ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.928

УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ-II КАК МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ[1]

Л. А. Калякин

Рассматривается система дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие двух слабо связанных нелинейных осцилляторов. Начальные данные таковы, что при отсутствии связи один из осцилляторов находится вдали от равновесия, а другой вблизи равновесия; при этом собственные частоты близки. Исследуется эффект захвата в резонанс, когда частоты связанных осцилляторов остаются близкими, а амплитуды колебаний значительно меняются со временем, в частности, второй осциллятор уходит далеко от равновесия. Выяснено, что начальный этап захвата в резонанс описывается решением уравнения Пенлеве-II. Такое описание получено в асимптотическом приближении по малому параметру, который соответствует коэффициенту связи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, малый параметр, асимптотика, осцилляция, резонанс.

L. A. Kalyakin. Painleve II equation as a model of a resonant interaction of oscillators.

We consider a system of differential equations that describes the interaction of two weakly connected nonlinear oscillators. The initial data are such that, if the connection is absent, the first oscillator is far from equilibrium and the second oscillator is near equilibrium; the eigenfrequencies of the oscillators are close to each other. The capture into resonance is investigated, when the frequencies of the connected oscillators remain close and the amplitudes of their oscillations undergo significant time variations; in particular, the second oscillator moves far from the equilibrium. We find that the initial stage of the resonance capture is described by a solution of the second Painleve equation. The description is obtained under an asymptotic approximation with respect to a small parameter corresponding to the connection factor.

Keywords: nonlinear equation, small parameter, asymptotics, oscillation, resonance.

MSC: 34E10, 34E13
DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-104-116

1. Введение. Постановка задачи

Исходный объект – система двух слабо связанных нелинейных осцилляторов. Предполагается, что при отсутствии связи один осциллятор колеблется вдали от равновесия, второй находится вблизи устойчивого равновесия, и их частоты близки (резонансное условие). Исследуется явление захвата в резонанс, когда при наличии связи частоты осцилляторов остаются близкими в течение продолжительного времени. Результатом захвата оказывается значительное изменение энергии колебаний; в частности, второй осциллятор уходит далеко от равновесия. Резонансные эффекты такого типа обнаруживаются уже в простейшей модели с линейными связями. Исследование проводится на примере системы, задаваемой уравнениями Ньютона:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x-2x^3=\varepsilon[f_0\xi+f_1\dot{\xi}],\quad \frac{d^2\xi}{dt^2}+\omega^2\xi-w\xi^3=\varepsilon[g_0x+g_1\dot{x}],\quad t>0,\quad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{1.1}$$

Здесь $\omega, w, f_0, f_1, g_0, g_1 = \mathrm{const}$. Правые части рассматриваются как возмущения с параметром ε, малость которого соответствует слабой связи. Конкретная структура уравнений в форме (1.1) не принципиальна; результаты можно перенести на общие системы осцилляторов с нелинейными возмущениями.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01004).

Напомним, что в подобных задачах для гамильтоновых систем возмущенные траектории (при $\varepsilon > 0$) большей частью находятся на торах, близких к невозмущенным. КАМ теория дает их описание в терминах условно-периодических функций на бесконечном временном промежутке [1;2]. Для рассматриваемого примера такая ситуация возникает при отсутствии первых производных ($f_1 = g_1 = 0$), когда можно выписать возмущенный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2g_0}\dot{x} + \frac{1}{2f_0}\dot{\xi} + \frac{g_0}{2}(x^2 - x^4) + \frac{f_0}{2}\Big(\xi^2 - \frac{w\xi^4}{2}\Big) - \varepsilon f_0 g_0 x\xi.$$

Под действием возмущения торы деформируются; величина деформации зависит от наличия резонансов. В частности, для обсуждаемой задачи деформация амплитуды колебаний вблизи равновесия может достигать порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$. Такие эффекты со значительным (по сравнению с ε) изменением амплитуды или энергии связываются с понятием нелинейного резонанса[2].

В теории нелинейных колебаний резонансные эффекты принято выявлять не из рядов КАМ теории, а путем асимптотического анализа решения при $\varepsilon \to 0$ с использованием идеи многомасштабных разложений. Асимптотическая конструкция в главном члене обычно соответствует усреднению по быстрым переменным [3; 4]. Одно из преимуществ такого подхода заключается в том, что для начальных данных нет ограничений, которые возникают в КАМ теории. Правда, при этом не гарантируется свойство условной периодичности решения. Более того, возникают ограничения на длину временного промежутка, на котором можно обосновать асимптотику. Он оказывается конечным, хотя и большим при малом возмущении, например, порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$ в рассматриваемой задаче. Но главное преимущество метода усреднения — не нужна гамильтоновость возмущенной системы; в частности, в правые части (1.1) можно включить производные. Резонансные эффекты от негамильтоновых возмущений могут оказаться более сильными. Так, в примере (1.1) при $f_0 g_1 + g_0 f_1 < 0$ осциллятор, стартующий вблизи равновесия, выходит на колебания с медленным ростом энергии, которая достигает величины порядка единицы за время $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Под энергией здесь понимается функция двух переменных, определяющая первый интеграл невозмущенного уравнения. Такие решения обнаруживаются в численных экспериментах (см. рисунок слева). В них наряду с деформацией амплитуды наблюдается значительное изменение частот колебаний, при том что резонансное соотношение между частотами сохраняется. Ситуация напоминает известное явление авторезонанса (автофазировки), когда нелинейный осциллятор автоматически подстраивается под медленно меняющуюся внешнюю накачку, долго оставаясь в резонансе и значительно меняя свою энергию [5;6].

