K(\delta) = 2\varrho(1+M^2)^{1/2}$ будет величиной порядка $O(\delta^{2/3})$ и $K(\delta) < 4D\omega^2(1+M^2)^{1/2}\delta^{2/3}$. Таким образом, функция $h(\delta) > 3K(\delta)$. При таком выборе параметров величины Δx и $V = 2\lambda_1(1+M_1^2)^{1/2} = \tilde{D}\delta^{4/3}$ меньше величины K.

Теорема. *Пусть зафиксированы функции $\phi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta), \lambda_2 = \lambda_2(\delta), \Delta x = \Delta x(\delta)$ и выполнении условия разделимости $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} |x_k - x_j| \ge h(\delta)$ для алгоритма ΠD_{Δ} получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^{\delta}| \le \widetilde{D}\delta^{4/3}$, $k = 1, 2, \cdots, l$.*

---

[5] Для полной дискретизации метода необходимо задать модель измерительных датчиков и перейти в вычислении функции $\hat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x)$ от интегралов к суммам; мы в настоящей статье не проводим этот этап для существенного упрощения выкладок.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta \le \delta_0$ и $\lambda_1 = \lambda_1(\delta), \lambda_2 = \lambda_2(\delta), \Delta x = \Delta x(\delta)$. Условие на величину ϱ из лемм 1, 2 выполнено за счет выбора δ_0. Рассмотрим $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}$ в точках сетки $x^i\colon |x^i - x_k| \le b\lambda_1,\ k = 1, 2, \cdots, l$, (такие точки существуют, поскольку $\Delta x = b\lambda_1$). Согласно п. (б) леммы 1, используя условие $(**)$ и условие аппроксимации (3.1), имеем

$$\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) \ge a\Delta^{\min} - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_1\lambda_1 - \frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1} - \bar{B}\lambda_2 - \frac{P}{16}.$$

Заметим, что условие $\delta \le \delta_0$ обеспечивает выполнение неравенств $A_1\lambda_1 \le P/16$ и $\bar{B}\lambda_2 \le P/16$. Благодаря выбору констант D и ω получаем $A_0\delta/(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} = P/16$ и $A_2\lambda_2^2/\lambda_1 = P/16$. Следовательно,

$$\frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_1\lambda_1 + \frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1} + \bar{B}\lambda_2 + \frac{P}{16} \le \frac{5P}{16}.$$

Таким образом, при данном выборе параметров для x^i таких, что $|x^i - x_k| \le b\lambda_1$, получаем

$$\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) \ge a\Delta^{\min} - \frac{5P}{16} > P. \tag{3.2}$$

Введем множество $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{l}\{x\colon |x - x_k| \le K\}$. Используя оценку из п. (а) леммы 1 и условие аппроксимации (3.1), для $x^i \notin Q$ имеем

$$\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_1\lambda_1 + \frac{P}{16} \le \frac{3P}{16} < P. \tag{3.3}$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. алгоритм ΠD_Δ должен найти приближения x_1^δ, x_2^δ для точек x_1, x_2. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом алгоритм ΠD_Δ должен найти l точек. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций f, для которых выполнено условие разделимости: $x_2 - x_1 \ge h(\delta) > 3K$.

Согласно (3.2) во всех точках сетки x^i таких, что $|x^i - x_k| \le b\lambda_1$, имеем $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) > P$. Поскольку шаг сетки $\Delta x = b\lambda_1$, то для любого k на отрезке $[x_k - b\lambda_1, x_k + b\lambda_1]$ найдется точка сетки $x^i < x_k$. Следуя алгоритму ΠD_Δ, пусть x^i первая точка сетки, в которой $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) \ge P$. Так как $x_1 < x_2$, то $x^i < x_1$. Заметим, что x^i не обязательно принадлежит отрезку $[x_1 - b\lambda_1, x_k + b\lambda_1]$, но $|x^i - x_1| \le K$, согласно оценке (3.3). Следовательно, x_1 принадлежит отрезку $[x^i, x^i + K] =: [a_1, a_1 + K]$.