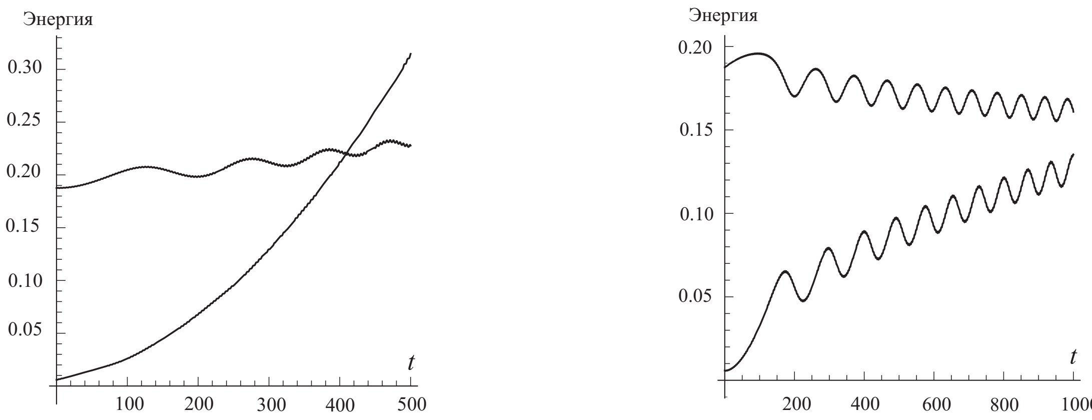
В данной работе для автономной системы (1.1) методом усреднения анализируется начальный этап захвата в резонанс. Главный результат состоит в появлении второго уравнения Пенлеве (называемого далее PII), которое описывает медленную эволюцию усредненной системы. Известная для этого уравнения асимптотика общего решения на бесконечности [7] позволяет сформулировать условия захвата в терминах коэффициентов возмущения f_k, g_k.

Если ориентироваться на строгую постановку задачи с обоснованием асимптотики, то дифференциальные уравнения следует дополнить начальными условиями в виде

$$x(0) = x_0 + \varepsilon^{2/3}x_1, \quad \dot{x}(0) = y_0 + \varepsilon^{2/3}y_1, \quad \xi(0) = \varepsilon^{1/3}\xi_1, \quad \dot{\xi}(0) = \varepsilon^{1/3}\eta_1. \qquad (1.2)$$

В предельной форме (при $\varepsilon = 0$) они фиксируют невозмущенное решение. Начальная точка для первого осциллятора (x_0, y_0) предполагается отличной от равновесия; она определяет частоту невозмущенных колебаний Ω_0. Дополнительные слагаемые определяют допустимые возмущения начальных данных. Значения x_1, y_1, ξ_1, η_1 берутся из произвольного компакта, не зависящего от ε. Предлагаемые ниже конструкции описывают асимптотику по малому параметру ε равномерно для пучка траекторий, стартующих из малой окрестности невозмущенной точки $(x_0, y_0, 0, 0)$. От компакта зависит оценка остатка асимптотики в теоремах обоснования.

[2]Вдали от равновесия характерный масштаб нелинейного резонанса несколько иной: $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$, (см. [8–12]).



Изменение энергии двух слабо связанных осцилляторов в резонансе при $\varepsilon = 10^{-2}$. Слева $f_1g_0+g_1f_0 < 0$; справа $f_1g_0 + g_1f_0 > 0$, $(\omega, f_k, g_k \approx 1,\ w = 0.1)$.

Забегая вперед, укажем, что в рассматриваемой задаче не возникает проблемы по нахождению области захвата — точек, из которых стартуют резонансные траектории. В отличие от известных результатов по авторезонансу здесь захват в резонанс если случается, то для почти всех x_1, y_1, ξ_1, η_1 из фиксированного компакта.

2. Переменные типа энергия-угол

Для асимптотического анализа задачи удобно использовать фазовое пространство с переменными типа энергия-угол и амплитуда-угол. Соответствующая математическая модель записывается в виде системы четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{dE}{dt} = \varepsilon F(E,r,\phi,\psi), &&\frac{d\phi}{dt} = \Omega(E) + \varepsilon\Phi(E,r,\phi,\psi),\\ &\frac{dr}{dt} = R(r,\psi) + \varepsilon g(E,\phi,\psi), &&r[\frac{d\psi}{dt} - \omega] = W(r,\psi) + \varepsilon\Psi(E,\phi,\psi). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Переход от (1.1) к системе (2.1) можно выполнять разными способами. Для первого осциллятора выгодно использовать общее решение невозмущенного уравнения, параметризованное значением первого интеграла (энергией): $\dot{x}^2 + x^2 - x^4 = E$. Вычислив значения E в неподвижных точках и проанализировав фазовый портрет, можно заключить, что фазовые траектории замкнуты при $0 < E < 1/4$ и поэтому соответствуют периодическим решениям $x = \hat{x}(t, E)$. Период зависит от E и определяется по формуле

$$T(E) = 4\int\limits_0^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 + x^4}}\ ,$$

где $x_+(E)$ — наименьший положительный корень уравнения $x^4 - x^2 + E = 0$. Соответственно определяется частота $\Omega(E) = 2\pi/T(E)$. Это семейство периодических решений $\hat{x}(t, E)$ можно идентифицировать начальными условиями

$$\dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = \sqrt{E}, \quad 0 < E < 1/4.$$

Из фазового портрета видно, что определенная таким образом функция $\hat{x}(t, E)$ будет четной по t, а производная $\partial_t\hat{x}(t, E)$ нечетной. Для второго осциллятора удобно использовать решение уравнения, линеаризованного вблизи равновесия: $\hat{\xi}(t, r) = r\cos(\omega t)\ \forall\, r = \mathrm{const} > 0$.

Введенные таким образом функции приводятся к периоду 2π по угловым переменным ϕ, ψ :

$$X(\phi, E)^{def} = \hat{x}((\phi/\Omega(E), E), \quad r\cos\psi = \hat{\xi}(\psi/\omega, r).$$

Эти функции используются для замены переменных в исходных возмущенных уравнениях (1.1) по формулам

$$x(t) = X(\phi(t), E(t)), \quad \xi(t) = r(t)\cos(\psi(t)).$$

Фактически такая операция представляет собой применение метода вариации произвольных постоянных. Структура получаемых уравнений (2.1) зависит от выбора формул для замены производных. Например, при выборе

$$\dot{x}(t) = Y(\phi, E)^{def} = \partial_t \hat{x}(t, E)|_{t=\phi/\Omega} \equiv \Omega(E)\partial_\phi X(\phi, E), \quad \dot{\xi}(t) = -\omega r(t)\sin(\psi(t)$$

получаются уравнения (2.1) с функциями

$$\begin{aligned} &F = rY(\phi, E)[f_0\cos\psi - f_1\omega\sin\psi], && g = -\sin\psi\,\frac{1}{\omega}\,[g_0X(\phi, E) + g_1Y(\phi, E)],\\ &R = -\frac{1}{\omega}wr^3\cos^3\psi\sin\psi, && W = -\frac{1}{\omega}wr^3\cos^4\psi;\\ &\Phi = \Omega(E)\partial_E X(\phi, E)[f_0 r\cos\psi - f_1\omega r\sin\psi], && \Psi = -\cos\psi\,\frac{1}{\omega}\,[g_0X(\phi, E) + g_1Y(\phi, E)]. \end{aligned}$$

Уравнения дополняются начальными данными, соответствующими (1.2):

$$\begin{aligned} &E|_{t=0} = E_0 + \varepsilon^{2/3}E_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3}), && r|_{t=0} = \varepsilon^{1/3}r_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}),\\ &\phi|_{t=0} = \phi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), && \psi|_{t=0} = \psi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Задача состоит в построении асимптотики решения при $\varepsilon \to 0$ на большом промежутке времени.

З а м е ч а н и е. Переменные амплитуда-угол r, ψ соответствуют полярным координатам на фазовой плоскости. В таких переменных уравнение для фазы ψ вырождается при $r = 0$. Поэтому для корректности возмущенной задачи уравнения следует дополнить условием скачка для фазы ψ при прохождении через значение $r = 0$. Скачок берется равным π из соображений гладкости траектории при прохождении через начало координат:

$$\text{если} \quad \lim_{t\to t^*-0} r(t) = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{t\to t^*+0}\psi(t) = \lim_{t\to t^*-0}\psi(t) + \pi.$$

Если в начальной точке $r(0) = 0$, то начальное условие для ψ не ставится. Впрочем, в асимптотических конструкциях мы интересуемся значениями $r(t) \neq 0$, поэтому условие скачка не используется. При численных экспериментах удобно пользоваться соответствующими уравнениями в декартовых координатах, где никакого вырождения не бывает.

3. Подходы к решению задачи

Специфика задачи определяется ограничениями на исходные данные. Основным ограничением является *условие резонанса* — совпадение частот невозмущенных колебаний $\Omega(E_0) = \omega$. Подобные задачи о возмущении нелинейных осциллирующих систем давно и обстоятельно исследованы в одночастотном случае (с одной быстрой переменной), см. например, [12]. Особенностью рассматриваемой задачи является наличие двух быстрых угловых переменных ϕ, ψ. В общей ситуации здесь неизбежно появление малых знаменателей и связанных с этим проблем. Однако свойство начального совпадения частот $\Omega(E_0) = \omega$ приводит к эффекту захвата в резонанс, когда резонансное соотношение сохраняется длительное время, хотя каждая из частот меняется значительно. В таком случае можно выделить одну быструю переменную, и дело сводится к одночастотной ситуации.

Для одночастотной системы с быстро осциллирующим (неавтономным) возмущением эффект захвата в резонанс хорошо изучен (см. обзор [6]). Известные результаты основаны на исследовании модельных уравнений, которые возникают при усреднении. Захват в резонанс описывается решениями с неограниченно растущей амплитудой. При этом существенным оказывается свойство неавтономности усредненных уравнений, обязанное медленной деформации либо параметров невозмущенной системы, либо параметров возмущения, например, деформации заданной частоты возмущения. Во многих ситуациях усредненная система оказывается неинтегрируемой, что препятствует полному исследованию проблемы захвата в резонанс.

В рассматриваемой здесь задаче возмущения берутся автономными. Однако каждый из осцилляторов, находясь под воздействием другого, фактически оказывается под неавтономным возмущением. Асимптотические конструкции приводят к специфической системе модельных уравнений, которая редуцируется к уравнению PII. Известные результаты об асимптотике общего решения этого уравнения [7; 13] обеспечивают исчерпывающее исследование проблемы захвата в резонанс. Отметим, что для системы осцилляторов вдали от равновесия возникает более простое интегрируемое автономное уравнение типа маятника; подобная задача исследована в [14; 15].

4. Асимптотические конструкции

4.1. Анзатц

Для углов вводится разность $s = \psi - \phi$, и исходные уравнения (2.1) переписываются для четверки функций E, r, s, ϕ: Получается система, похожая на ту, что анализировалась в [14;15]:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon F(E, r, \phi, \phi + s), \quad \frac{dr}{dt} = R(r, \phi + s) + \varepsilon g(E, \phi, \phi + s),$$
$$r\Big[\frac{ds}{dt} + \Omega(E) - \omega\Big] = W(r, \phi + s) + \varepsilon[\Psi(E, \phi, \phi + s) - r\Phi(E, r, \phi, \phi + s)],$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega(E) + \varepsilon\Phi(E, r, \phi, \phi + s).$$

Специфика рассматриваемой здесь задачи связана с наличием равновесия для одного из невозмущенных осцилляторов $r = 0$. Это проявляется в структуре третьего уравнения. При приведении к нормальной форме оно имеет особенность при $r \to 0$, поскольку функция $\Psi \not\equiv 0$ и не зависит от r. Такое вырождение приводит к значительным отличиям от результатов [14; 15].

Анзатц для асимптотического решения[3] берется в виде рядов по степеням малого параметра

$$E = E_0 + \varepsilon^{2/3}\mathcal{E}(\tau) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\mathcal{E}_k(\tau, \phi),$$
$$r = \varepsilon^{1/3}\rho(\tau) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\rho_k(\tau, \phi), \quad s = \sigma(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\sigma_k(\tau, \phi), \tag{4.1}$$
$$\phi = \omega t + \varphi(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\varphi_k(\tau, \phi). \quad \tau = \varepsilon^{2/3}t$$

с коэффициентами, периодическими по быстрой переменной ϕ. Масштабы амплитуды $r(t) \approx \varepsilon^{1/3}$ и медленного времени $\tau = \varepsilon^{2/3}t$ соответствуют известным результатам о начальном этапе захвата в резонанс вблизи равновесия [6]. Отметим, что степени ε, кратные $1/3$, обязаны кубическому резонансу в нелинейном осцилляторе вблизи равновесия [6], а не начальным условиям. Более того, анзатц (4.1) позволяет уточнить допустимые в таком подходе возмущения начальных данных. Попросту говоря, начальные условия в форме (2.2) берутся из согласования с анзатцем (4.1).

[3]Термин “асимптотическое решение” используется, чтобы избежать дискуссии по обоснованию асимптотики. Впрочем, вопрос обоснования можно считать решенным, например, в [16, с. 138].

Проблема состоит в выявлении условий, при которых поправка в энергии $|\mathcal{E}(\tau)|$ и главный член асимптотики амплитуды $\rho(\tau)$ неограниченно растут при $\tau \to \infty$. Неограниченно растущие по τ асимптотики соответствуют начальному росту резонансных решений, дальнейшую эволюцию которых следует анализировать в более медленном масштабе εt. Далекая эволюция резонансных решений выходит за рамки данной работы; подобная задача в одночастотном случае решена в [17].

4.2. Усредненные уравнения

Формальные построения полной асимптотики в виде бесконечных рядов можно выполнять разными способами. Отличия разных подходов обнаруживаются лишь в старших поправках. Они соответствуют возможности переразложения асимптотических рядов за счет зависимости от параметра ε в быстрой фазе ϕ. Впрочем, конструкция старших поправок не содержит новизны и здесь не обсуждается. Принципиальный вопрос о захвате в резонанс решается на уровне главного члена асимптотики.

Главные члены асимптотики определяются из усредненных уравнений, которые имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \rho\big[F_c\cos\sigma + F_s\sin\sigma\big],\\ \frac{d\rho}{d\tau} = G_s\sin\sigma + G_c\cos\sigma, \quad \rho\Big[\frac{d\sigma}{d\tau} + \Lambda\mathcal{E} - \lambda\rho^2\Big] = G_s\cos\sigma - G_c\sin\sigma,\\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \Lambda\mathcal{E},\end{gathered} \tag{4.2}$$

с соответствующими начальными данными

$$\mathcal{E}|_{\tau=0} = E_1, \quad \rho|_{\tau=0} = r_1, \quad \sigma|_{\tau=0} = s_0, \quad \varphi|_{t=0} = \phi_0.$$

Коэффициенты определяются через интегралы Фурье и вычисляются по формулам

$$F_c = -f_1\omega Y_s, \quad F_s = -f_0 Y_s, \quad G_c = -\frac{g_1}{\omega}Y_s, \quad G_s = \frac{g_0}{\omega\Omega(E_0)}Y_s,$$

где

$$Y_s = \langle Y(\phi, E_0)\sin\phi\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Y(\phi, E_0)\sin\phi\, d\phi.$$

Константы Λ, λ характеризуют нелинейные поправки к собственным частотам исходных невозмущенных осцилляторов. Они определяются из структуры невозмущенных уравнений:

$$\Lambda = \Omega'(E_0), \quad \lambda = -\frac{1}{\omega}w\langle\cos^4\phi\rangle = -\frac{1}{\omega}3w/8.$$

Как видим, первые три уравнения в (4.2) образуют замкнутую систему. Локальная разрешимость задачи Коши не вызывает сомнения. При исследовании нелинейных колебаний на этом этапе зачастую и останавливаются, предъявляя асимптотическое разложение (4.1) на конечном промежутке медленного времени $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 = \mathrm{const} < \infty$. Однако в задаче о захвате в резонанс интерес представляет поведение при $\tau \to \infty$ медленно меняющихся коэффициентов в рядах (4.1). Точнее, требуется найти условия, при которых неограниченно растут коэффициенты, соответствующие энергии и амплитуде в главных членах асимптотики.

5. Анализ главных членов асимптотики

5.1. Редукция к уравнению Пенлеве

Система уравнений (4.2) имеет первый интеграл. Он легко обнаруживается, если использовать декартовы координаты вместо полярных ρ, σ. Наиболее простой вид уравнения приобретают при использовании нормирующего множителя $|G| = \sqrt{G_c^2 + G_s^2}$. Заметим, что в случае

$|G| = 0$ имеется тривиальный интеграл $\rho = \mathrm{const}$, и система сводится к уравнению математического маятника. Этот случай не представляет интереса ввиду постоянства амплитуды ρ.

В общем случае при $|G| \neq 0$ делается замена переменных

$$z = \Lambda\mathcal{E} - \lambda\rho^2, \quad u = \rho(G_s \sin\sigma + G_c \cos\sigma)|G|^{-2}, \quad v = \rho(G_s \cos\sigma - G_c \sin\sigma)|G|^{-2}.$$

Если учесть вытекающие отсюда соотношения $\rho \sin\sigma = G_s u - G_c v$, $\rho\cos\sigma = G_c u + G_s v$, то система уравнений для функций u, v, z приобретает вид

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - vz, \quad \frac{dv}{d\tau} = uz, \quad \frac{dz}{d\tau} = \mu\, u + \nu\, v \tag{5.1}$$

с константами $\mu = \Lambda(F_s G_s + F_c G_c) - 2\lambda|G|^2$, $\nu = \Lambda(F_c G_s - F_s G_c)$.

В таких переменных первый интеграл определяется выражением

$$J = \frac{1}{2}z^2 + (\nu u - \mu v) - \nu\tau. \tag{5.2}$$

С использованием этого интеграла система трех уравнений из (4.2) сводится к уравнению второго порядка. Наиболее просто это получается дифференцированием первого уравнения, которое с учетом остальных уравнений приобретает вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \mu\frac{du}{d\tau} + \nu\frac{dv}{d\tau} = \mu(1 + vz) + \nu uz = \mu + z(\nu u - \mu v).$$

Если здесь использовать выражение для первого интеграла, то приходим к уравнению

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = z(J + \nu\tau - \frac{1}{2}z^2) + \mu, \tag{5.3}$$

которое представляет общую форму уравнения PII с параметрами $J, \mu, \nu = \mathrm{const}$.

Отметим, что система, похожая на (5.1), возникала ранее при описании электрического поля в полупроводнике [18]; в этой же работе указан переход к уравнению PII.

Легко понять, что сдвигом по τ уравнение (5.3) приводится к стандартной форме с двумя параметрами[4]. Знак коэффициента ν играет решающую роль в структуре асимптотики общего решения при $\tau \to \infty$. Эта константа вычисляется по формуле

$$\nu = \Lambda(F_c G_s - F_s G_c) = -\Omega'(E_0)\frac{1}{\omega}[f_1 g_0 + g_1 f_0]Y_s^2.$$

Интеграл $Y_s = \langle Y(\phi, E)\sin\phi\rangle \neq 0$ не обращается в нуль ввиду нечетности функции $Y(\phi, E_0)$. Для первого осциллятора, рассматриваемого вдали от равновесия, частота убывает с ростом энергии, так что $\Omega'(E) < 0$. Поэтому знак константы ν определяется знаком комбинации из коэффициентов возмущения: $\mathrm{sgn}(\nu) = \mathrm{sgn}(f_1 g_0 + g_1 f_0)$.

5.2. Системы без захвата в резонанс

В частном случае, когда $\nu = 0$, уравнение PII оказывается автономным и интегрируется.

Теорема 1. *Если коэффициенты возмущения обладают свойством* $f_1 g_0 + g_1 f_0 = 0$, *то для системы* (4.2) *любое решение ограничено в компонентах энергии и амплитуды, а фаза растет*:

$$\mathcal{E}(\tau),\ \rho(\tau) = \mathcal{O}(1), \quad \sigma(\tau) = \varpi\,\tau + \mathcal{O}(1), \quad \tau \to \infty, \quad \varpi = \mathrm{const}.$$

Захват в резонанс отсутствует.

[4]Если $\nu \neq 0$, то масштабным преобразованием дело сводится к уравнению с $\nu = \pm 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu = 0$ уравнение (5.3) имеет первый интеграл

$$I = \frac{1}{2}\Big(\frac{dz}{d\tau}\Big)^2 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}Jz^2 - \mu z.$$

Отсюда следует, что фазовая траектория $z, \dot z$ на любом решении $z(\tau)$ будет ограничена. Кроме того, первый интеграл (5.2) при $\nu = 0$ приобретает вид $J = 1/2\, z^2 - \mu v$. Отсюда вытекает ограниченность компоненты $v(\tau)$. Из первого уравнения системы (5.1) следует ограниченность компоненты $u(\tau)$. Поскольку $\rho^2 = (u^2 + v^2)|G|^2$, то на любом решении ограничена компонента $\rho(\tau)$. Наконец, из выражения $z = \Lambda\mathcal{E} - \lambda\rho^2$ следует ограниченность $\mathcal{E}(\tau)$.

Фазовый портрет уравнения (5.3) в автономном случае состоит из замкнутых траекторий, за исключением двух сепаратрис. Поэтому общее двухпараметрическое решение $z(\tau)$ будет периодической функцией. Из уравнений (5.1) и интеграла (5.2) следует, что при $\mu \neq 0$ тот же период имеют функции $u(\tau) = \mu^{-1}\dot z,\ v(\tau) = \mu^{-1}[z^2/2 - J]$. В таком случае периодическими будут $\rho^2(\tau) = (u^2 + v^2)|G|^2$ и сложные функции $\cos\sigma(\tau),\ \sin\sigma(\tau)$. После этого из последнего уравнения системы (4.2) следует периодичность производной $\dot\sigma(\tau)$, которая определяет разность частот двух осцилляторов. Среднее значение этой функции не обязано быть нулем, поэтому первообразная $\sigma(\tau)$, определяющая разность фаз, может отличаться от периодической функции слагаемым $\varpi\tau$. Коэффициент ϖ будет кратным частоте рассматриваемого решения $z(\tau)$ ввиду известного периода сложных функций $\cos\sigma(\tau),\ \sin\sigma(\tau)$. Теорема доказана.

5.3. Системы с захватом в резонанс

Иная ситуация возникает в ситуации общего положения, когда $f_1g_0 + g_1f_0 \neq 0$. Первый интеграл и уравнение PII оказываются неавтономными из-за $\nu \neq 0$, и соответствующие решения не будут периодическими. Их асимптотика зависит от знака коэффициента ν.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты возмущения обладают свойством $f_1g_0 + g_1f_0 < 0$. Тогда для системы уравнений* (1.1) *существует четырехпараметрическое семейство асимптотических решений* (4.1)*, у которых неограниченно растут энергия и амплитуда, а фаза стабилизируется*:

$$\mathcal{E}(\tau) = \frac{\lambda}{\Lambda}\frac{\nu^2}{(\nu^2 + \mu^2)}|G|^2\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^{3/4}), \quad \rho(\tau) = \frac{-\nu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}}|G|\tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}),$$

$$\sigma(\tau) = \mathrm{const} + \mathcal{O}(\tau^{-3/4}), \quad \tau \to \infty.$$

Главные члены растущей асимптотики не зависят от выбора решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В данном случае $\nu < 0$. Асимптотика двухпараметрического решения уравнения PII в главном описывается функциями Эйри [7] (см. также [13, с. 377]):

$$z(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \dot z(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \to \infty.$$

Два параметра общего решения содержатся в остатках асимптотики и здесь не выделяются. Отсюда получаем два асимптотических соотношения

$$\mu u + \nu v = \dot z = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \nu u - \mu v = \nu\tau + J - \frac{1}{2}z^2 = \nu\tau + \mathcal{O}(1).$$

Из них вытекают асимптотики для двух компонент решения

$$u(\tau) = \frac{\nu^2}{\nu^2 + \mu^2}\tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad v(\tau) = -\frac{\mu\nu}{\nu^2 + \mu^2}\tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \to \infty.$$

Следовательно,

$$\rho^2 = (u^2+v^2)|G|^2 = \frac{\nu^2}{\nu^2+\mu^2}|G|^2\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^{3/4}).$$

Отсюда с учетом $z = \Lambda\mathcal{E} - \lambda\rho^2$ следуют требуемые соотношения для $\mathcal{E}(\tau)$ и $\rho(\tau)$. Два параметра общего решения уравнения PII, а также значение первого интеграла J содержатся в остатках асимптотики и не влияют на коэффициент при главном члене. Четвертый параметр определяет сдвиг фазы при интегрировании отдельного уравнения для быстрой фазы φ.

С учетом полученных асимптотик для $z(\tau), \rho(\tau)$ из последнего уравнения системы (4.2) следует убывание производной $\dot\sigma(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-1/4})$, $\tau\to\infty$. Это означает, что частоты двух осцилляторов со временем сближаются, а величина $\sigma(\tau)$, определяющая сдвиг фаз, стабилизируется[5]

$$\sigma(\tau) = \mathrm{const} + \mathcal{O}(\tau^{-3/4}), \quad \tau\to\infty.$$

Указанная здесь оценка остатка не следует из формального интегрирования приведенной выше грубой асимптотики для производной. При получении этой оценки надо учитывать быстроосциллирующие множители. Это можно делать либо путем построения полной асимптотики на бесконечности для решений системы (4.2) аналогично [19], либо путем оценок быстроосциллирующих интегралов, используя известную асимптотику PII [7]. Теорема доказана.

5.4. Медленный захват в резонанс

В случае $\nu > 0$ складывается ситуация, необычная для рассматриваемого круга задач.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты возмущения обладают свойством* $f_1g_0 + g_1f_0 > 0$. *Тогда для системы уравнений* (1.1) *существует четырехпараметрическое семейство асимптотических решений* (4.1), *у которых неограниченно растут энергия, амплитуда и фаза*:

$$\mathcal{E}(\tau) = c^2\tau^{1/2}\mathcal{E}_0[1+o(1)], \quad \rho(\tau) = c\,\tau^{1/4}\rho_0[1+o(1)],$$
$$\sigma(\tau) = -\frac{3}{2}\sqrt{2\nu}\,\tau^{3/2}[1+\mathcal{O}(\tau^{-3/4})], \quad \tau\to\infty.$$

Главные члены этой асимптотики зависят от выбора решения посредством константы $c > 0$ — (*произвольного*) *амплитудного параметра решения* PII; *коэффициенты определяются формулами*

$$\rho_0 = |G|\sqrt{\frac{2\nu}{\mu^2+\nu^2}}, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{1}{\Lambda}\Big(\lambda\rho_0^2 + \sqrt{2\nu}\Big).$$

Доказательство. Теперь асимптотика общего решения уравнения Пенлеве в главном описывается формулами [7]

$$z(\tau) = \sqrt{2\nu\tau} + \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \dot z(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau\to\infty,$$

которые вытекают из анзатца Бутру. Аналогично предыдущему доказательству из этих соотношений можно извлечь оценки

$$\mathcal{E}(\tau),\, \rho^2 = \mathcal{O}(\tau^{1/2}), \quad \tau\to\infty.$$

Чтобы вычислить коэффициенты при главных членах асимптотики, надо учесть структуру первой поправки в анзатце Бутру [7] (см. также [13, с. 378]). В этой поправке удобно выделить амплитуду в виде произвольной константы $c > 0$ — параметра решения PII:

$$z(\tau) = \sqrt{2\nu}\tau^{1/2} + \tau^{-1/4}c\cdot\cos(\eta)[1+o(1)] + o(\tau^{-1/4}), \quad \tau\to\infty.$$

[5] В этом случае уместно говорить о “захвате в резонанс”.

Обратим внимание на структуру поправки, которая содержит осциллирующую функцию с быстрой фазой

$$\eta = \frac{2}{3}\sqrt{2\nu}\,\tau^{3/2} + \alpha(c)\log(\nu^{1/3}\tau) + \theta.$$

Здесь c, $\theta = \mathrm{const}$ — параметры решения PII (константы интегрирования), множитель $\alpha(c)$ в сдвиге фазы зависит от параметра решения c и вычисляется по известной формуле [13].

Из этой асимптотики вытекают соотношения

$$\dot z = -\tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}\,\sin\eta + o(1), \quad \frac{1}{2}z^2 - \nu\tau = \tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}\,\cos\eta + o(1).$$

Если их использовать в уравнении $\mu u + \nu v = \dot z$ и в первом интеграле $\nu u - \mu v = \nu\tau + J - \dfrac{1}{2}z^2$, то можно найти асимптотику компонент $u(\tau), v(\tau)$:

$$(\mu^2+\nu^2)u = -\tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}\,[\mu\sin\eta + \nu\cos\eta]\,[1+o(1)],$$

$$(\mu^2+\nu^2)v = -\tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}\,[\nu\sin\eta - \mu\cos\eta]\,[1+o(1)].$$

Отсюда для $\rho = |G|\sqrt{u^2+v^2}$ получается требуемая асимптотика, а из соотношения $\Lambda\mathcal{E} - \lambda\rho^2 = z$ выписывается асимптотика для $\mathcal{E}(\tau)$.

Как видим, параметр c из общего решения уравнения PII определяет коэффициенты главных членов асимптотического решения. Второй параметр θ, а также значение первого интеграла J не влияют на энергию и амплитуду в главном.

С учетом полученных асимптотик для $z(\tau), \rho(\tau)$ из последнего уравнения системы (4.2) получается растущая асимптотика для производной фазы

$$\dot\sigma(\tau) = \sqrt{2\nu}\,\tau^{1/2} + \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \tau\to\infty.$$

Это означает, что частоты двух осцилляторов со временем расходятся. Соответственно растет функция $\sigma(\tau)$, определяющая сдвиг фаз. Ее асимптотика с грубой оценкой остатка получается интегрированием последнего соотношения. Теорема доказана.

Из-за того, что растут три компоненты решения, полученный результат выглядит непривычно, и использование термина “захват в резонанс” требует пояснения.

Пояснение о резонансе. В физике под резонансом понимают явление роста амплитуды вынужденных колебаний, иногда этот рост объясняется близостью собственной и вынуждающей частоты. В математике подход более формализован. Под резонансом понимается соизмеримость частот, в частности, их совпадение. Рост амплитуды колебаний объявляется следствием соизмеримости частот. На уровне решений дифференциальных уравнений такое свойство проявляется в росте интегралов Фурье, как это случается в тривиальном примере с произведением периодических функций:

$$2\int_\pi^\tau \cos(\omega_1\eta)\cos(\omega_2\eta)\,d\eta = \tau + \mathcal{O}(1),\ \tau\to\infty \ \text{ при } \ \omega_1 = \omega_2.$$

Растущее слагаемое здесь обязано ненулевому среднему значению. При отсутствии резонанса, когда $\omega_1 \neq \omega_2$, среднее значение равно нулю, и интеграл ограничен при $\tau\to\infty$.

Для рассмотренной системы (2.1) при $\nu > 0$ результаты свидетельствуют о расхождение частот $\dot\psi - \dot\phi = \dot\sigma = \mathcal{O}(\sqrt{\tau})$, $\tau\to\infty$. Таким образом, резонанс между осцилляторами формально отсутствует, и термин “захват в резонанс” выглядит неуместным. Более того, в этом случае можно привести правдоподобные рассуждения о невозможности роста амплитуды $\rho(\tau)$. Для этой функции как решения дифференциального уравнения из (4.2) выписывается представление через интеграл от правой части:

$$\rho(\tau) = \rho(0) + \int_0^\tau [G_s\sin\sigma(\eta) + G_c\cos\sigma(\eta)]\,d\eta.$$

Под интегралом фигурируют тригонометрические функции от быстро растущей фазы $\sigma(\tau)$. Обычно такие интегралы ограничены, например, при $\sigma(\eta) = \eta^{\delta},\ \delta = \text{const} \geq 1$. В рассматриваемом случае главный член асимптотики фазы $\sigma(\eta)$ имеет как раз такую структуру с $\delta = 3/2$. Поэтому создается впечатление, что амплитуда $\rho(\tau)$, вычисляемая через быстро осциллирующий интеграл, должна быть ограничена при $\tau \to \infty$, что противоречит теореме 3.

Однако никакого противоречия не возникает, если учесть убывающие поправки в асимптотике фазы. Явление резонанса здесь выглядит более тонким, чем это принято считать в формальном подходе. В качестве иллюстрации можно привести похожий интеграл

$$J(\tau) = \int\limits_{\pi}^{\tau} \cos\left(\eta^{3/2} - \eta^{-3/4}\sin\eta^{3/2}\right) d\eta.$$

Если при вычислении асимптотики выкинуть из фазы часть, убывающую на бесконечности, то получается интеграл, ограниченный при $\tau \to \infty$. Но такой результат оказывается неверным. Правильная асимптотика вычисляется с использованием разложения Тейлора для подынтегральной функции при $\eta^{-3/4} \to 0$:

$$\cos\left(\eta^{3/2} + \eta^{-3/4}\sin\eta^{3/2}\right) = \cos\eta^{3/2} + \eta^{-3/4}\sin^2\eta^{3/2} + \mathcal{O}(\eta^{-3/2}), \quad \eta \to \infty.$$

В этом разложении с быстро осциллирующими коэффициентами присутствует слагаемое

$$\eta^{-3/4}\sin^2\eta^{3/2} = \frac{1}{2}\eta^{-3/4} - \frac{1}{2}\eta^{-3/4}\cos 2\eta^{3/2},$$

из-за которого в интеграле обнаруживается рост

$$J(\tau) = 2\tau^{1/4} + \mathcal{O}(1), \quad \tau \to \infty.$$

Таким образом, утверждение теоремы 3 никак не противоречит свойствам быстро осциллирующих интегралов. Оно лишь указывает, что резонанс не следует отождествлять с соизмеримостью или совпадением частот. Более подходящим является понятие резонанса в физике, и в этом смысле теорема 3 описывает захват в резонанс, которому соответствует рисунок справа (см. разд. 1).

6. Заключение

В данной работе для системы возмущенных осцилляторов исследован эффект захвата в резонанс в случае, когда в невозмущенной задаче один из осцилляторов находится в равновесии. Выяснено, что в асимптотическом описании процесса захвата главную роль играет уравнение PII, которое получается при усреднении. Для этого уравнения используется известный факт о единообразии (в главном) асимптотики на бесконечности общего решения. Такое свойство вместе с формулами связи [13] позволяет заключить, что захват в резонанс случается почти при всех начальных возмущениях (1.2). Именно в этом месте обнаруживается принципиальное отличие от задачи о захвате в резонанс вдали от равновесия. Напомним, что вдали от равновесия усредненная система сводится к уравнению типа маятника, у которого существуют решения разного типа, и область захвата в резонанс ограничена сепаратрисной петлей [14; 15]. Новым также является результат теоремы 3 о резонансе с медленным расхождением частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И.** Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 6 (114). С. 91–192.
2. **Трещев Д.В.** Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. М.: ФАЗИС, 1998. 181 с.

3. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. **Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.** Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
5. **Fajans J., Friedland L.** Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators // Am. J. Phys. 2001. Vol. 69, no. 10. P.1096–1102.
6. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 5. С. 3–72.
7. **Капаев А. А.** Асимптотические формулы для функций Пенлеве второго рода // Теорет. и мат. физика. 1988. Т. 77, № 3. С. 323–332.
8. **Джакалья Г.Е.** Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. **Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.** Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
10. **Рабинович М.И., Трубецков Д.И.** Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. 560 с.
11. **Чириков Б.В.** Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 5. С. 1015–1018.
12. **Нейштадт А.И.** О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 2. С. 197–204.
13. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А.Р. Итс, А.А. Капаев, В.Ю. Новокшенов, А.С. Фокас. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 727 с.
14. **Нейштадт А.И.** Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 198–218.
15. **Нейштадт А.И.** Усреднение, прохождение через резонансы и захват в резонанс в двухчастотных системах // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 5. С. 3–80.
16. **Арнольд В.И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
17. **Калякин Л.А.** Усреднение в модели авторезонанса // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 3. С. 449–452.
18. **Kudryashov N.A.** The second Painleve equation as a model for the electric field in a semiconductor // Physics Letters A. 1997. Vol. 233. P. 397–400.
19. **Калякин Л.А.** Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности // Уфим. мат. журн. 2009. Т. 1, № 2. С. 29–52.

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа
e-mail: klenru@mail.ru

Поступила 3.04.2017

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russ. Math. Surveys*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 85–191. doi: 10.1070/RM1963v018n06ABEH001143.
2. Treshchev D.V. *Vvedenie v teoriyu vozmushchenii gamil'tonovykh sistem* [Introduction to the theory of perturbations of Hamiltonian systems]. Moscow, FAZIS Publ., 1998, 181 p. ISBN: 5-7036-0045-6.
3. Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations.* New York, London: Gordon and Breach, Hindustan Publishing, 1961, 537 p. ISBN: 0677200501. Original Russian text published in *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii.* Moscow, Gos. Izd, Fiziko-Mat. Lit. Publ., 1958, 408 p.
4. Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics.* Berlin: Springer-Verlag, 1993, Ser. Encyclopaedia Math. Sci. 3, 291 p. Original Russian text published in *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki*, Moscow, VINITI Publ., 1985, 304 p.
5. Fajans J., Friedland L. Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators. *Am. J. Phys.*, 2001, vol. 69, no. 10, pp. 1096–1102.

6. Kalyakin L.A. Asymptotic analysis of autoresonance models. *Russ. Math. Surv.*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 791–857. doi: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004560 .
7. Kapaev A.A. Asymptotic expressions for the second Painlevé functions. *Theoret. and Math. Phys.*, 1988, vol. 77, no. 3, pp. 1227–1234. doi:10.1007/BF01016976 .
8. Giacaglia G.E.O. *Perturbation methods in non-linear systems.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1972, Ser. Appl. Math. Sci., vol. 8, 369 p. ISBN: 0387900543 . Translated under the title *Metody teorii vozmushchenii dlya nelineinykh sistem*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 319 p.
9. Zaslavskii G.M., Sagdeev R.Z. *Vvedenie v nelineinuyu fiziku* [Introduction to nonlinear physics]. *Ot mayatnika do turbulentnosti i khaosa.* [From the pendulum to turbulence and chaos]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 368 p. ISBN: 5-02-013822-3 .
10. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. *Vvedenie v teoriyu kolebanii i voln* [Introduction to the theory of oscillations and waves] , Moscow, Nauka Publ., 1984, 432 p.
11. Chirikov B.V. The passage of a nonlinear oscillating system through resonance. *Sov. Phys., Dokl.*, 1959, vol. 4, pp. 390–394.
12. Neishtadt A.I. The separation of motions in systems with rapidly rotating phase. *J. Appl. Math. Mech.*, 1984, vol. 48, no. 2, pp. 133–139. doi: 10.1016/0021-8928(84)90078-9 .
13. Fokas A.S., Its, A.R., Kapaev A.A., Novokshenov V.Yu. *Painlevé transcendents. The Riemann-Hilbert approach.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2006, Ser. Math. Surveys and Monographs, 128, 560 p. ISBN: 082183651X . Original Russian text published in *Transendenty Penleve. Metod zadachi Rimana.* Moskva-Izhevsk: NITs “Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika” Publ., 2005, 727 p.
14. Neishtadt A.I. Capture into resonance and scattering on resonances in two-frequency systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, vol. 250, pp. 183–203.
15. Neishtadt A.I. Averaging, passage through resonances, and capture into resonance in two-frequency systems. *Russ. Math. Surveys.*, 2014, vol. 69, no. 5, pp. 771–843.
16. Arnol’d V.I. *Dopolnitel’nye glavy teorii obyknovennykh differentsial’nykh uravnenij* [Supplementary chapters to the theory of ordinary differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 304 p.
17. Kalyakin L.A. Averaging in the autoresonance model. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 3, pp. 414–418. doi:10.1023/A:1023226330448 .
18. Kudryashov N.A. The second Painleve equation as a model for the electric field in a semiconductor. *Physics Letters A.*, 1997, vol. 233, pp. 397–400.
19. Kalyakin L.A. Averaging method for the problems on asymptotics at infinity. *Ufimskii Mat. Zh.*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 29–52 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on April 3, 2017.

Leonid Anatol’evich Kalyakin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia,
e-mail: klenru@mail.ru .