Далее, следуя алгоритму ΠD_Δ, положим $i := i + \lceil 2K/\Delta x\rceil$, т. е. $x^i = a_1 + \lceil 2K/\Delta x\rceil \Delta x$. Ясно, что $x^i - x_1 > K$. Покажем, что $x^i < x_2$. Используя условие разделимости, имеем

$$x_2 - x^i = x_2 - a_1 - \lceil 2K/\Delta x\rceil\Delta x > x_2 - x_1 - \lceil 2K/\Delta x\rceil\Delta x$$

$$\ge x_2 - x_1 - 2K - \Delta x \ge x_2 - x_1 - h \ge 0.$$

Следовательно, $x^i < x_2$. Далее, согласно (3.2), найдется точка сетки x^i такая, что $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) \ge P$. Следуя (3.3), $x_2 - x^i \le K$, т. е. $x_2 \in [x^i, x^i + K] =: [a_2, a_2 + K]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + \lceil 2K/\Delta x\rceil\Delta x, d]$. Ясно, что он не содержит точек множества Q. Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Выберем в качестве x_k^δ точку сетки x^i, в которой сеточная функция $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}$ принимает наибольшее значение на отрезке $[a_k, a_k + K]$. Для всех точек x^i таких, что $|x^i - x_k| \le b\lambda_1$, согласно п. (б) леммы 1, при данном выборе параметров имеем следующую оценку снизу для функции $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}$:

$$\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) \ge a|\Delta_k(\bar{y})| - \frac{5P}{16} \ge \frac{27a|\Delta_k(\bar{y})|}{32}.$$

С другой стороны, оценим сверху функцию $\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x)$ для $x \notin [x_k - V, x_k + V]$, где $V = 2\lambda_1(1 + M_1^2)^{1/2} = \widetilde{D}\delta^{4/3}$. Используя лемму 2 и предыдущую оценку, имеем

$$\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x) \leq \frac{a|\Delta_k(\bar{y})|}{2} + \frac{5P}{16} \leq \frac{11a|\Delta_k(\bar{y})|}{32}.$$

Следовательно, точка x_k^δ принадлежит отрезку $[x_k - V, x_k + V]$, т. е. получаем окончательную оценку $|x_k - x_k^\delta| \leq \widetilde{D}\delta^{4/3}$. □

Заключение. В работах [5–7] оценка точности локализации и величина $h(\delta)$ имеют порядок $O(\delta)$. В настоящей статье благодаря модификации метода локализации и усовершенствованию оценки удалось получить для точности локализации порядок $O(\delta^{4/3})$ при худшем порядке $O(\delta^{2/3})$ для функции $h(\delta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
2. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / под ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
3. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
4. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p.
5. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
6. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
7. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Методы аппроксимации линий разрыва зашумленной функции двух переменных со счетным числом особенностей // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2(62). С. 3–11. doi: 10.17377/sibjim.2015.18.201.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.
9. **Ageev A. L., Antonova T. V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21, no. 2. P. 177–191. doi: 10.1515/jip-2012-0039.
10. **Курликовский Д. В., Агеев А. Л., Антонова Т. В.** Исследование порогового (корреляционного) метода и его приложение к локализации особенностей // Сиб. электрон. мат. известия. 2016. Т. 13. С. 829–848. doi: 10.17377/semi.2016.13.066 .

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Поступила 22.12.2016

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way.* New York, Academic Press, 1999, 620 p. ISBN: 0-12-466606-X. Translated under the title *Vjejvlety v obrabotke signalov*, Moscow, Mir Publ., 2005, 671 p.
2. Furman Ya.A. (ed.) *Vvedenie v konturnyi analiz i ego prilozheniya k obrabotke izobrazhenii i signalov* [Introduction to contour analysis and its applications to image and signal processing]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 596 p. ISBN 5-9221-0255-9.

3. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Utrecht, VSP, 2002, 281 p. ISBN-10: 906764367X. Original Russian text published in *Teorija linejnyh nekorrektnyh zadach i ee prilozhenija*, M.: Nauka, Publ., 1978, 206 p.
4. Vasin V. V., Ageev A. L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht: VSP, 1995, 255 p.
5. Antonova T.V. Localization method for lines of discontinuity of an approximately defined function of two variables. *Numer. Analys. Appl.* , 2012, vol. 5, no. 4, pp. 285–296. doi: 10.1134/S1995423912040015 .
6. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables. *J. App. Ind. Math.*, 2012, vol. 6, iss. 3, pp. 269–279. doi: 10.1134/S1990478912030015 .
7. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines for a noisy function of two variables with countably many singularities. *J. Appl. Ind. Math.*, 2015, vol. 9, no. 3, pp. 297–305. doi: 10.1134/S1990478915030011.
8. Ageev A.L., Antonova T.V. On ill-posed problems of localization of singularities. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 30–45 (in Russian).
9. Ageev A.L., Antonova T.V. New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 177–191. doi: 10.1515/jip-2012-0039 .
10. Ageev A.L., Antonova T.V., Kurlikovskii D.V. Research of a threshold (correlation) method and application for localization of singularities. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 829–848. doi: 10.17377/semi.2016.13.066 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on December 22, 2016.

Aleksandr Leonidovich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tat'yana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .